Notas de Aula: Linearização de Sistemas Não-Lineares DAS5112 Sinais e Sistemas Lineares I

Hector Bessa Silveira

2014/1

1 Objetivos

Veremos como podemos simular um sistema não-linear utilizando pacotes computacionais de simulação. Analisaremos os resultados de simulação do sistema de um tanque no Simulink/Matlab e verificaremos a noção de ponto de equilíbrio. Veremos, ainda, como linearizar um sistema não-linear em um ponto de equilíbrio. Por fim, com base na Função de Transferência do sistema linearizado, compararemos a dinâmica do mesmo com a dinâmica do sistema não-linear original por simulação.

2 Sistema de um tanque

Considere o sistema de um tanque ilustrado na Figura 1. A equação diferencial que descreve a dinâmica da altura do nível H do tanque é

$$\dot{H}(t) = \frac{1}{A}(Q_e(t) - Q_s(t)) = \boxed{\frac{1}{A}(Q_e(t) - \beta\sqrt{H(t)})}, \tag{1}$$

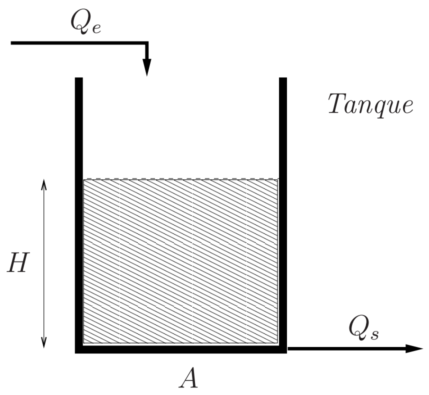

Figura 1: Tanque.

onde

$$\begin{cases} H : \text{altura do nível}, \\ Q_e : \text{vazão de entrada}, \\ Q_s = \beta\sqrt{H} : \text{vazão de saída}, \\ \beta \geq 0 : \text{parâmetro do tanque}, \\ A : \text{área da base do tanque}. \end{cases}$$

Note que (1) é uma equação diferencial não-linear. O diagrama de blocos correspondente à equação diferencial (1) é mostrado abaixo, onde $H(0)$ é a condição inicial.

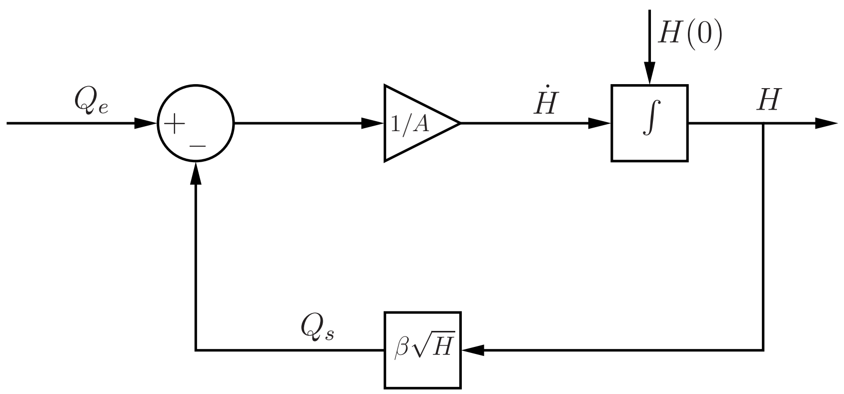

Figura 2: Diagrama de blocos da dinâmica da altura do nível H do tanque.

A implementação deste diagrama de blocos em um pacote computacional de simulação fornece a solução da equação diferencial (1) através de métodos numéricos de integração. Consequentemente, podemos analisar o comportamento dinâmico da altura do nível $H(t)$ em função do tempo t para uma determinada escolha da vazão de entrada $Q_e(t)$, $t \geq 0$.

3 Pontos de equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em *equilíbrio* quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente tal noção.

Considere um sistema não-linear descrito pela equação diferencial

$$\dot{q}(t) = f(q(t), x(t)), \tag{2}$$

onde $q \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $x \in \mathbb{R}^m$ é o controle (ou entrada). Dizemos que um par ordenado $(\overline{q}, \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é um *ponto de equilíbrio* (ou *ponto de operação*) do sistema (2) quando $f(\overline{q}, \overline{x}) = 0$, ou seja, $\dot{q} = 0$. Isto é equivalente a dizer que, se aplicarmos a entrada constate $x(t) = \overline{x}$ no sistema (2) com condição inicial $q(0) = \overline{q}$, obteremos a solução constante (ou *solução estacionária*) $q(t) = \overline{q}$, $t \geq 0$. Note que, neste caso, o sistema permanece estático, sem dinâmica.

