

# Linearização Exata e Flatness

Paulo Sérgio Pereira da Silva (PTC–USP) e Hector Bessa Silveira (DAS–UFSC)

2013/3

## 1 Introdução e motivação

Este capítulo estuda brevemente o problema de linearização exata via mudança de coordenadas e realimentação de estado. De fato, veremos que para uma certa classe de sistemas não-lineares, existe uma realimentação de estado (não linear) que permite o cancelamento exato das não linearidades do sistema. Neste caso, o sistema em malha fechada torna-se linear, pelo menos quando ele for descrito em um sistema de coordenadas adequado. Dividimos esta seção introdutória em duas subseções. A primeira delas trata de uma versão do problema de rastreamento e também aborda uma questão filosófica. Esta questão reside no fato de que os sinais de referência do tipo degrau são adequados como sinais de teste de desempenho, mas são em geral inadequados para o controle de sistemas. Isto contraria os paradigmas do ensino de controle clássico, que estabelece a entrada degrau como um bom candidato a sinal de referência. A segunda subseção apresenta dois exemplos de sistemas linearizáveis.

### 1.1 O Problema de Rastreamento

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear é dado abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t), \\ y(t) &= x_1(t),\end{aligned}$$

onde  $u(t)$  é a tensão externa em Volts aplicada no motor,  $x_1(t) = \theta(t)$  é a posição angular do eixo em rad (radianos),  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  é a velocidade angular do eixo em rad/s, e  $y(t) = x_1(t)$  é a saída do sistema. Nosso objetivo de controle é o posicionamento do eixo do motor que parte do repouso<sup>1</sup> de um ângulo  $\theta(t_0) = \theta_0$  em  $t = t_0$ , e desejamos que o eixo deste motor atinja o ângulo  $\theta(t_f) = \theta_f$  no instante final<sup>2</sup>  $t = t_f$ . Este é um sistema de posicionamento típico que é denominado de *servo-mecanismo*.

Uma realimentação  $u(t) = K(v(t) - y(t))$ , onde  $v(t) \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, fornece o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - Kx_1(t) + Kv(t), \\ y(t) &= x_1(t).\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Em particular,  $x_2(t_0) = \dot{\theta}(t_0) = 0$ .

<sup>2</sup>Consideramos que  $t_f < \infty$  ou  $t_f = \infty$ .

Este sistema é da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}.$$

Os autovalores<sup>3</sup> de  $A$  são as raízes do polinômio característico  $\pi(s) = \det(sI - A) = s^2 + s + K$ , dadas por  $(-1 \pm \sqrt{1 - 4K})/2$ . Não é difícil de mostrar que a parte real destas raízes são sempre negativas para qualquer  $K > 0$ , demonstrando a estabilidade do sistema em malha fechada para  $v(t) = 0$ .

O posicionamento do eixo do motor pode então ser obtido pela colocação da entrada degrau  $v(t) = \theta_f$ , onde  $\theta_f$  é a ângulo final desejado. De fato, o único ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada para  $v(t) = \theta_f$  é dado por

$$\bar{x} = -A^{-1}B\theta_f = \begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para mostrar isto basta observarmos que a única solução do sistema linear  $A\bar{x} + B\theta_f = 0$  é o vetor  $\bar{x}$  dado acima. Como os autovalores de  $A$  são negativos para qualquer  $K > 0$ , temos que  $A^{-1}$  existe para todo  $K > 0$ . Agora, definimos  $z(t) = x(t) - \bar{x}$ . Temos que  $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) + B\theta_f = A(z(t) + \bar{x}) + B\theta_f = Az(t)$ . Assim, dado  $K > 0$ , concluímos que  $z(t) = x(t) - \bar{x}$  converge assintoticamente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Consequentemente,  $x_1(t) = \theta(t)$  converge assintoticamente para  $\theta_f$  quando  $t \rightarrow \infty$  (e  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  converge para zero), independentemente da escolha de  $K > 0$ . Esta forma de solucionar o problema é adequada quando não há muitas restrições sobre o comportamento de  $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$  entre o posicionamento inicial  $\theta_0$  e o final  $\theta_f$ , sendo que estamos preocupados somente com os posicionamentos inicial e final.

Suponhamos que além dos posicionamentos inicial e final, desejamos também controlar a saída  $y(t)$  entre  $\theta_0$  e  $\theta_f$ . Em outras palavras, dado um perfil desejado  $\bar{y}(t)$  definido no intervalo  $[t_0, \infty)$  gostaríamos que a saída real  $y(t) = \theta(t)$  seguisse (rastreasse) a saída desejada  $\bar{y}(t)$  com erro  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  que tenda assintoticamente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Tal problema é denominado de *problema de rastreamento* da saída desejada  $\bar{y}(t)$ .

Para resolver o problema de rastreamento, basta que projetemos um sistema de controle que garanta que a dinâmica do erro  $e(t)$  seja assintoticamente estável. Para isto, assumamos que a saída desejada  $\bar{y}(t)$  é de classe  $C^2$  (a derivada segunda é contínua). Seja  $e^{(0)}(t) = e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  e  $\frac{d^k}{dt^k}e(t) = e^{(k)}(t)$ . Teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{(0)}(t) &= e^{(1)}(t) \\ &= y^{(1)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t) = x_2(t) - \bar{y}^{(1)}(t) \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{(1)}(t) &= \dot{x}_2(t) - \bar{y}^{(2)}(t) \\ &= -x_2(t) + u(t) - \bar{y}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Para os alunos que cursaram a disciplina de Controle I, não é difícil de obter os mesmos resultados a partir de funções de transferência e do Teorema do Valor Final.

Agora, considere a lei de controle

$$u(t) = x_2(t) + \bar{y}^{(2)}(t) - \alpha e^{(0)}(t) - \beta e^{(1)}(t),$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são reais. Então, a dinâmica do erro será descrita pela equação linear

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{(0)}(t) \\ e^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(0)}(t) \\ e^{(1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

cujos autovalores são as raízes do polinômio característico  $\pi(s) = s^2 + \beta s + \alpha$ . Escolha quaisquer  $\lambda_1, \lambda_2$  reais ou complexos conjugados. Fazendo  $\pi(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$ , obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \beta &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que podem ser usadas para a imposição dos autovalores (pólos) de (1). Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possuem partes reais negativas, então a origem do sistema (1) será (globalmente) assintoticamente estável e o problema de rastreamento será solucionado com a lei de controle

$$\begin{aligned} u(t) &= x_2(t) + \bar{y}^{(2)}(t) - \alpha[y(t) - \bar{y}(t)] - \beta[y^{(1)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)] \\ &= x_2(t) + \bar{y}^{(2)}(t) - \alpha[x_1(t) - \bar{y}(t)] - \beta[x_2(t) - \bar{y}^{(1)}(t)]. \end{aligned}$$

De fato, isto assegura que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(0)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(1)}(t) = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [y^{(1)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)] &= 0. \end{aligned}$$

Ressaltamos que, se  $e^{(0)}(t_0) = e^{(1)}(t_0) = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \bar{y}(t_0) \\ y^{(1)}(t_0) &= \bar{y}^{(1)}(t_0), \end{aligned}$$

então  $e^{(0)}(t) = e^{(1)}(t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ , isto é,

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{y}(t), \\ y^{(1)}(t) &= \bar{y}^{(1)}(t), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Tal afirmação é verdade já que a origem é um ponto de equilíbrio de (1). Na prática, no entanto, sempre teremos  $y(t_0) \neq \bar{y}(t_0)$  e  $y^{(1)}(t_0) \neq \bar{y}^{(1)}(t_0)$ .

## 1.2 Exemplos de sistemas linearizáveis

**Exemplo 1:** Considere o seguinte sistema não linear, com estado  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$ , da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_1^2 + x_2^2)u.\end{aligned}$$

A realimentação de estado não linear

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 + v),$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada externa, permite cancelar perfeitamente as não linearidades, resultando no sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v.\end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que tal sistema é controlável, pois posto  $[B \ AB] = 2$ .

**Exemplo 2:** Considere o seguinte sistema não linear, com estado  $x = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$ , da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{(1 + x_1^2)}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2}{(1 + x_1^2)} + (1 + x_1^2) \left( \frac{x_2^2}{(1 + x_1^2)^2} + (1 + x_1^2)u \right).\end{aligned}$$

Observe que  $\dot{x}_1$  não pode linearizado diretamente por uma realimentação. Definimos então a mudança de coordenadas  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$ , onde  $z_1 = x_1$  e  $z_2 = x_2/(1 + x_1^2)$ . Note que a aplicação  $\phi$  possui inversa  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$ , onde  $x_1 = z_1$  e  $x_2 = z_2(1 + z_1^2)$ . Portanto,  $\phi$  é um difeomorfismo, ou seja,  $\phi$  é de fato uma mudança de coordenadas. Assim, aplicando a regra da cadeia, teremos nas novas coordenadas  $z$  que

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t) \\ &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} f(x(t), u(t)).\end{aligned}$$

Substituindo  $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$ , obtemos

$$\dot{z} = \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x, u) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} & \frac{1}{(1+x_1^2)} \end{bmatrix} f(x, u) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)},$$

com

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \\ \frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)} + (1+x_1^2) \left( \frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2)u \right) \end{bmatrix}.$$

Note que a equação acima é da forma

$$\dot{z}(t) = g(z(t), u(t))$$

e representa a expressão do mesmo sistema nas novas coordenadas  $z$ . Fazendo os cálculos, vamos encontrar

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 + (1+z_1^2)u. \end{aligned}$$

Escolhendo a realimentação não linear

$$u = \beta(z, v) = \frac{1}{1+z_1^2}(-z_2^2 + v),$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, determinamos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= v(t). \end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vê-se que o sistema em malha fechada, nas novas coordenadas  $z$ , é linear, invariante no tempo e controlável. Além disso, nas coordenadas originais  $x$ , a realimentação não linear é dada por

$$u = \beta(\phi(x), v) = \alpha(x, v) = \frac{1}{1+x_1^2} \left( -\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + v \right).$$

Conclui-se então que uma transformação de coordenadas  $z = \phi(x)$  e uma realimentação de estado não linear<sup>4</sup>  $u = \alpha(x, v)$ , permitem cancelar de maneira exata as não linearidades do sistema e obter um sistema em malha fechada que é linear, controlável e invariante no tempo. Isto dá origem ao seguinte problema:

**Definição 1 (Problema de Linearização Exata)** *Encontrar uma realimentação de estado e uma mudança de coordenadas, tais que o sistema em malha fechada, quando escrito nessas novas coordenadas, seja um sistema linear controlável invariante no tempo.*

<sup>4</sup>Ou, equivalentemente,  $u = \alpha(\phi^{-1}(z), v) = \beta(z, v)$ .

