

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC

Departamento de Automação e Sistemas – DAS

Prof. Hector Bessa Silveira

E-mail: hector.silveira@ufsc.br

Website: <http://hector.paginas.ufsc.br>

DAS 5131 – Controle Multivariável

Sumário

	Sumário	1
1	SIMULAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO-LINEARES (LAB 1)	5
1.1	Conceitos Fundamentais	5
1.1.1	Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares	6
1.1.2	Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo	7
1.2	Modelo em Espaço de Estado	7
1.3	Modelagem de Sistemas Dinâmicos	9
1.4	Simulação Numérica de Sistemas Dinâmicos	12
1.5	Procedimentos	13
2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO'S)	14
3	ANÁLISE QUALITATIVA DE SISTEMAS LINEARES NO PLANO (LAB 2)	24
3.1	Ponto de Equilíbrio	24
3.2	Pontos de Equilíbrio de Sistemas Lineares no Plano	25
3.3	Revisão de Álgebra Linear	25
3.4	Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano	26
3.5	Procedimentos	34
4	ANÁLISE QUALITATIVA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES NO PLANO (LAB 3)	36
4.1	Estabilidade Estrutural	36
4.2	Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio	37
4.3	Procedimentos	40
5	SISTEMAS LINEARES	42
5.1	Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência	44
5.2	Estabilidade	48
5.3	Controlabilidade e Observabilidade	50
5.4	Estabilização por Realimentação de Estado	54
5.5	Estimador de Estado	58
5.6	Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados	61

5.7	Determinação das Matrizes de Ganho K e L para Imposição de Polos	66
5.8	Projeto: Estabilização de um Pêndulo Invertido com Base na Configuração Controlador-Observador (Lab 4)	76
5.8.1	Modelo Linear Simplificado de um Pêndulo Invertido	76
5.8.2	Procedimentos	77
5.9	Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares (Lab 5)	78
5.9.1	Definição do Problema de Controle	78
5.9.2	Modelo Interno	79
5.9.3	Sistema Aumentado	81
5.9.4	Estrutura de Controle	82
5.9.5	Exemplo	85
5.9.6	Procedimentos	87
5.10	Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares com Observador de Estado (Lab 6)	89
5.10.1	Estrutura de Controle com Observador de Estado	89
5.10.2	Procedimentos	97
5.11	Decomposição Canônica	98
5.12	Realização de Matrizes de Transferência	110
5.13	Implementação Digital	115
6	CONTROLE LINEAR DE SISTEMAS NÃO-LINEARES	117
6.1	Estabilidade de Lyapunov	117
6.2	Ponto de Equilíbrio	119
6.3	Sistema Linearizado	120
6.4	Estabilização via Sistema Linearizado	121
6.5	Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado (Lab 7)	130
6.5.1	Definição do Problema de Controle	131
6.5.2	Estrutura de Controle	131
6.5.3	Procedimentos	137
6.6	Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares com Observador de Estado Linear: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado (Lab 8)	139
6.6.1	Estrutura de Controle com Observador de Estado	139
6.6.2	Procedimentos	147
7	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE RASTREAMENTO DE SAÍDA (LAB 9)	150

7.1	Rastreamento de Saída de um Motor CC	150
7.2	Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída	150
7.3	Procedimentos	152
8	CONTROLE NÃO-LINEAR	154
8.1	Motivação	154
8.2	Desacoplamento e Rastreamento de Saída	157
8.2.1	O Problema de Desacoplamento	158
8.2.2	O Problema de Rastreamento de Saída	168
8.3	Flatness	176
8.4	O Problema de Linearização Exata	181
8.4.1	Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização	185
8.4.2	Linearização Exata e Flatness	198
9	MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV	200
10	CONTROLE ÓTIMO: REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR – LQR (LAB 10)	210
10.1	Formas Quadráticas	210
10.2	Regulador Quadrático Linear	213
10.3	Procedimentos	219
11	ESTIMAÇÃO ÓTIMA E PRINCÍPIO DA SEPARAÇÃO ESTOCÁSTICA: FILTRO DE KALMAN E CONTROLADOR GAUSSIANO QUADRÁTICO LINEAR (LQG) (LAB 11)	220
11.1	Processos Estocásticos	220
11.2	Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente	223
11.3	Princípio da Separação Estocástica	228
11.4	Procedimentos	230
12	CONTROLE LINEAR EM TEMPO DISCRETO (LAB 12)	231
12.1	Sistema Discreto Equivalente	231
12.2	Sistemas Lineares em Tempo Discreto	233
12.3	Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto	237
12.4	Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo	240
12.5	Filtro de Kalman	242
12.6	Sistema Discreto Equivalente de Sistemas Lineares com Ruído	248
12.7	Filtro de Kalman Estendido	251
12.8	Procedimentos	255