Determinaremos então os pontos de equilíbrio do sistema de um tanque. De (1) e do fato de que $x = Q_e$ é o controle (ou entrada) do sistema, obtemos

$$\dot{H} = \frac{1}{A}(Q_e - Q_s) = 0 \;\Rightarrow\; \overline{x} = Q_e = Q_s = \beta\sqrt{\overline{H}} \;\Rightarrow\; \boxed{\overline{H} = \frac{\overline{x}^2}{\beta^2}}. \tag{3}$$

Como era de se esperar, o equilíbrio ocorre quando no taque a vazão de entrada é igual à vazão saída ($Q_e = Q_s$). Assim, dado qualquer $\overline{x}$, temos que $(\overline{H}, \overline{x}) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de equilíbrio do sistema (1), onde $\overline{H} = \overline{x}^2/\beta^2$.

Em situações práticas, nem sempre conheceremos completamente a equação diferencial que descreve a dinâmica de um sistema. Entretanto, podemos mesmo assim determinar alguns de seus pontos de equilíbrio com base na propriedade abaixo.

Propriedade 1. Se *a trajetória* $q(t)$ *(solução) do sistema para uma dada condição inicial* $q(0)$ *satisfaz* $\lim_{t\to\infty} q(t) = \overline{q}$ *ao aplicarmos a entrada constante* $x(t) = \overline{x}$, $t \geq 0$, então $(\overline{q}, \overline{x})$ *é um ponto de equilíbrio do sistema.*

4 Linearização de sistemas não-lineares

Considere um sistema não-linear descrito pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= f_1(q(t), x(t)), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n(t) &= f_n(q(t), x(t)), \end{aligned} \tag{4}$$

onde $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $x \in \mathbb{R}$ é o controle. Suponha que $f_1, \ldots, f_n$ são continuamente diferenciáveis e que $(\overline{q}, \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é um ponto de equilíbrio do sistema, isto é,

$$\dot{q}_i = f_i(\overline{q}, \overline{x}) = 0, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $t_0 \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo que a reta tangente no ponto $(t_0, g'(t_0))$ aproxima o gráfico de g na proximidades de t_0 (i.e. para $\Delta t = t - t_0 \cong 0$), podemos encontrar um sistema linear cuja dinâmica aproxima a dinâmica do sistema não-linear (4) nas proximidades de $(\overline{q}, \overline{x})$. Veremos como aplicar técnicas lineares ao referido sistema linear que possibilitam analisar o sistema não-linear (4) em torno de $(\overline{q}, \overline{x})$.

Suponha que (4) está no equilíbrio $(\overline{q}, \overline{x})$ em $t = 0$, isto é, $q(0) = \overline{q}$ e $x(t) = \overline{x}$ para $t \geq 0$. Agora, considere que $q(t)$ é a solução de (4) com condição inicial $q(0) = \overline{q}$ e uma *outra* entrada $x(t) \neq \overline{x}$. Seja $\delta q(t) = q(t) - \overline{q}$ o *desvio* em relação à $\overline{q}$, e $\delta x(t) = x(t) - \overline{x}$ o *desvio* em relação à entrada de equilíbrio $\overline{x}$. Assim, $q(t) = \overline{q} + \delta q(t)$ e $x(t) = \overline{x} + \delta x(t)$. Note que $\delta q(0) = 0$. Nosso objetivo é relacionar de modo linear a dinâmica de $\delta q(t)$ com $\delta x(t)$, ao menos aproximadamente.

Utilizando a série de Taylor de ordem 1 da função f_i em $(\overline{q},\overline{x})$, temos que a dinâmica do desvio $\delta q_i(t) = q_i(t) - \overline{q}_i$ é descrita por

$$\dot{\delta q}_i(t) = \dot{q}_i(t) - \underbrace{\dot{\overline{q}}_i}_{=0} = \dot{q}_i(t) = f_i(q(t),x(t)) \cong \underbrace{f_i(\overline{q},\overline{x})}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_k(t) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta x(t),$$
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\delta q}_i(t) \cong \left.\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_1(t) + \cdots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial q_n}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_n(t) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta x(t)}.$$