## 2 Desacoplamento e linearização exata

Nesta seção, veremos a conexão entre o problema de linearização exata e o problema de desacoplamento. Consideraremos sistemas da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (2a)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (2b)$$

onde  $x(t) \in V$  é o estado,  $V \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada (ou controle),  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  é a saída,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$ , e  $g(x)$  é uma matriz  $n \times m$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \cdots & g_{nm}(x) \end{bmatrix},$$

onde todas as funções  $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^\infty$ . Do mesmo modo,  $h = (h_1, \dots, h_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$ . Observe que o número de componentes da saída  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  é igual ao número de componentes da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ , e que o sistema está definido em  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Denotando por  $g_j(x)$  a coluna  $j$  de  $g(x)$ , podemos considerar  $g_j$  como uma aplicação  $g_j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  e rescrever (2a)–(2b) como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(t)g_j(x(t)), \quad (3a)$$

$$y(t) = h(x(t)). \quad (3b)$$

Neste capítulo, consideraremos leis de controle denominadas de *realimentação de estado estática localmente regular* (em um aberto  $U \subset V$  de  $\mathbb{R}^n$ ) e dadas por

$$u(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t), \quad (4)$$

onde  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  é a nova entrada,  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$  e

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \cdots & \beta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

é uma matriz  $m \times m$  em que todas as funções  $\beta_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , são de classe  $C^\infty$ . Aqui, o termo *localmente regular* significa que a matriz  $\beta$  é invertível em  $U$ , ou seja,  $\det \beta(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U$ .

Note que o sistema em malha fechada, o qual está definido em  $U \subset V$ , é dado por

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t)) + \tilde{g}(x(t))v(t), \quad (5a)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (5b)$$

onde  $x(t) \in U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\tilde{f} = f + g\alpha, \quad \tilde{g} = g\beta.$$

## 2.1 O Problema de Desacoplamento

Considere um sistema da forma (2), o qual está definido em um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , com entrada  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  e saída  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ . Dizemos que o sistema é *desacoplado* quando cada componente  $u_j(t)$  da entrada  $u(t)$  atua de fato na componente  $y_j(t) = h_j(x(t))$  da saída  $y = h(x(t))$ , mas não influencia a componente  $y_i(t) = h_i(x(t))$  quando  $i \neq j$ . O problema de desacoplamento consiste na construção de uma realimentação regular (4) de modo que o sistema em malha fechada (5) seja desacoplado. Relembre que a entrada do sistema em malha fechada é  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$ .

**Problema de Desacoplamento.** Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho<sup>5</sup> do sistema (2). Dizemos que o *problema de desacoplamento é localmente solúvel* em  $x_0$ , se existir uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  e uma realimentação (4) localmente regular em  $U$ , tais que o sistema em malha fechada (5) seja desacoplado. Do mesmo modo, seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho, ou seja,  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que o *problema de desacoplamento é localmente solúvel* em  $U_0$ , se existir uma realimentação localmente regular em  $U_0$  tal que o sistema em malha fechada (5) seja desacoplado.

Ressaltamos que a primeira versão do problema de desacoplamento formulado acima não se preocupa com o tamanho da vizinhança aberta  $U$  do ponto de trabalho  $x_0$  para o qual o sistema em malha fechada (5) se torna desacoplado. Assim, a princípio, não temos como garantir que  $U = V$ . Como (5) estará definido somente em  $U \subset V$ , o desacoplamento do sistema em malha fechada ocorrerá somente dentro de  $U$ . Isto significa que apenas enquanto a trajetória  $x(t)$  do sistema em malha fechada não sair de  $U$  é que o sistema permanecerá desacoplado. É por este motivo que usamos o termo “localmente solúvel” na definição acima, pois garantimos apenas uma solução local em torno do ponto de trabalho  $x_0$ .

Por outro lado, a segunda versão assegura a existência de uma realimentação localmente regular (4) que está definida em toda a região de trabalho  $U_0 \subset V$  e que desacopla o sistema em malha-fechada, o qual está definido em  $U_0$ . É claro que gostaríamos de escolher  $U_0 = V$ . No entanto, dependendo das não linearidades do sistema (2), isto nem sempre é possível, e temos que nos contentar com uma solução local em determinado  $U_0 \subset V$ .

Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho do sistema (2) e considere que  $U \subset V$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$ . Veremos que a derivação sucessiva das componentes  $y_i$  da saída  $y$  com relação ao tempo nos leva a uma solução para o problema de desacoplamento. Para isto, considere que tomamos uma componente  $y_i(t) = h_i(x(t))$  da saída  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$  e a derivamos no tempo. Como  $y_i(t) = h_i(x(t)) = h_i \circ x(t)$  (função composta), pela regra da cadeia temos que

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t).$$

---

<sup>5</sup>Aqui,  $x_0$  não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

Substituindo (2a) na equação acima, obtemos

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)].$$

Neste momento, é natural introduzirmos a **derivada de Lie** de duas aplicações  $w : U \rightarrow \mathbb{R}$  (real) e  $q = (q_1, \dots, q_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  (vetor coluna) de classe  $C^\infty$ :

$$L_q w(x) \triangleq \frac{\partial w}{\partial x}(x)q(x) = [\partial w / \partial x_1(x) \ \dots \ \partial w / \partial x_m(x)]q(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)q_i(x) \in \mathbb{R},$$

para todo  $x \in U$ . Temos que  $L_q w : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^\infty$ . Portanto, podemos também considerar  $L_q^2 w = L_q(L_q w)$ . Note que<sup>6</sup>

$$L_q^2 w(x) \triangleq L_q L_q w(x) = \frac{\partial L_q w}{\partial x}(x)q(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para } x \in U.$$

Definimos, para todo  $k \geq 1$  (inteiro),

$$L_q^k w = L_q(L_q^{k-1} w), \quad \text{onde } L_q^0 w = w.$$

Voltando então ao problema de desacoplamento, e tomando

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)f(x) = L_f h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g(x) = \left( \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_1(x) \ \dots \ \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_m(x) \right) \\ &= (L_{g_1} h_i(x) \ \dots \ L_{g_m} h_i(x)) = (A_{i1}^1(x)) \ \dots \ A_{im}^1(x) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

para todo  $x \in U$ , encontramos que

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) + A_i^1(x(t))u(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Assuma que  $A_i^1(x)$  é identicamente nulo em  $U$ , isto é,  $A_i^1(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(1)}(t)$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ , pois teremos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)).$$

Repetindo o mesmo procedimento para  $y_i^{(1)}(t)$ , vamos obter

$$y_i^{(2)}(t) = h_i^2(x(t)) + A_i^2(x(t))u(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

---

<sup>6</sup>Pode-se mostrar que  $L_q^2 w(x) = q^T(x)H(x)q(x) + \frac{\partial w}{\partial x}(x)\frac{\partial q}{\partial x}(x)q(x)$ , onde  $H(x)$  é a matriz Hessiana da função real  $w$  e  $\frac{\partial q}{\partial x}(x)$  é a matriz Jacobiana do vetor coluna  $q$ , no ponto  $x \in U$ .



onde, para todo  $x \in U$ ,

$$\begin{aligned} h_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)f(x) = L_f^2 h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g(x) = \left( \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_1(x) \ \dots \ \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_m(x) \right) \\ &= (L_{g_1} L_f h_i(x) \ \dots \ L_{g_m} L_f h_i(x)) = (A_{i1}^2(x) \ \dots \ A_{im}^2(x)) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Assuma que  $A_i^2(x)$  é identicamente nulo em  $U$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(2)}(t)$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ . Definimos  $\rho_i \geq 1$  como o menor inteiro tal que  $A_i^{\rho_i}(x)$  não seja identicamente nulo em  $U$ . Mais precisamente,  $\rho_i \geq 1$  é o inteiro tal que  $A_i^{\rho_i}(x_0) \neq 0$  e existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  em que  $A_i^k(x)$  é identicamente nulo em  $U \subset V$ , para todo  $1 \leq k \leq \rho_i - 1$ . Observe que tal definição de  $\rho_i$  equivale a

$$A_i^{\rho_i}(x_0) = [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ \dots \ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0,$$

$A_i^k(x) = [L_{g_1} L_f^{k-1} h_i(x) \ L_{g_2} L_f^{k-1} h_i(x) \ \dots \ L_{g_m} L_f^{k-1} h_i(x)] = 0$ ,  $1 \leq k \leq \rho_i - 1$ ,  $x \in U$ , que por sua vez é o mesmo que

$$[L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ \dots \ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0,$$

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 2, x \in U.$$

Quando, para todo  $k \geq 1$ , temos que  $A_i^k(x)$  é identicamente nulo em alguma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , definimos  $\rho_i = \infty$ . No caso em que  $\rho_i < \infty$  (finito), denominamos o inteiro  $\rho_i = \rho_i(x_0) \geq 1$  de **grau relativo** da saída  $y_i = h_i(x)$  no ponto de trabalho  $x_0$ , o qual corresponde ao *número de derivações no tempo que temos que realizar para que a saída  $y_i$  dependa explicitamente de alguma componente  $u_j$  da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$* . Assuma que todas as componentes  $y_i$  da saída  $y = (y_1, \dots, y_m)$  admitem grau relativo em  $x_0$ . Dizemos então que a saída  $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  **admite grau relativo** em  $x_0$  e, assim, podemos escrever

$$y_i^{(\rho_i)}(t) = a_i(x(t)) + A_i(x(t))u(t),$$

onde  $a_i(x) = h_i^{\rho_i}(x) = L_f^{\rho_i} h_i(x)$ ,  $A_i(x) = A_i^{\rho_i}(x)$ , para  $x \in U$ , onde  $U$  é alguma vizinhança aberta de  $x_0$ . Logo, para  $x \in U$ , definimos

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

e

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}.$$

Note que  $a_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  e  $A_i$  é um vetor linha de  $m$  funções de classe  $C^\infty$ . Desta forma,  $a : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um vetor coluna de  $m$  funções de classe  $C^\infty$  e  $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz  $m \times m$  de funções de classe  $C^\infty$ , denominada de **matriz de desacoplamento**. Observe que a componente  $y_i = h_i(x)$  da saída  $y = h(x)$  admite grau relativo  $\rho_i = \rho_i(x_0)$  em  $x_0$  quando  $A_i(x_0) = [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \dots L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0$  e existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  tal que  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$ , para todo  $1 \leq j \leq m$ , todo  $0 \leq k \leq \rho_i - 2$  e todo  $x \in U$ . Além disso,  $y_i^{(k)}(t) = L_f^k h_i(x(t))$ , para  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ .

Ressaltamos que uma saída  $y$  nem sempre admite grau relativo em todos os pontos. De fato, considere o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_2 u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_1, \\ y_1 &= x_1.\end{aligned}$$

Derivando-se  $y_1$ , temos

$$y_1^{(1)} = x_2 + x_2 u_1,$$

com  $A_1^1(x_1, x_2) = L_{g_1} h_1(x_1, x_2) = x_2$ . Logo, o grau relativo de  $y_1$  em  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  é  $\rho_1 = 1$  quando  $x_2^0 \neq 0$ , pois  $A_1^1(x_1^0, x_2^0) = x_2^0 \neq 0$ . No entanto,  $y_1$  não admite grau relativo em  $x_0$  caso  $x_2^0 = 0$ , já que  $A_1^1(x_1^0, 0) = 0$  e  $A_1^1(x_1, x_2) = x_2$  não se anula em nenhuma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0 = (x_1^0, 0)$ . De fato, dada qualquer vizinhança aberta  $U$  de  $x_0 = (x_1^0, 0)$ , sempre existe algum  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$  com  $\bar{x}_2 \neq 0$ . Portanto,  $A_1^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \neq 0$ .