13	INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS QUÂNTICOS (LAB 13)	257
13.1	Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n	257
13.2	Postulados da Mecânica Quântica	258
13.3	Partículas de Spin-1/2	259
13.4	Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos	260
13.5	Para Saber Mais	263
	Referências	264

1 Simulação de Sistemas Lineares e Não-Lineares (Lab 1)

Objetivos: Primeiramente, vamos apresentar certos conceitos fundamentais sobre sistemas: sistemas dinâmicos, variáveis de estados, linearidade, invariância no tempo e modelo em espaço de estado. Na sequência, veremos exemplos de como modelar, simular, e analisar sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.

1.1 Conceitos Fundamentais

Sistema: é uma entidade em que as variáveis de saída são alterados pelas variáveis de entrada (controles). Ex: motores elétricos, veículos, aeronaves, ecossistemas

Sistema dinâmico (ou com memória): quando ao menos uma das variáveis de saída do sistema no instante t **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro de certas variáveis de entrada.

Sistemas dinâmicos SISO, SIMO e MIMO: vamos considerar sistemas dinâmicos que apresentam m variáveis de entrada $u_1(t), \dots, u_m(t)$ e p variáveis de saída $y_1(t), \dots, y_p(t)$. Quando $m = p = 1$, dizemos que o sistema é **SISO** (Single-Input Single-Output). Quando $m = 1$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **SIMO** (Single-Input Multi-Output). Quando $m \geq 2$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **MIMO** (Multi-Input Multi-Output). Denominamos $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ de **vetor de entrada** (ou **vetor de controle**) e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ de **vetor de saída**.

Vetor de estado de um sistema dinâmico: o **vetor de estado** $x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ (ou, simplesmente, **estado**) de um sistema dinâmico no instante de tempo $t_0 \geq 0$ é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento do vetor de entrada $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$ (futuro), determina um **único** vetor de saída $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro das saídas, não importa a maneira como o sistema atingiu o vetor de estado $x(t_0)$, ou seja, $x(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0), \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0.$$

Dizemos que $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ é o **estado inicial** (ou a **condição inicial**) do sistema no **instante inicial** $t_0 \geq 0$. Denominamos $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de **variáveis de estado** do sistema, e dizemos que o sistema é de **ordem** n ($n = 1$ é primeira ordem, $n = 2$ é segunda ordem, etc).

Em muitos sistemas dinâmicos, escolhamos as **variáveis de estado** como sinais que correspondem aos **elementos armazenadores de energia** no sistema. Por exemplo, em **circuitos elétricos**, as **variáveis de estado** são: as **tensões nos capacitores** (energia armazenada no campo elétrico) e as **correntes dos indutores** (energia armazenada no campo magnético).

De agora em diante, todos os sistemas que trataremos serão dinâmicos e **causais**, ou seja, as variáveis de saída do sistema no instante t **não dependem** de valores **futuros** das variáveis de entrada. Desse modo, para simplificar, quando dizemos **sistema**, estaremos sempre nos referindo a um **sistema dinâmico causal**. Além disso, salvo menção contrária, vamos sempre assumir que as variáveis de entrada são funções **contínuas por partes** em relação ao tempo t .

1.1.1 Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

• **Linear**: quando o sistema satisfaz ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} x_a(t_0), \\ u_a(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_a(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} x_b(t_0), \\ u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_b(t), t \geq t_0,$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} x_c(t_0) = k_1 x_a(t_0) + k_2 x_b(t_0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq t_0.$$

Ao tomarmos $k_1 = k_2 = 0$ na condição acima, concluímos que todo sistema linear satisfaz:

$$\boxed{x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0}.$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0$.

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando $u(t) = 0, t \geq t_0$:

$$\boxed{x(t_0), u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y_0(t), t \geq t_0}.$$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando $x(t_0) = 0$:

$$\boxed{x(t_0) = 0, u(t), t \geq t_0 \} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0}.$$

Concluímos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um **sistema linear** é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\boxed{\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}}$$

Propriedade de Decomposição

• **Não-Linear**: quando o sistema não é linear

Importante! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $u(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois o princípio da separação não é satisfeito. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico “Linearização de Sistemas Não-Lineares”.

1.1.2 Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

- **Invariante no tempo:** quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = v_0, \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0,$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}(t_0 + T) = v_0, \\ \bar{u}(t) = u(t - T), t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \geq t_0 + T.$$

Ilustração: (no quadro)

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

1.2 Modelo em Espaço de Estado

Modelo em espaço de estado: é a modelagem matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e as entradas do sistema dinâmico por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado), e que determina as relações entre as saídas, as variáveis de estado e as entradas por equações algébricas (uma para cada saída).