Esta aproximação é válida para pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio $(\overline{q},\overline{x})$, ou seja, $\delta q(t) \cong 0$ e $\delta x(t) \cong 0$. O sistema de equações lineares

$$\begin{aligned}
\dot{\delta q}_1(t) &= \left.\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_1(t) + \cdots + \left.\frac{\partial f_1}{\partial q_n}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_n(t) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta x(t), \quad \delta q_1(0) = 0 \\
&\vdots \\
\dot{\delta q}_n(t) &= \left.\frac{\partial f_n}{\partial q_1}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_1(t) + \cdots + \left.\frac{\partial f_n}{\partial q_n}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta q_n(t) + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x}\right|_{(\overline{q},\overline{x})} \delta x(t), \quad \delta q_n(0) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

onde $\delta x \in \mathbb{R}$ é o controle, é denominado de *sistema linearizado* associado ao sistema não-linear (4) no ponto de equilíbrio $(\overline{q},\overline{x})$. Note que a condição inicial de (5) é $\delta q(0) = 0$. Assim, temos que a dinâmica do sistema linearizado (5) aproxima a dinâmica do sistema não-linear (4) para pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio $(\overline{q},\overline{x})$. Isto significa que, quando (4) está no equilíbrio $(\overline{q},\overline{x})$ em $t = 0$, teremos

$$\boxed{\delta x(t) \cong 0 \Rightarrow q(t) \cong \overline{q} + \delta q(t),\ t \geq 0},$$

onde $\delta q(t)$ é a solução do sistema linearizado (5) com entrada $\delta x(t)$, e $q(t)$ é solução do sistema não-linear original (4) com entrada $x(t) = \overline{x} + \delta x(t)$.

Determinaremos então o sistema linearizado associado ao sistema de um tanque. Fazendo $x = Q_e$ (o controle é a vazão de entrada do tanque), rescrevemos (1) como

$$\dot{H}(t) = f(H(t),x(t)) = \frac{1}{A}(x(t) - \beta\sqrt{H(t)}). \tag{6}$$

Para um dado ponto de equilíbrio $(\overline{H}, \overline{x})$, obtemos de (5) que o sistema linearizado associado é descrito por

$$\delta\dot{H}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{(\overline{H},\overline{x})} \delta H(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\overline{H},\overline{x})} \delta x(t) = \boxed{\frac{-\beta}{2A\sqrt{\overline{H}}}\delta H(t) + \frac{1}{A}\delta x(t), \quad \delta H(0) = 0}. \tag{7}$$

Note que os coeficientes dependem do ponto de equilíbrio $(\overline{H}, \overline{x})$ escolhido.

De agora em diante, assumiremos que os parâmetros do tanque são dados por $\beta = 0.01$, $A = 1$, e escolhemos como ponto de equilíbrio $(\overline{H}, \overline{x}) = (4, 0.02)$. Desse modo, concluímos a partir de (7) que o sistema linearizado associado ao sistema de um tanque no ponto de equilíbrio $(4, 0.02)$ é

$$\delta\dot{H}(t) = -0.0025\, \delta H(t) + \delta x(t), \quad \delta H(0) = 0. \tag{8}$$

Supondo que $y = H$ é a *saída* do sistema, determinaremos no que se segue a Função de Transferência $G(s) = \Delta Y(s)/\Delta X(s)$ do sistema linearizado (8), onde $\Delta X(s)$ e $\Delta Y(s)$ são as Transformadas de Laplace da entrada δx e da saída $\delta y = \delta H$ do sistema linearizado, respectivamente. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados de (8), obtemos que[1]

$$s\Delta H(s) = -0.0025\, \Delta H(s) + \Delta X(s) \;\Rightarrow\; \boxed{G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta X(s)} = \frac{1}{s + 0.0025}}, \tag{9}$$

onde $\Delta H(s)$ é a Transformada de Laplace de δH. Observe que $G(s)$ é uma Função de Transferência de primeira ordem.

O diagrama de blocos da Figura 3 mostra como podemos comparar a dinâmica do sistema linearizado em $(\overline{H}, \overline{x}) = (4, 0.02)$ com a dinâmica do sistema não-linear (1). O bloco "SNL" é o sistema não-linear com condição inicial $H(0) = 0$, e $G(s)$ é a Função de Transferência em (9). Para fazermos tal comparação, primeiramente escolhemos um controle que coloque o sistema não-linear no ponto de equilíbrio $(\overline{H}, \overline{x}) = (4, 0.02)$. Assim, aplicamos em

[1] Para condições iniciais nulas, relembre que $\mathfrak{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s)$, onde $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$.