**Definição 2** *Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho (aberto em  $\mathbb{R}^n$ ) do sistema (2). Dizemos que a saída  $y = h(x)$  do sistema (2) admite grau relativo em  $U_0$  quando cada componente  $y_i = h_i(x)$  da saída  $y = h(x)$  admite grau relativo  $\rho_i(x)$  em todo  $x \in U_0$  e  $\rho_i(x)$  permanece constante dentro da região  $U_0$ , isto é,  $\rho_i(x) = \bar{\rho}_i$ , para qualquer  $x \in U_0$ .*

**Observação:** Ressaltamos que se a saída  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $x_0$ , então existe uma vizinhança aberta  $U_0$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U_0$ . Isto é uma consequência de argumentos de continuidade.  $\diamond$

**Exemplo 3:** [3] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3.\end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x) &= [0 \ 0 \ 1], \quad L_g h(x) = 0, \quad L_f h(x) = x_2, \\ \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) &= [0 \ 1 \ 0], \quad L_g L_f h(x) = 1.\end{aligned}$$

Desse modo, a saída  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 2$  na região de trabalho  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 4:** [3] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_4. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1], & L_g h(x) &= 0, & L_f h(x) &= x_1^2 + x_2, \\ \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) &= [2x_1 \ 1 \ 0 \ 0], & L_g L_f h(x) &= 2(1 + x_3). \end{aligned}$$

Assim, a saída  $y = h(x) = x_4$  admite grau relativo  $\rho = 2$  em todos os pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  em que  $x_3 \neq -1$ . Como tal conjunto é um aberto  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^n$ , concluímos que  $y = h(x) = x_4$  admite grau relativo  $\rho = 2$  na região de trabalho  $U_0$ .

Podemos agora enunciar as soluções para as duas versões do problema de desacoplamento, cujas demonstrações são semelhantes.

**Teorema 1** *Suponha que a saída  $y = h(x)$  do sistema (2) admite grau relativo no ponto de trabalho  $x_0 \in V$ . Então o problema de desacoplamento é localmente solúvel em  $x_0$  se e somente se o determinante da matriz de desacoplamento não se anula em  $x_0$ , ou seja,  $\det A(x_0) \neq 0$ .*

**Teorema 2** *Suponha que a saída  $y = h(x)$  do sistema (2) admite grau relativo na região de trabalho  $U_0 \subset V$ . Então o problema de desacoplamento é localmente solúvel em  $U_0$  se e somente se  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .*

Para esboçar a demonstração da suficiência ( $\Leftarrow$ ) dos dois teoremas acima, lembre que

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= a_1(x) + A_1(x)u, \\ y_2^{(\rho_2)} &= a_2(x) + A_2(x)u, \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= a_m(x) + A_m(x)u, \end{aligned}$$

e que  $A_i(x)$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $A(x)$ . Denotando-se

$$y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T,$$

podemos escrever

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u, \tag{6}$$

com

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

e

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}.$$

Com base nisto, veremos na sequência que a escolha de uma realimentação regular (4) que soluciona o problema de desacoplamento é natural e evidente.

Provaremos primeiro a suficiência do Teorema 2. Suponha então que  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ . Isto é equivalente a dizer que  $A(x)^{-1}$  existe para todo  $x \in U_0$ . Desse modo, escolhendo a realimentação como

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (7a)$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  é a nova entrada e

$$\alpha(x) = -A(x)^{-1}a(x), \quad (7b)$$

$$\beta(x) = A(x)^{-1}, \quad (7c)$$

obtemos que a saída  $y = h(x)$  do sistema em malha fechada (5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v, \quad (8)$$

ou seja,

$$y_1^{(\rho_1)} = v_1, \quad (9a)$$

$$y_2^{(\rho_2)} = v_2, \quad (9b)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y_m^{(\rho_m)} = v_m, \quad (9c)$$

Note que cada equação  $y_i^{(\rho_i)} = v_i$  é linear e completamente desacoplada de outra equação  $y_j^{(\rho_j)} = v_j$  quando  $i \neq j$ . Além disso,  $y_i(t)$  corresponde à saída de um banco de  $\rho_i$  integradores em série tendo como entrada  $v_i(t)$ , ou seja,  $Y_i(s) = V_i(s)/s^{\rho_i}$ . Desse modo, fica claro que a resposta entrada-saída é linear e que a evolução de  $y_i(t)$  depende de fato de  $v_i(t)$ , mas não é de modo algum influenciada por  $v_j(t)$  quando  $i \neq j$ . Como (7) é uma realimentação de estado estática localmente regular em  $U_0$ , concluímos que a mesma fornece uma solução para o problema de desacoplamento. Quando  $x \notin U_0$ , não temos garantia de que  $A(x)^{-1}$  existe e, conseqüentemente, a realimentação (7) poderá

apresentar uma singularidade em tal ponto. Portanto, tudo que podemos assegurar é que o sistema malha fechada (5) fica desacoplado enquanto a trajetória  $x(t)$  permanecer em  $U_0$ .

Provaremos agora a suficiência do Teorema 1. Suponha então que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Denote o conjunto das matrizes  $m \times m$  de números reais por  $\mathbb{R}^{m^2}$ . Observe que a aplicação  $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m^2}$  definida por  $x \mapsto A(x)$  é de classe  $C^\infty$  e, portanto, é contínua. Denote por  $\det : \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $M \mapsto \det(M)$ . Mostra-se que  $\det$  é uma função contínua (por ser a soma de produtos dos elementos da matriz  $M$ ). Considere a função  $\det A : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto \det A(x)$ . Esta função é contínua, pois ela é a composta de “ $\det$ ” com “ $A$ ”, e a composta de aplicações contínuas é contínua. Em particular, o conjunto

$$U_0 = \{x \in V \mid \det A(x) \neq 0\}$$

é uma vizinhança aberta de  $x_0$ . Portanto, basta aplicarmos o Teorema 2 para demonstrarmos a suficiência do Teorema 1.

A demonstração da necessidade ( $\Rightarrow$ ) dos dois teoremas pode ser encontrada em [2, 5, 3].

**Observação:** Quando  $m = 1$ , ou seja, o sistema (2) tem um única entrada  $u \in \mathbb{R}$  e uma única saída  $y = h(x) \in \mathbb{R}$ , a realimentação regular (7) se reduz a

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v], \quad (10a)$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada e

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}, \quad (10b)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. \quad (10c)$$

Portanto, a saída  $y = h(x)$  do sistema em malha fechada (5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v,$$

ou seja,  $Y(s) = V(s)/s^\rho$ . ◇

**Exemplo 5:** [3] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0, & L_f h(x) &= x_1 - x_2, \\ L_g L_f h(x) &= 0, & L_f^2 h(x) &= -x_1 - x_2^2, \\ L_g L_f^2 h(x) &= -(1 + 2x_2) \exp(x_2), & L_f^3 h(x) &= -2x_2(x_1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Vemos que a saída  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 3$  em todos os pontos  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  em que  $1 + 2x_2 \neq 0$ . Como tal conjunto é um aberto  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$ , concluímos que  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 3$  na região de trabalho  $U_0$ . A matriz de desacoplamento (nesse caso é um escalar)

$$A(x) = L_g L_f^2 h(x) = -(1 + 2x_2) \exp(x_2)$$

é tal que  $A(x) \neq 0$  para todo  $x \in U_0$ . Desse modo, concluímos que a realimentação de estado estática localmente regular em  $U_0$  dada por

$$u = \frac{-L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} v = -\frac{2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} v$$

para todo  $x \in U_0$ , desacopla o sistema em malha fechada (5), o qual está definido em  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$ . Além disso, a saída  $y = h(x) = x_3$  de (5) é tal que

$$y^{(3)} = v.$$

**Exemplo 6:** [3] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\ y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\ y_2 &= h_2(x) = x_4. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(x) &= L_{g_2} h_1(x) = L_{g_1} L_f h_1(x) = L_{g_2} L_f h_1(x) = 0, \\ L_{g_1} h_2(x) &= L_{g_2} h_2(x) = 0, \\ L_f^2 h_1(x) &= x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5, \\ L_f h_2(x) &= x_5, \\ [L_{g_1} L_f^2 h_1(x) \quad L_{g_2} L_f^2 h_1(x)] &= [\cos(x_1 - x_5) \quad 1] \neq 0, \\ [L_{g_1} L_f h_2(x) \quad L_{g_2} L_f h_2(x)] &= [0 \quad 1] \neq 0. \end{aligned}$$

Escolhemos a origem  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^5$  como ponto de trabalho. Assim,  $\rho_1 = \rho_1(x_0) = 3$ ,  $\rho_2 = \rho_2(x_0) = 2$ , a saída  $y = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$  admite grau relativo em  $x_0$ , e a matriz de desacoplamento é

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $\det A(x_0) \neq 0$ , sabemos que existe uma vizinhança aberta  $U \subset V = \mathbb{R}^5$  de  $x_0$  em que a realimentação de estado estática localmente regular em  $U$  dada por

$$u = -A(x)^{-1} a(x) + A(x)^{-1} v,$$

para todo  $x \in U$ , está de fato bem definida, ou seja,  $A(x)^{-1}$  existe para todo  $x \in U$ , onde  $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$  é a nova entrada e

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, tal realimentação desacopla o sistema em malha fechada (5), o qual está definido em  $U \subset V = \mathbb{R}^3$ . Por fim, a saída  $y = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$  de (5) é tal que

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1, \\ y_2^{(2)} &= v_2. \end{aligned}$$

## 2.2 Forma normal

Nesta seção, mostraremos que se todas as saídas  $y_i = h_i(x)$  do sistema (2) admitem grau relativo  $\rho_i$  em um dado ponto de trabalho  $x_0 \in V$  e a matriz de desacoplamento  $A(x_0)$  é invertível, então existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  em que o sistema se escreve de uma forma especial, denominada de *forma normal*. A forma normal possui duas partes. A primeira é o *subsistema entrada-saída*, que pode se tornar desacoplado e exibir uma resposta entrada-saída linear após uma realimentação regular adequada. A segunda parte é denominada de *dinâmica zero*. Veremos que a dinâmica zero é o sistema que obtemos quando acrescentamos a restrição “ $y(t) \equiv 0$ ” ao sistema original (2).

Para a obtenção da forma normal, usaremos um teorema fundamental de análise matemática, denominado de *Teorema da Função Inversa*. Sejam  $W$  e  $Z$  abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Lembramos que uma aplicação diferenciável  $\phi : W \rightarrow \phi(W) = Z$  que admite inversa diferenciável  $\psi = \phi^{-1} : Z \rightarrow \phi^{-1}(Z) = W$  é denominada de *difeomorfismo* ou de *mudança de coordenadas local* em  $W$ .

**Teorema 3 (Teorema da Função Inversa)** *Considere que  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^1$  (continuamente diferenciável), onde  $W$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $J(x) = \partial F / \partial x|_x$  a matriz Jacobiana da aplicação  $F$  no ponto  $x \in W$ . Seja  $x_0 \in W$  e  $y_0 = F(x_0)$ . Assuma que  $\det J(x_0) \neq 0$  (ou, equivalentemente, posto  $J(x_0) = n$ ). Então, existe uma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  e uma vizinhança aberta  $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $y_0$  tais que a aplicação  $\phi : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0} = \phi(U_{x_0}) = F(U_{x_0})$  definida por  $\phi(x) = F(x)$ , para todo  $x \in U_{x_0}$ , é um difeomorfismo em  $U_{x_0}$  (dizemos então que  $F$  é um difeomorfismo local em  $U_{x_0} \subset W$ ).*

Ressaltamos que, no enunciado do teorema, dizer que  $\phi$  é a mesma aplicação que  $F$  seria um abuso de linguagem. De fato, o domínio destas aplicações em geral não coincidem (nem o contradomínio), pois na maioria dos casos  $U_{x_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $W$  e  $V_{y_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação:** Suponha que uma aplicação  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  é tal que  $\det J(x) \neq 0$ , para todo  $x \in W$ , onde  $W$  é um aberto. O Teorema da Função Inversa

implica que  $F(W)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , mas não assegura que  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$ . No entanto,  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$  se e somente se  $F$  é uma aplicação injetiva, ou seja,  $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$ , para quaisquer  $x, y \in W$ .  $\diamond$

**Exemplo 7:** [3] Considere a aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x) = (x_1 + x_2, \sin x_2),$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Temos que

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Como posto  $J(0) = 2$ , concluímos que existe uma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^2$  de  $x_0 = 0$  tal que  $F$  é um difeomorfismo local em  $U_{x_0}$ . Note que posto  $J(x_1, x_2) = 1$  quando  $x_2 = \pi/2 + k\pi$ .

**Exemplo 8:** [3] Considere a aplicação  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{x_1 + 1} \end{bmatrix},$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq -1\}$ . Temos que  $W \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto,

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(x_1 + 1)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

e posto  $J(x) = 2$ , para todo  $x = (x_1, x_2) \in W$ . Como  $F$  é injetiva, concluímos que  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$ .

**Lema 1** Considere o sistema (2) e seja  $x_0 \in V$ . Assuma que a saída  $y = h(x)$  do sistema admite grau relativo em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  e que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Seja  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$  a soma dos graus relativos  $\rho_i$  das saídas  $y_i = h_i(x)$ . Considere a aplicação  $z : U \rightarrow \mathbb{R}^\rho$  definida por<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)), \\ &= (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \dots, z_{\rho_m}^m) \in \mathbb{R}^\rho, \end{aligned} \tag{11}$$

para  $x \in U$ . Seja  $J(x) = \partial z / \partial x|_x$  a matriz Jacobiana de  $z$  no ponto  $x \in U$  (note que  $J(x)$  tem tamanho  $\rho \times n$ ). Então, as  $\rho$  linhas de  $J(x_0)$  são linearmente independentes ou, de maneira equivalente, posto  $J(x_0) = \rho$  (posto completo). Em particular,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \leq n$ .

<sup>7</sup>Da definição de grau relativo, temos que  $y_i^{(k)} = L_f^k h_i(x)$  depende apenas de  $x$  para  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ .



Uma demonstração geométrica deste resultado pode ser encontrada em [3].

**Observação:** Relembre que, pela observação que segue a Definição 2, se  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $x_0$ , então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U$ . Além disso<sup>8</sup>, se  $f(x_0) = 0$  e  $h(x_0) = 0$ , temos que a definição de derivada de Lie implica que  $L_f^k h_i(x_0) = 0$ , para todo  $0 \leq k \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Logo,  $z(x_0) = 0$  em (11) e  $\alpha(x_0) = 0$  em (7).  $\diamond$

**Teorema 4 (Forma Normal)** *Considere o sistema (2) e seja  $x_0 \in V$ . Suponha que a saída  $y = h(x)$  do sistema admite grau relativo em  $x_0$  e que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Seja  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$  a soma dos graus relativos  $\rho_i$  das saídas  $y_i = h_i(x)$ . Então, existe uma mudança de coordenadas local  $\psi : U_{x_0} \rightarrow \psi(U_{x_0}) = V_{\xi_0}$  definida em uma vizinhança aberta  $U_{x_0}$  de  $x_0$ , onde  $\xi_0 = \psi(x_0)$ , tal que:*

- A saída  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U_{x_0}$  e  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_{x_0}$ .
- $\xi = \psi(x) = (z(x), \eta(x)) \in \mathbb{R}^n$ , para  $x \in U_{x_0}$ , onde  $z(x) \in \mathbb{R}^\rho$  é dada por (11).
- $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-\rho})$  pode sempre ser escolhido como um conjunto de funções  $\eta_k$  de classe  $C^\infty$  em  $U_{x_0}$  (eventualmente lineares) tal que as linhas de  $N(x_0) = \partial\eta/\partial x|_{x_0}$  completam as linhas de  $Z(x_0) = \partial z/\partial x|_{x_0}$  de modo a formar  $n$  linhas linearmente independentes. Em particular, a matriz

$$T(x_0) = \begin{bmatrix} Z(x_0) \\ N(x_0) \end{bmatrix} = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0)$$

é invertível. Além disso,  $\eta(x_0) \in \mathbb{R}^{n-\rho}$  (valor de  $\eta$  em  $x_0$ ) pode ser escolhido arbitrariamente. Em particular, se  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , e escolhermos  $\eta(x_0) = 0$ , então  $\xi_0 = \psi(x_0) = (z(x_0), \eta(x_0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>8</sup>Note que assumir que  $f(x_0) = 0$  é o mesmo que dizer que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio de (2) para  $u = 0$ . Observe também que, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir que  $h(x_0) = 0$ . De fato, se  $h(x_0) \neq 0$ , então ao escolhermos como nova saída  $\bar{y} = \bar{h}(x) = h(x) - h(x_0)$ , a qual corresponde a uma translação da origem do espaço de saída, teremos que  $\bar{h}(x_0) = 0$  e  $L_f^{k+1} h_i = L_f^{k+1} \bar{h}_i$ ,  $L_{g_j} L_f^k h_i = L_{g_j} L_f^k \bar{h}_i$ , para  $k \geq 0$ . Assim,  $\bar{y}_i = \bar{h}_i(x)$  admite grau relativo  $\bar{\rho}_i = \rho_i$  em  $x_0$ .

- Nas coordenadas locais  $\xi = (z, \eta)$ , o sistema em malha aberta (2) se expressa localmente em  $V_{\xi_0}$  por (FORMA NORMAL EM MALHA ABERTA):

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i, \\ \dot{z}_2^i &= z_3^i, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i, \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= a_i(\psi^{-1}(z, \eta)) + A_i(\psi^{-1}(z, \eta))u, \\ y_i &= z_1^i, \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (12)$$

$$\dot{\eta} = \gamma(z, \eta) + \delta(z, \eta)u.$$

Quando  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$  e  $\eta(x_0) = 0$ , teremos que  $\gamma(0, 0) = 0$ , ou seja,  $(z(x_0), \eta(x_0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema acima para  $u = 0$ .

- Com a realimentação de desacoplamento (7), que é uma realimentação de estado estática localmente regular em  $U_{x_0}$ , e nas coordenadas locais  $\xi = (z, \eta)$ , o sistema malha fechada (5) se expressa localmente em  $V_{\xi_0}$  por (FORMA NORMAL EM MALHA FECHADA):

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i, \\ \dot{z}_2^i &= z_3^i, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i, \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= v_i, \\ y_i &= z_1^i, \end{aligned} \right\} \equiv (z_1^i)^{(\rho_i)} = y_i^{(\rho_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13a)$$

$$\dot{\eta} = \tilde{\gamma}(z, \eta) + \tilde{\delta}(z, \eta)v. \quad (13b)$$

Quando  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$  e  $\eta(x_0) = 0$ , teremos que  $\tilde{\gamma}(0, 0) = 0$ , ou seja,  $(z(x_0), \eta(x_0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (13) para  $v = 0$ .

**Prova:** Com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e na observação que segue a Definição 2, sabemos que existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U$  e  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U$ . Pelo Lema 1, temos que a matriz  $\rho \times n$  dada por  $Z(x_0) = \partial z / \partial x|_{x_0}$  possui linhas (linearmente) independentes. Em particular, existe um determinante menor  $\rho \times \rho$  não nulo. Sem perda de generalidade, a menos de reordenação das componentes de  $z$  (ou, equivalentemente, de uma reordenação das colunas de  $Z(x_0)$ ), assumamos que  $Z(x_0)$  é da forma

$$Z(x_0) = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix},$$

onde  $Z_1$  é uma matriz  $\rho \times \rho$  invertível. Escreva  $x = (x_1, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Defina  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$  por  $\pi(x) = (x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Escolha qualquer  $b \in \mathbb{R}^{n-\rho}$  e defina  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$  por  $\eta(x) = \pi(x) + b$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por construção,

$$N(x) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix},$$

onde  $I_{n-\rho}$  é a matriz identidade  $(n - \rho) \times (n - \rho)$ . Defina a aplicação  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\psi(x) = (z(x), \eta(x))$ , para todo  $x \in U$ . Por construção, a matriz Jacobiana de  $\psi$  calculada em  $x_0$  é dada por

$$T(x_0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0) = \begin{bmatrix} Z(x_0) \\ N(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix}.$$

A partir da forma bloco triangular de  $T(x_0)$ , mostra-se que

$$\det T(x_0) = (\det Z_1)(\det I_{n-\rho}) = \det Z_1 \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Inversa,  $\psi$  é um difeomorfismo local em alguma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset U$  de  $x_0$ . Por construção, temos que (12) e (13) são satisfeitas em  $V_{\xi_0} = \psi(U_{x_0})$ , onde  $\xi_0 = \psi(x_0)$ .  $\square$

**Exemplo 9 (Continuação do Exemplo 3):** No Exemplo 3, analisamos o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3, \end{aligned}$$

e mostramos que  $L_f h(x) = x_2$  e que  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 2$  em  $U_0 = V = \mathbb{R}^3$ . Observe que  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ , e  $a(x) = L_f^2 h(x) = x_1 x_2$ ,  $A(x) = L_g L_f h(x) = 1$ , para  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Vamos agora encontrar a formal normal. Por (11), temos que  $z = (z_1, z_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) = x_3, \\ z_2 &= L_f h(x) = x_2, \end{aligned}$$

com

$$Z(x) = \frac{\partial z}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e posto  $Z(x) = 2 = \rho$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Sabemos que existe ao menos uma aplicação  $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $N(x) = \partial \eta / \partial x|_x \in \mathbb{R}^3$  completa as linhas de  $Z(x)$  de modo a obtermos 3 linhas linearmente independentes, ao menos localmente<sup>9</sup>. Escolhendo

$$\eta(x) = x_1$$

---

<sup>9</sup>Para garantirmos tal propriedade localmente, sempre podemos escolher  $\eta$  dentre as funções coordenadas  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

e definindo  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\psi(x) = (z_1(x), z_2(x), \eta(x)) = (x_3, x_2, x_1)$ , temos

$$T(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} Z(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com posto  $T(x) = 3$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Note que  $\psi(0) = (z(0), \eta(0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Como  $\psi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$  e  $\psi$  é injetiva, concluímos que  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \psi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$  é uma mudança de coordenadas *global* (definida em todo  $V = \mathbb{R}^3$ ). Assim, a forma normal em malha aberta (12) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2\eta + u, \\ \dot{\eta} &= -\eta - \exp(z_2)u, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_3 = x_2 = z_2, \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 = x_1x_2 + u = a(x) + A(x)u = a(\psi^{-1}(z, \eta)) + A(\psi^{-1}(z, \eta))u = z_2\eta + u, \\ \dot{\eta} &= \dot{x}_1 = -x_1 - \exp(x_2)u = -\eta - \exp(z_2)u. \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter feito os cálculos acima através de