$t = 0$ um controle do tipo degrau de amplitude $\overline{x} = 0.02$. Suponha que

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \overline{H} = 4.$$

Tomamos $t_1 > 0$ tal que

$$H(t) \cong \overline{H} = 4, \quad \text{para } t \geq t_1. \tag{10}$$

Aplicamos então $\delta x(t)$ no instante $t = t_1$. Relembre que $x(t) = \overline{x} + \delta x(t)$ e que $\delta x(t)$ é a entrada do sistema linearizado. Portanto,

$$\boxed{\delta x(t) \cong 0 \Rightarrow H(t) \cong \overline{H} + \delta H(t),\ t \geq t_1},$$

onde $\delta H(t)$ é a solução do sistema linearizado (7) com entrada $\delta x(t)$, e $H(t)$ é a solução do sistema não-linear original (6) com entrada $x(t) = \overline{x} + \delta x(t)$.

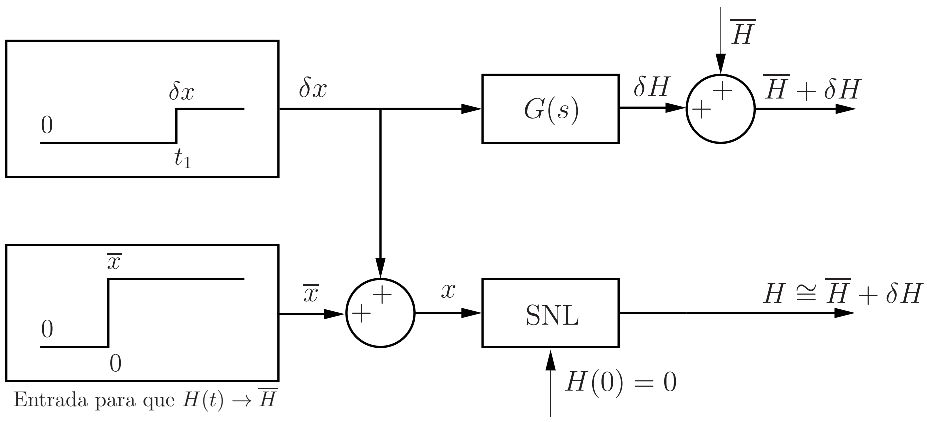

Figura 3: Comparação das dinâmicas ($\delta x \cong 0$ e $H(t) \cong \overline{H} + \delta H(t),\ t \geq t_1$).

5 Procedimentos

1. Considere a equação diferencial (1), com $\beta = 0.01$, $A = 1$. Implemente o diagrama de blocos da Figura 2 no Simulink/Matlab com o objetivo de simular a dinâmica da altura do nível H do tanque. Simule o sistema para a condição inicial $H(0) = 0$, e vazões de entrada $Q_e = 0.01$, $Q_e = 0.02$, $Q_e = 0.1$ do tipo degrau. Analise os resultados. Observe a não-linearidade do sistema: ao dobrarmos a vazão de entrada de $Q_e = 0.01$ para $Q_e = 0.02$, o valor final de $H(t)$ quadruplicou.

2. Utilizando os mesmos dados do item anterior, simule o sistema para a condição inicial $H(0) = 4$ e vazão de entrada $Q_e = 0.02$ do tipo degrau. O comportamento observado era esperado? Justifique (dica: veja (3) e relembre o conceito de ponto de equilíbrio). Em seguida, modifique a vazão de entrada para $Q_e = 0.019$ e simule. Analise os resultados (veja a Propriedade 1 e (3)).

3. Considere $G(s)$ em (9), que é a Função de Transferência do sistema linearizado associado ao sistema de um tanque (6) no ponto de equilíbrio $(\overline{H}, \overline{x}) = (4, 0.02)$. Implemente no Simulink/Matlab o diagrama de blocos apresentado na Figura 3 com o objetivo de comparar a dinâmica de $\overline{H} + \delta H(t)$ com a dinâmica de $H(t)$ do sistema não-linear (6). Para isto, escolha $\overline{x} = 0.02$, $\delta x = 0$, e determine $t_1 > 0$ por simulação (veja (10)). Simule para $\delta x = 0.0001$, $\delta x = 0.001$, $\delta x = 0.01$ do tipo degrau e analise os resultados. Baseado no que vimos em aulas anteriores, quais são as características dinâmicas da saída $\delta y(t) = \delta H(t)$ do sistema linearizado (por exemplo: sobressinal, tempo de acomodação, valor em regime permanente)? Tais características eram esperadas? Justifique sua resposta (dica: veja (9)).

4. No item anterior, mude o ponto de equilíbrio do sistema de um tanque para $(\overline{H}, \overline{x}) = (16, 0.04)$, mas mantenha a mesma Função de Transferência $G(s)$ de antes. Simule e analise os resultados. Tal comportamento era esperado? Justifique sua resposta.