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \right) \Big|_{x=\psi^{-1}(z, \eta)}.$$

Utilizando então a realimentação desacoplante (7)

$$\begin{aligned} u &= -A^{-1}(x)a(x) + A^{-1}(x)v = -x_1x_2 + v \\ &= -A^{-1}(\psi^{-1}(z, \eta))a(\psi^{-1}(z, \eta)) + A^{-1}(\psi^{-1}(z, \eta))v = -z_2\eta + v, \end{aligned}$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, determinamos a forma normal em malha fechada (13)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v, \\ \dot{\eta} &= -\eta + z_2\eta \exp(z_2) - \exp(z_2)v. \end{aligned}$$

### 2.3 Dinâmica zero e estabilização

Considere as hipóteses do Teorema 4 e suponha que a condição inicial do sistema em malha fechada (5) é  $x(0) \in U_{x_0}$ . Seja  $x(t)$  a trajetória (contínua) correspondente para determinada entrada  $v(t)$ . Por continuidade, existe  $\bar{t} > 0$  tal que  $x(t) \in U_{x_0}$ , para  $0 \leq t < \bar{t}$ . Assuma que  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = 0$ , para todo  $0 \leq t < \bar{t}$ , ou seja, a saída  $y(t)$  é identicamente nula em  $[0, \bar{t}]$ . Logo, as derivadas de todas as ordens de cada componente  $y_i(t)$  também serão identicamente nulas em  $[0, \bar{t}]$ . Desse modo, concluímos por (13a) que  $z(t)$  e  $v(t)$  serão identicamente nulos em  $[0, \bar{t}]$ . O sistema (13) se reduzirá portanto a

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{\gamma}(0, \eta(t)), \quad (14)$$

com  $\xi(t) = \psi(x(t)) = (z(t), \eta(t))$ ,  $0 \leq t < \bar{t}$ . O sistema dinâmico (14) é denominado de *dinâmica zero*, pois caracteriza a dinâmica interna do sistema malha fechada (5) quando existe a restrição de que  $y(t)$  é identicamente nula em  $[0, \infty)$ .

**Definição 3 (Sistemas de Fase Mínima [3, 7])** *Se  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável da dinâmica zero (14), dizemos que o sistema (2) é de fase mínima. Quando  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio de (14) que não é localmente assintoticamente estável, dizemos que (2) é de fase não-mínima.*

**Observação:**

- O fato de um sistema (2) ser de fase mínima ou não-mínima **independe** da escolha de  $\eta$  na mudança de coordenadas local  $\psi(x) = (z(x), \eta(x))$ .
- Sistemas de fase não-mínima não podem ser estabilizados por leis de controle da forma (7), com  $v(0) = 0$ , que desacoplem e estabilizem o subsistema entrada-saída do sistema não linear.
- Suponha que  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema (14). Relembre que se  $\partial\tilde{\gamma}(0, \eta)/\partial\eta|_{\eta_0=0}$  possui todos os autovalores com parte real negativa (ou, equivalentemente, a linearização da dinâmica zero (14) em  $\eta_0 = 0$  é globalmente assintoticamente estável), então  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável de (14). No entanto, a recíproca não é verdadeira.

◇

Na sequência, mostraremos que a dinâmica zero<sup>10</sup> possui importância fundamental para o problema de estabilização (local) do sistema em malha fechada. Para isto, note que, para cada  $1 \leq i \leq m$ , o subsistema (13a) é um sistema linear controlável da forma

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A_i z^i + B_i v_i, \\ y_i &= C_i z^i, \end{aligned} \tag{15}$$

onde  $z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)^T \in \mathbb{R}^{\rho_i}$  é o estado,  $y_i = z_1^i \in \mathbb{R}$  é a saída, e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

---

<sup>10</sup>Nas seções seguintes, ficará claro que a inexistência da dinâmica zero implicará na solubilidade do problema de linearização exata. Mais ainda, a dinâmica zero está diretamente relacionada aos sistemas implícitos.

Tal sistema linear é essencialmente a conexão em cascata de  $\rho_i$  integradores, em que a entrada  $v_i$  e o estado  $z^i$  são obtidos derivando-se  $\rho_i$  vezes a saída  $y_i^{(0)} = y_i = z_1^i$ , obtendo-se sucessivamente  $y_i^{(1)} = (z_1^i)^{(1)} = z_2^i, \dots, y_i^{(\rho_i-1)} = (z_1^i)^{(\rho_i-1)} = z_n^i$ , até pararmos em  $y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i$ . Mostra-se que este sistema possui  $\rho_i$  pólos em  $s = 0$  (ou, equivalentemente, os autovalores de  $A_i$  são todos nulos com multiplicidade  $\rho_i$ ).

O sistema (15) pode ser estabilizado por uma realimentação de estado

$$v_i = F_i z^i \quad (16)$$

projetada como se segue (ver Cap. 5 da Apostila de Controle Multivariável). Seja  $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$  o conjunto de pólos (estáveis) desejados em malha fechada. Assim,

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$$

é o polinômio característico (Hurwitz) desejado em malha fechada. Escreva

$$\pi_i(s) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i s^k.$$

Prova-se que a realimentação (matriz linha)

$$F_i = [a_0^i \ a_1^i \ \dots \ a_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}$$

fornece<sup>11</sup>

$$\sigma(A_i + B_i F_i) = \Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}.$$

Agrupando todas as realimentações estabilizantes (16), para  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$v = Fz \quad (17)$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_\rho)^T = ((z^1)^T, (z^2)^T, \dots, (z^m)^T)^T \in \mathbb{R}^\rho.$$

É claro que o procedimento descrito acima equivale a escolher

$$y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i = F_i z^i = \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i z_k^i = \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i y_i^{(k)},$$

que por sua vez implica que

$$(z_1^i)^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i (z_1^i)^{(k)} = y_i^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i y_i^{(k)} = 0$$

<sup>11</sup>Aqui,  $\sigma(A)$  denota o conjunto de autovalores da matriz quadrada  $A$ .

é uma equação diferencial linear homogênea com pólos estáveis  $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i$ .

Relembre que, nas coordenadas originais  $x$ ,

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2, \dots, z_\rho) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)) \quad (18) \\ &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)). \end{aligned}$$

O resultado a seguir é uma condição suficiente para a solução do problema de desacoplamento com estabilidade em malha fechada.

**Teorema 5** [3] *Considere as hipóteses do Teorema 4 e que  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ ,  $\eta(x_0) = 0$ . Seja<sup>12</sup>  $(z_0, \eta_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável da dinâmica zero (14) (sistema de fase mínima). Então, a forma normal (13) é desacoplada e  $(z_0, \eta_0) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável de (13) com a realimentação (17). Em particular,  $x_0$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (2) com a realimentação desacoplante (7) seguida da realimentação estabilizante (17)–(18).*

**Observação: (Ausência de Dinâmica Zero)** Quando no teorema acima temos ausência de dinâmica zero, ou seja,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ , então fica claro que  $x_0$  que é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (2) com as realimentações (7) e (17)–(18).  $\diamond$

**Exemplo 10 (Continuação do Exemplo 9 e fim do Exemplo 3):** No Exemplo 9, determinamos que a forma normal em malha fechada do sistema do Exemplo 3 é dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v, \\ \dot{\eta} &= -\eta + z_2 \eta \exp(z_2) - \exp(z_2) v. \end{aligned}$$

Ressaltamos que a mesma está definida em todo  $V = \mathbb{R}^3$ . Temos que a dinâmica zero é

$$\dot{\eta} = -\eta.$$

Como a dinâmica zero é globalmente assintoticamente estável, e  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ ,  $\eta(0) = 0$ , concluímos que a origem  $x = 0 \in V = \mathbb{R}^3$  do sistema original do Exemplo 3 pode ser localmente estabilizada com a realimentação desacoplante  $u$  determinada no Exemplo 9 seguida da realimentação estabilizante (17)–(18).

Exploraremos na próxima seção a ausência de dinâmica zero como condição de solubilidade do problema de linearização exata.

<sup>12</sup>Aqui, como  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ ,  $\eta(x_0) = 0$ , temos que  $(z_0, \eta_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (13) para  $v = 0$ , e  $\eta_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio da dinâmica zero (14).

## 2.4 O Problema de Linearização Exata

Nesta seção, trataremos o problema de linearização exata que foi enunciado de maneira relativamente imprecisa no início deste capítulo (vide Definição 1).

**Problema de Linearização Exata.** Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho<sup>13</sup> do sistema (2a). Dizemos que o *problema de linearização exata é localmente solúvel* em  $x_0$ , se existir uma mudança de coordenadas local  $z = \phi(x)$  e uma realimentação (4) localmente regular, ambas definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , tais que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x)$ , o sistema em malha fechada (5) se expresse localmente em  $\phi(U)$  por um sistema linear (e invariante no tempo) da forma

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (19)$$

onde o par  $(A, B)$  é controlável. Do mesmo modo, seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho, ou seja,  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que o *problema de linearização é localmente solúvel* em  $U_0$ , se existir uma mudança de coordenadas local  $z = \phi(x)$  e uma realimentação (4) localmente regular, ambas definidas em  $U_0$ , tais que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x)$ , o sistema em malha fechada (5) se expresse localmente em  $\phi(U)$  por (19).

**Observação:** Note que

$$\begin{aligned} Az &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{f}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \alpha(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}, \\ B &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{g}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \beta(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

◇

**Teorema 6** *Considere o sistema (2a) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho. Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0$  se e somente se existir uma saída<sup>14</sup>  $y = h = (h_1, \dots, h_m)$  ( $m$  componentes) tal que:*

- *A saída  $y = h(x)$  está definida em uma vizinhança aberta de  $x_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $x_0$ .*
- *A matriz de desacoplamento é não singular em  $x_0$ , ou seja,  $\det A(x_0) \neq 0$ .*

<sup>13</sup>Novamente, aqui,  $x_0$  não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

<sup>14</sup>Aqui,  $y = h(x)$  não precisa ser a saída real de (2a).



- Há ausência de dinâmica zero, ou seja,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .

**Prova:** O fato de que tais condições são suficientes é uma consequência imediata do Teorema 4. De fato, excluindo-se a equação (13b) de (13), obtemos um sistema linear controlável (e invariante no tempo). Para uma prova da necessidade, consulte<sup>15</sup> [3].  $\square$

**Observação:** Considere as hipóteses do teorema anterior. Suponha que o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0 \in V$ . Seja  $y = h(x)$  uma saída que satisfaz as três condições acima. Temos então que a formal normal em malha fechada (13), que é a expressão de (2) nas coordenadas locais  $z = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$  em (11) e com a realimentação de estado estática localmente regular (7), as quais são definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , está na forma canônica de Brunowsky:

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (20)$$

onde  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix},$$

e  $A_i, B_i$  são como em (15), para  $1 \leq i \leq m$ . Desse modo, concluímos que se o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0 \in V$ , então a mudança de coordenadas local  $z = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$  em (11) e a realimentação (7) estão definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , e são tais que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x)$ , o sistema em malha fechada (5) se expressa localmente em  $\phi(U)$  pela forma canônica de Brunowsky (20). Temos que a forma canônica de Brunowsky é linear, controlável e invariante no tempo. Agora, suponha também que  $f(x_0) = 0$ . Relembre que sempre podemos considerar que  $h(x_0) = 0$ . A observação apresentada após o Teorema 5 implica então que  $x_0 \in V$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (2a) com a realimentação desacoplante (7) seguida da realimentação estabilizante (17)–(18). Em outras palavras, a estabilização local de  $x_0$  é sempre possível através de (7) e (17)–(18).  $\diamond$

**Exemplo 11 (Continuação e fim do Exemplo 6):** No Exemplo 6, estudamos o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2,$$

<sup>15</sup>Em [3], há um critério de existência de  $y = h(x)$  através do cálculo dos *colchêtes de Lie* dos campos de vetores  $f, g_1, \dots, g_m$  que definem (2a).

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\ y_2 &= h_2(x) = x_4. \end{aligned}$$

Escolhemos  $x_0 = 0$ . Note que  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , e que posto  $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x)] = 2$ , para todo  $x \in V = \mathbb{R}^5$ . Vimos anteriormente que  $\det A(x_0) \neq 0$ ,  $\rho_1 = 3$ ,  $\rho_2 = 2$ , e que a realimentação desacoplante (7) assegurou que

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1, \\ y_2^{(2)} &= v_2. \end{aligned}$$

Temos que  $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 5$ , ou seja, há ausência de dinâmica zero. Isto implica que

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2, \dots, z_5) = (z^1, z^2) = (z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2) = (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(0)}, y_2^{(1)}) \\ &= (h_1(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), h_2(x), L_f h_2(x)) = \underbrace{(x_1 - x_5, x_2, x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5)}_{\gamma_1(x)}, \underbrace{(x_4, x_5)}_{\gamma_2(x)}, \end{aligned}$$

define uma mudança de coordenadas local em torno de  $x_0$  com

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= (z_1^1)^{(3)} = v_1, \\ y_2^{(2)} &= (z_1^2)^{(2)} = v_2, \end{aligned}$$

ou seja (forma de canônica de Brunowsky),

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v.$$

Além do mais, a realimentação desacoplante  $u$  determinada no Exemplo 6 seguida da realimentação estabilizante (17)–(18)

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = v = Fz = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$$

estabiliza localmente a origem  $x_0 = 0$  do sistema original acima. Ressaltamos que a realimentação resultante

$$\begin{aligned} u &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v \\ &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}Fz = -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \gamma_1(x) \\ F_2 \gamma_2(x) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

está definida apenas em uma vizinhança aberta  $U \subset V = \mathbb{R}^5$  de  $x_0 = 0$ . Equivalentemente, para que a origem  $x_0 = 0$  seja (localmente) estabilizada, basta escolhermos

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1 = F_1 z^1 = \sum_{k=0}^2 a_k^1 z_k^1 = \sum_{k=0}^2 a_k^1 y_1^{(k)}, \quad \text{com } F_1 = [a_0^1 \ a_1^1 \ a_2^1], \\ y_2^{(2)} &= v_2 = F_2 z^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^2 z_k^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^2 y_2^{(k)}, \quad \text{com } F_2 = [a_0^2 \ a_1^2], \end{aligned}$$

de modo que os polinômios

$$\pi_1(s) = s^3 - \sum_{k=0}^2 a_k^1 s^k, \quad \pi_2(s) = s^2 - \sum_{k=0}^1 a_k^2 s^k$$

sejam Hurwitz.

**Teorema 7** *Considere o sistema (2a) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que existe uma saída<sup>16</sup>  $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  ( $m$  componentes) tal que:*

- *A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$ .*
- *A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .*
- *Há ausência de dinâmica zero, ou seja,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .*
- *A aplicação  $z : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$  em (11) é injetiva.*

*Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $U_0$  através da mudança de coordenadas local  $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$  e da realimentação desacoplante (7). Mais precisamente, a mudança de coordenadas  $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$  e a realimentação (7) estão definidas em  $U_0$ , e são tais que, nas novas coordenadas  $z$ , o sistema em malha fechada (5) se expressa localmente em  $z(U_0)$  pela forma canônica de Brunowsky (20).*

**Prova:** Este resultado é uma consequência do Lema 1, da observação que segue o Teorema da Função Inversa (Teorema 3), e da observação após o Teorema 6.  $\square$

## 2.5 Flatness, controlabilidade e linearização exata

Nesta seção, faremos a conexão entre o problema de linearização exata e o conceito de *flatness* (ou *platitude*, que segundo o dicionário Houaiss é a propriedade de ser plano). O conceito de flatness foi cunhado por Fliess e seus coautores em [1] a partir dos resultados que apresentamos neste capítulo sobre linearização exata. Existem várias maneiras equivalentes de enunciar a propriedade de flatness. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [6]. Os livros [8] e [4] apresentam a noção de flatness e suas diversas aplicações em problemas de controle.

<sup>16</sup>Novamente, aqui,  $y = h(x)$  não precisa ser a saída real de (2a).

**Definição 4** Dizemos que um sistema da forma (2a) é plano (ou flat) quando existe um conjunto  $y = (y_1, \dots, y_m)$  de funções de classe  $C^\infty$ , denominada de saída<sup>17</sup> plana (ou saída flat), com as seguintes propriedades:

- Cada  $y_i = h_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , é função apenas<sup>18</sup> do estado  $x$ , e o **número de componentes  $m$  de  $y$  é igual ao número de componentes da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  do sistema.**
- O estado  $x$  pode ser determinado a partir de  $y$  e de um número finito de suas derivadas. Mais especificamente<sup>19</sup>, existe uma aplicação  $\mathcal{A}$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$x = \mathcal{A}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\gamma)}), \quad (21)$$

onde  $y^{(k)} \triangleq (y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)})$ , para  $k \geq 0$ .

- A entrada  $u$  pode ser determinada a partir de  $y$  e de um número finito de suas derivadas. Em outras palavras, existe uma aplicação  $\mathcal{B}$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$u = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)}). \quad (22)$$

Isto significa que

$$x(t) = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))$$

é a trajetória de (2a) quando a aplicamos a entrada

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação arbitrária de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 12:** Temos que o motor CC apresentado na Seção 1.1 é um sistema flat com saída flat  $y = x_1$ , pois o estado deste sistema é determinado por

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, \dot{x}_1) = (y, \dot{y}) = \mathcal{A}(y, \dot{y})$$

e, como  $\ddot{y} = -\dot{y} + u$ , a entrada é dada por

$$u = \ddot{y} + \dot{y} = \mathcal{B}(y, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Note que, neste caso, a saída flat coincide com a saída real do sistema.

<sup>17</sup>Essa não é necessariamente a saída real do sistema (2a).

<sup>18</sup>Para simplificar a exposição, consideraremos que  $y_i$  depende somente do estado  $x$ . Na verdade, o conceito de flatness é muito mais geral, de modo que  $y_i$  pode depender também da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e de suas derivadas até uma certa ordem finita.

<sup>19</sup>Aqui, não estamos sendo precisos porque a definição de flatness é local, e as aplicações  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  acima podem estar definidas apenas localmente, e não globalmente.

**Exemplo 13:** [8] Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u.\end{aligned}$$

Temos que  $y = x_1$  é uma saída flat. De fato,

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 + \sin(x_1) + x_1 = \ddot{y} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = y^{(3)} + \dot{y} \cos(y) + \dot{y}, \\ u &= \dot{x}_4 - x_1 + x_3 = y^{(4)} + \ddot{y} \cos(y) - (\dot{y})^2 \sin(y) + 2\ddot{y} + \sin(y).\end{aligned}$$

Relembre que na introdução deste capítulo foi tratado o problema de rastreamento de um motor CC. Na próxima seção, iremos generalizar a solução apresentada para sistemas linearizáveis e verificaremos que a noção de flatness está diretamente relacionada com o problema de rastreamento. Na sequência, veremos que o conceito de flatness permite também solucionar de maneira simples e direta o problema de controlabilidade de um sistema não linear. De fato, imagine que desejamos levar o estado  $x(t)$  do sistema (2a) de uma condição inicial  $x(0) = x_0$  em  $t = 0$  até uma condição final desejada  $x(T) = x_T$  em  $t = T > 0$ . Para isto, devemos encontrar uma entrada adequada  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tal problema de controle é denominado de *planejamento de trajetórias*. Quando  $y = h(x)$  é uma saída flat de (2a), a solução do problema de planejamento de trajetórias recai na construção de uma aplicação  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  que obedeça as seguintes restrições determinadas por (21):

$$(A) \quad x_0 = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))\big|_{t=0},$$

$$(B) \quad x_T = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))\big|_{t=T}.$$

**Teorema 8** *Assuma que o sistema (2a) é flat. A aplicação da entrada dada por (22)*

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad \text{para } t \in [0, T],$$

*onde  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  que obedece as restrições (A) e (B) anteriores<sup>20</sup>, leva o sistema de  $x_0$  em  $t = 0$  até  $x_T$  em  $t = T$ . Em particular, se um sistema é flat, ele possui garantidamente uma propriedade de controlabilidade<sup>21</sup>.*

<sup>20</sup>Sempre podemos construir uma aplicação  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  que satisfaz tais restrições por interpolação polinomial. Para maiores detalhes, veja [4, pp. 182–184].

<sup>21</sup>Para definições e resultados de controlabilidade para sistemas não-lineares, veja [5] e [4].

**Observação:**

- Ressaltamos que apesar de a lei de controle acima resolver o problema de planejamento de trajetórias de maneira trivial, essa é uma solução em *malha-aberta*. Uma estratégia de controle em malha fechada deve ser capaz de corrigir erros de condição inicial, de modelagem, de influência de perturbações, etc.
- O leitor que já fez algum curso de robótica perceberá que a noção de flatness para robôs (que são atuados em todas as juntas) é análoga ao *método do torque calculado*.
- Mostra-se que existem sistemas flat que não são linearizáveis por realimentação estática regular da forma (4). No entanto, prova-se que todo sistema flat é linearizável por uma realimentação dinâmica da forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \alpha(x, z, v) \in \mathbb{R}^k, \\ u &= \beta(x, z, v) \in \mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

onde  $v \in \mathbb{R}^m$  é nova entrada [1], [6]. O problema de mostrar que todo sistema que é linearizável por realimentação dinâmica é flat ainda é um problema aberto na Teoria de Controle.

◇

**Teorema 9** *Considere o sistema (2a) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $x_0 \in V$ . Se o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0$ , então (2a) é flat.*

**Prova:** De acordo com a observação que segue o Teorema 6, temos que a expressão de (2a) nas coordenadas locais (11)

$$z = \phi(x) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \in \mathbb{R}^n \quad (23)$$

e com a realimentação desacoplante (7)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (24)$$

as quais são definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , está na forma canônica de Brunowsky (20) com (15). Em particular,

$$x = \phi^{-1}(z) = \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \quad (25)$$

e

$$v = (y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_m^{(\rho_m)}). \quad (26)$$

Assim,  $x$  pode ser escrito como função de  $y$  e de suas derivadas até uma ordem finita  $\gamma = \max\{\rho_1 - 1, \dots, \rho_m - 1\}$ . E, a partir de (24)–(26), concluímos que

$$u = \alpha(\mathcal{A}(z)) + \beta(\mathcal{A}(z))v = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)})$$

onde  $\delta = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ . □

## 2.6 Mais exemplos de sistemas flat

- Todo sistema linearizável por realimentação estática regular é flat (Teorema 9).
- Um sistema linear é controlável se e somente se é flat (veja [1]).
- Todo robô com  $n$  graus de liberdade e atuação em todas as juntas é flat. De fato, a equação de movimento de um robô de  $n$  graus de liberdade é da forma

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C(q(t), \dot{q}(t)) + K(q(t)) = u(t), \quad (27)$$

onde  $M(q)$  é a matriz de massa  $n \times n$ , que é sempre simétrica e invertível,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos,  $K(q) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade,  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de posições generalizadas,  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de velocidades generalizadas,  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas, e  $M, C, K$  são de classe  $C^\infty$ . A equação (27) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (28a)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (28b)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}, \quad (28c)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}. \quad (28d)$$

Neste caso, fica claro que  $y = q$  é uma saída flat, já que  $x = (q, \dot{q}) = (y, \dot{y})$  e  $u = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = M(y)\ddot{y} + C(y, \dot{y}) + K(y)$  (método do torque calculado) se escrevem em função de  $y, \dot{y}, \ddot{y}$ . É um exercício simples mostrar a partir de (28) que cada componente  $y_i = q_i$  da saída  $y = q = (q_1, \dots, q_n)$  admite grau relativo em todo o espaço de estado  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e que os mesmos são todos iguais a dois, ou seja,  $\rho_1 = \dots = \rho_n = 2$ . Além disso, a matriz de desacoplamento  $A(x)$  é dada por  $A(x) = M^{-1}(q)$ . Em particular, concluímos pelo Teorema 7 que o problema de linearização exata para o robô é *globalmente* solúvel em todo o espaço de estado  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , já que a dimensão do estado  $x = (q, \dot{q})$  é  $2n$ ,  $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$ , posto  $A(x) =$  posto  $g(x) = n$  em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , e a aplicação

$z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dada por  $z(x) = (q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n)$  é injetiva e sobrejetiva (i.e.  $Z(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ). É importante ressaltar que as coordenadas generalizadas  $q$  nem sempre são as coordenadas  $y = h(q)$  do efetuador. Mais adiante, vamos considerar também a cinemática  $y = h(q)$  do efetuador.

## 2.7 O Problema de Rastreamento da Saída

Considere o sistema (2) com saída  $y = h(x)$ . Dado um perfil desejado  $\bar{y}(t)$  para a saída  $y(t)$ , onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , queremos encontrar uma realimentação  $u$  que force  $y(t)$  a rastrear (seguir) a saída desejada  $\bar{y}(t)$  com erro  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  que tenda assintoticamente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Este problema é denominado de *problema de rastreamento* da saída  $\bar{y}(t)$ . Para resolver o problema de rastreamento, vamos projetar uma realimentação  $u$  que garanta que a dinâmica do erro  $e(t)$  seja assintoticamente estável. Note que, se  $y = h(x)$  é uma saída flat, então (21) implica que ao forçarmos  $y(t)$  a rastrear  $\bar{y}(t)$ , o estado  $x(t)$  do sistema fica completamente determinado. Desse modo, para sistemas flat, o problema de rastreamento da saída se confunde com o problema de controlar o seu estado.

### 2.7.1 Rastreamento da saída para sistemas linearizáveis por realimentação estática regular

Na sequência, restringiremos nosso estudo à classe de sistemas (2) que são linearizáveis por realimentação estática regular da forma (4). Considere o sistema (2) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que:

- A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$ .
- A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .
- Há ausência de dinâmica zero, ou seja,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .

Derivando sucessivamente  $e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t)$  com relação ao tempo, obtemos que

$$e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo  $k = \rho_i$  e usando (6), teremos

$$e^{(\rho)} = y^{(\rho)} - \bar{y}^{(\rho)} = a(x) + A(x)u - \bar{y}^{(\rho)},$$

com

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T, \\ \bar{y}^{(\rho)} &= (\bar{y}_1^{(\rho_1)}, \bar{y}_2^{(\rho_2)}, \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m)})^T, \\ e^{(\rho)} &= (e_1^{(\rho_1)}, e_2^{(\rho_2)}, \dots, e_m^{(\rho_m)})^T. \end{aligned}$$



Note que a realimentação localmente regular em  $U_0$

$$u = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v], \quad (29)$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_m)^T \in \mathbb{R}^m$  é a nova entrada, produz em malha fechada a dinâmica linear

$$e^{(\rho)} = v.$$

A lei de controle (29) é portanto uma realimentação linearizante para dinâmica do erro. Podemos então proceder como na Seção 2.3 para construir uma realimentação estabilizante  $v$  para a dinâmica do erro. Defina  $\epsilon_i \in \mathbb{R}^{\rho_i}$  por

$$\epsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(\rho_i-1)})^T, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Então é fácil ver que a dinâmica de  $\epsilon_i$  é governada pela equação linear

$$\dot{\epsilon}_i = A_i \epsilon_i + B_i v_i, \quad (30)$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são como em (15). Desse modo, escolhendo uma lei de controle

$$v_i = F_i \epsilon_i$$

de maneira análoga à descrita na Seção 2.3, estabilizaremos a dinâmica de  $\epsilon_i$ . Logo, a lei de controle estabilizante possui a forma

$$v = F \epsilon, \quad (31)$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}, \quad \epsilon = (\epsilon_1^T, \epsilon_2^T, \dots, \epsilon_m^T)^T.$$

Note que

$$\epsilon = y^{(\rho-1)} - \bar{y}^{(\rho-1)},$$

onde

$$\begin{aligned} y^{(\rho-1)} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)})^T \\ \bar{y}^{(\rho-1)} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}, \dots, \bar{y}_m^{(0)}, \bar{y}_m^{(1)}, \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m-1)})^T. \end{aligned}$$

Assim, a realimentação completa a ser aplicada é

$$u(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)}(t) + F \epsilon(x, t)], \quad (32)$$

onde

$$\epsilon(x, t) = (h_1(x), \dots, L_f^{(\rho_1-1)} h_1(x), \dots, h_m(x), \dots, L_f^{(\rho_m-1)} h_m(x))^T - \bar{y}^{(\rho-1)}(t).$$

Por fim, ressaltamos que as realimentações definidas acima forçam  $y(t)$  a rastrear assintoticamente  $\bar{y}(t)$  desde que o estado  $x(t)$  do sistema em malha fechada permaneça em  $U_0$  para todo  $t \geq 0$  (perceba que a realimentação (29) poderá apresentar singularidades e que  $y_i = h_i(x)$  poderá deixar de ter grau relativo  $\rho_i$  constante se  $x(t)$  sair de  $U_0$ ). As hipóteses que fizemos até agora sobre o sistema (2) não garantem, a princípio, que isto realmente ocorrerá. O próximo resultado, o qual está baseado nos argumentos acima, apresenta condições para a solubilidade do problema de rastreamento de modo que  $x(t) \in U_0, t \geq 0$ .

**Teorema 10** *Considere o sistema (2) com saída  $y = h(x)$  e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que a saída  $y = h(x)$  satisfaz as condições do Teorema 7, ou seja:*

- *A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$ .*
- *A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .*
- *Há ausência de dinâmica zero, ou seja,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .*
- *A aplicação  $z : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$  em (11) é injetiva.*

*Aplique a realimentação (32). Considere o conjunto aberto  $Z = z(U_0) \subset \mathbb{R}^n$  e defina*

$$z_0 = (y_1^{(0)}(t), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, y_m^{(0)}(t), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(t)) \Big|_{t=0}.$$

*Assuma que  $\bar{y}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma saída desejada de classe  $C^\infty$  tal que*

$$\bar{z}(t) = (\bar{y}_1^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m-1)}(t)) \in Z, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (33)$$

*Seja*

$$\epsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$$

*o erro inicial de rastreamento, onde  $\bar{z}_0 = \bar{z}(0)$ , e considere que existe  $H > 0$  tal que*

$$\text{dist}(\bar{z}(t), \partial Z) \triangleq \inf_{p \in \partial Z} \|\bar{z}(t) - p\| > H, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

*onde  $\partial Z$  denota a fronteira de  $Z$ .*

*Então, existe  $\delta > 0$  tal que, se*

$$\text{dist}(\epsilon_0, \partial Z) > \delta,$$

*então o estado  $x(t)$  do sistema em malha fechada satisfaz  $x(t) \in U_0$  para todo  $t \geq 0$  e, ainda,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i.$$

*Em particular, para  $\bar{x}(t) = z^{-1}(\bar{z}(t))$ , temos que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \bar{x}(t)] = 0.$$

**Prova:** Faremos apenas um esboço da prova. Primeiramente, dado um sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(t) &= E\epsilon(t), \\ \epsilon(0) &= \epsilon_0\end{aligned}$$

(globalmente) assintoticamente estável, existe  $K > 0$  e  $\mu > 0$  tais que, para qualquer  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\|\epsilon(t)\| \leq Ke^{-\mu t}\|\epsilon_0\|, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Tome  $\delta = H/K$ . Não é difícil de mostrar que as propriedades acima são satisfeitas para este  $\delta > 0$  e que não há possibilidade de

$$z(t) = (y_1^{(0)}(t), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, y_m^{(0)}(t), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(t)), \quad t \geq 0,$$

sair de  $Z$ . Logo, a trajetória  $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$  do sistema em malha fechada permanece em  $U_0$  para todo  $t \geq 0$ , onde  $z = \phi(x)$  é a mudança de coordenadas  $z : U_0 \rightarrow Z(U_0) = Z$  definida por (11). □

**Observação:** Quando  $Z = U_0 = V = \mathbb{R}^n$ , temos convergência global, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i,$$

independentemente do erro inicial de rastreamento  $\epsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$ . Além disso, em muitos casos práticos, não conheceremos  $Z$ ,  $\partial Z$ ,  $\delta$ . Em tais situações, devemos verificar por simulação computacional o quão grande poderá ser o erro inicial de rastreamento para que a convergência assintótica do erro de rastreamento para zero seja assegurada. Observe que se  $\epsilon_0 = 0$ , ou seja,  $z_0 = \bar{z}_0$ , então  $y(t) = \bar{y}(t)$ , para todo  $t \geq 0$ . Na prática, no entanto, teremos  $\epsilon_0 \neq 0$ . ◇

**Exemplo 14:** Voltando ao exemplo do robô com atuação em todas as juntas, tínhamos mostrado que o modelo do robô é

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

onde

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\ f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assuma que a cinemática direta do robô é dada por

$$y(t) = h(q(t)),$$

onde  $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetiva e com Jacobiano  $\Gamma(q) = \partial h / \partial q|_q$  invertível para todo  $q$  pertencente a um conjunto aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  (onde não existem singularidades da cinemática direta). Neste caso, pela regra da cadeia,

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = \Gamma(q) \dot{q}.$$

Vemos assim que a primeira derivada de todas as saídas  $y_i = h_i(x)$  é função apenas do estado  $x$  e não é influenciada pela entrada  $u$ . Derivando outra vez, obtemos

$$y^{(2)} = \Gamma^{(1)}(q) \dot{q} + \Gamma(q) \ddot{q}.$$

Note que a componente  $ij$  da matriz  $\Gamma(q)$  é dada por

$$\Gamma_{ij}(q) = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q)$$

e, portanto, a componente  $ij$  de  $\Gamma^{(1)}(q)$  será

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k.$$

Logo, a  $i$ -ésima componente do vetor coluna  $\Gamma^{(1)}(q) \dot{q}$  é

$$\{\Gamma^{(1)}(q) \dot{q}\}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j.$$

A matriz Hessiana  $H_i$  da aplicação  $h_i$  é definida elemento a elemento por

$$\{H_i(q)\}_{kj} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}(q).$$

Temos então que

$$\{\Gamma^{(1)}(q) \dot{q}\}_i = \sum_{i=1}^n \dot{q}^T H_i(q) \dot{q}.$$

Como  $H_i$  depende apenas de  $q$ , segue-se que

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u,$$

onde

$$a(x) = \Gamma^{(1)}(q) \dot{q} - \Gamma(q) M^{-1}(q) [C(q, \dot{q}) + K(q)], \quad A(x) = \Gamma(q) M^{-1}(q).$$

Mas,  $\det A(x) = (\det \Gamma(q)) (\det M^{-1}(q)) \neq 0$ , para  $x = (q, \dot{q}) \in W \times \mathbb{R}^n$ . Assim, concluímos que:

- Cada saída  $y_i = h_i(x)$  admite grau relativo  $W \times \mathbb{R}^n$  com  $\rho_i = 2$ .

- A matriz de desacoplamento é invertível em  $W \times \mathbb{R}^n$  (o espaço de estados é  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ).
- A dinâmica zero está ausente, pois  $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$ .
- A aplicação  $z : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em (11) é injetiva, já que é dada por  $z(q, \dot{q}) = (y^{(0)}, y^{(1)}) = (h(q), \Gamma(q)\dot{q})$ .

Portanto, a realimentação localmente regular em  $W \times \mathbb{R}^n$

$$u = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(2)} + v] \quad (34)$$

lineariza a dinâmica do erro da seguinte maneira

$$e^{(2)} = v,$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o perfil de saída desejado.

Agora, seja  $\epsilon_i \in \mathbb{R}^2$  definido por

$$\epsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)})^T, \quad 1 \leq i \leq n.$$

A dinâmica de  $\epsilon_i$  é governada pela equação linear

$$\dot{\epsilon}_i = A_i \epsilon_i + B_i v_i, \quad (35)$$

onde

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Devemos então determinar uma lei de controle estabilizante

$$v_i = F_i \epsilon_i.$$

Para isto, tomamos dois pólos estáveis de malha fechada  $\lambda_i^1, \lambda_i^2$ , calculamos  $\pi_i(s) = (s - \lambda_i^1)(s - \lambda_i^2) = s^2 - (a_1^i s + a_0^i)$ , e escolhemos

$$F_i = [a_0^i, a_1^i].$$

Logo, a lei de controle estabilizante  $v$  possui a forma

$$v = F \epsilon,$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}, \quad \epsilon = (\epsilon_1^T, \epsilon_2^T, \dots, \epsilon_n^T)^T.$$

Note que

$$\epsilon = (e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(0)}, e_n^{(1)})^T = y^{(1)} - \bar{y}^{(1)},$$

onde

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(0)}, y_n^{(1)})^T, \\ \bar{y}^{(1)} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}, \bar{y}_n^{(1)})^T. \end{aligned}$$

### 2.7.2 Rastreamento da saída para sistemas flat

Quando a saída  $y = h(x)$  do sistema (2) é flat, o problema de rastreamento da saída pode muitas vezes ser solucionado de maneira relativamente simples e direta. Isto é ilustrado no exemplo abaixo.

**Exemplo 15:** [8] No Exemplo 13, mostramos que  $y = x_1$  é uma saída flat para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u,\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ x_3 &= \ddot{y} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= y^{(3)} + \sin(y)\dot{y} + \dot{y}, \\ u &= y^{(4)} + \ddot{y} \cos(y) - (\dot{y})^2 \sin(y) + 2\ddot{y} + \sin(y).\end{aligned}$$

Para resolvermos o problema de rastreamento, basta encontrarmos uma realimentação regular  $u = \alpha(x) + \beta(x)w$ , onde  $w \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, que linearize a dinâmica de  $y$ . A ideia é fazer com que

$$y^{(4)} = w$$

(note que  $y^{(4)}$  é a maior derivada de  $y$  que aparece na expressão de  $u$  acima). É fácil ver que

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \ddot{y} \cos(y) - (\dot{y})^2 \sin(y) + 2\ddot{y} + \sin(y) \\ &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1), \\ \beta(x) &= 1,\end{aligned}$$

atinge o desejado, ou seja, assegura que  $y^{(4)} = w$ . Escolhendo então

$$w = v + \bar{y}^{(4)},$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é o perfil desejado para a saída, obtemos que a dinâmica do erro  $e = y - \bar{y}$  é linear e dada por

$$e^{(4)} = v.$$

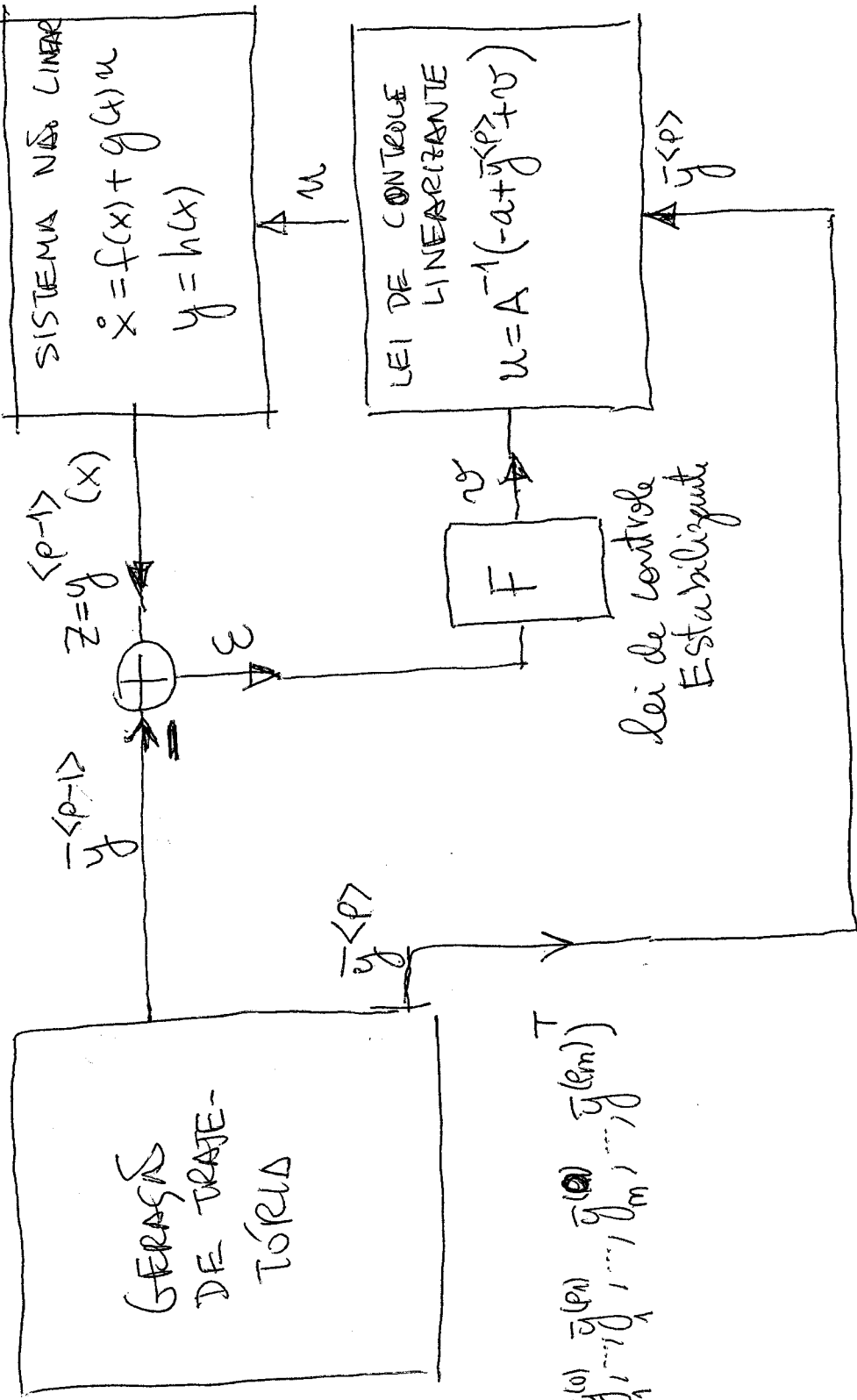
Para resolvermos o problema de rastreamento, tudo o que nos resta fazer é definir uma realimentação estabilizante  $v$  como na subseção anterior.

## Referências

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5):922–937, 1999.
- [2] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1995.
- [4] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [5] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [6] P. S. Pereira da Silva, H. B. Silveira, C. Corrêa Filho, and S. Batista. An infinite dimensional differential-geometric approach for nonlinear systems: Part II – Systems theory. Disponível em [www.lac.usp.br/~paulo](http://www.lac.usp.br/~paulo).
- [7] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [8] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York, 2004.

$$z = \begin{bmatrix} y^{(p-1)} \\ y^{(p-2)} \\ \dots \\ y^{(1)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} \quad y^{(p-1)} = (y_1^{(p-1)}, \dots, y_m^{(p-1)})^T$$

$$\bar{y}^{(p-1)} = (y_1^{(p-1)}, \dots, y_m^{(p-1)})^T$$



$$\bar{y}^{(p)} = (y_1^{(p)}, \dots, y_m^{(p)})^T$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & F_2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & F_M \end{pmatrix} / \quad v = F e$$

$$v_i = F_i e_i$$