Por exemplo, se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))' \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))' \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, então o modelo em espaço de estado do sistema dinâmico é dado por:

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ &\vdots \\ dx_n(t)/dt &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ y_1(t) &= h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u(t), t), \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t), \end{aligned}$$

onde $f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t), h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t) \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= (f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t))' \in \mathbb{R}^n, \\ h(x, u, t) &= (h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t))' \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Veremos mais adiante que:

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

é **linear e invariante no tempo**, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz $n \times m$), $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz $p \times n$) e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz $p \times m$) são **matrizes constantes**.

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t)), \end{aligned}$$

é **invariante no tempo**, onde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são aplicações continuamente diferenciáveis.

1.3 Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exemplo 1: Sistema elétrico (circuito elétrico)

Considere o circuito elétrico abaixo:

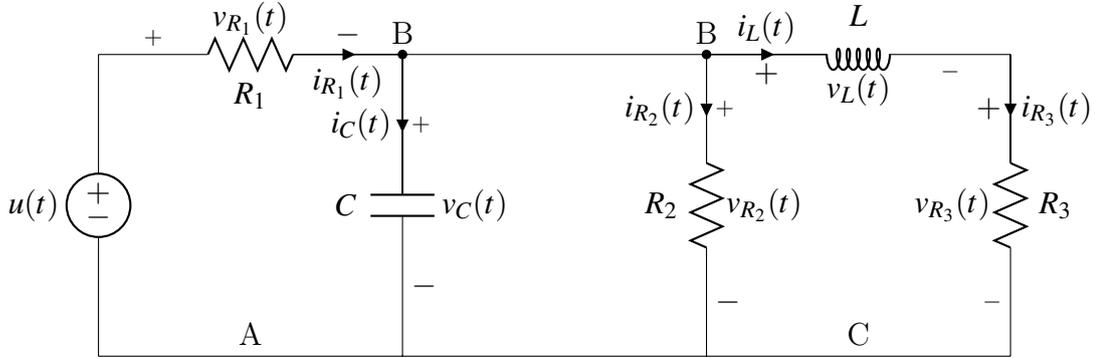


Figura 1 – Circuito elétrico, com $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$.

Assumimos que a entrada é a fonte de tensão $u(t)$, e que as variáveis de saída são $y_1(t) = v_C(t)$ e $y_2(t) = i_L(t)$. Relembre que:

$$\begin{cases} i_C(t) = Cdv_C(t)/dt, \\ v_L(t) = Ldi_L(t)/dt. \end{cases}$$

Escolhemos então como variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_C(t), \\ x_2(t) = i_L(t). \end{cases}$$

- LKT_A (Lei de Kirchhoff das Tensões na malha A):

$$-u(t) + v_{R_1}(t) + v_C(t) = 0 \quad \rightarrow \quad u(t) = v_{R_1}(t) + v_C(t) \quad \rightarrow \quad u(t) = \underbrace{R_1}_{=1} i_{R_1}(t) + x_1(t)$$

$$\therefore \boxed{u(t) = i_{R_1}(t) + x_1(t)} \quad (1.1)$$

- LKC_B (Lei de Kirchhoff das Correntes no nó B):

$$i_{R_1}(t) = \underbrace{=C\dot{v}_C(t)=\dot{x}_1}_{i_C(t)} + \underbrace{=v_{R_2}(t)/R=x_1(t)/2}_{i_{R_2}(t)} + \underbrace{=x_2(t)}_{i_L(t)} \quad \rightarrow \quad i_{R_1}(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{x_1(t)}{2} + x_2(t)$$

$$\xrightarrow{(1.1)} \quad u(t) = i_{R_1}(t) + x_1(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{x_1(t)}{2} + x_2(t) + x_1(t) \quad \therefore \quad \boxed{\dot{x}_1(t) = -1.5x_1(t) - x_2(t) + u(t)}$$

$$(1.2)$$

- LKT_C (Lei de Kirchhoff das Tensões na malha C):

$$- \underbrace{v_{R_2}(t)}_{=v_C(t)=x_1(t)} + v_L(t) + v_{R_3}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -x_1(t) + Ldi_L(t)/dt + R_3i_L(t)$$

$$\rightarrow \quad -x_1(t) + 2\dot{x}_2(t) + 5x_2(t) = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{x}_2(t) = 0.5x_1(t) - 2.5x_2(t)} \quad (1.3)$$

Assim, o modelo em espaço de estado do circuito é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -1.5x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0.5x_1(t) - 2.5x_2(t), \\ y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_2(t), \end{cases}$$

ou, em forma matricial,

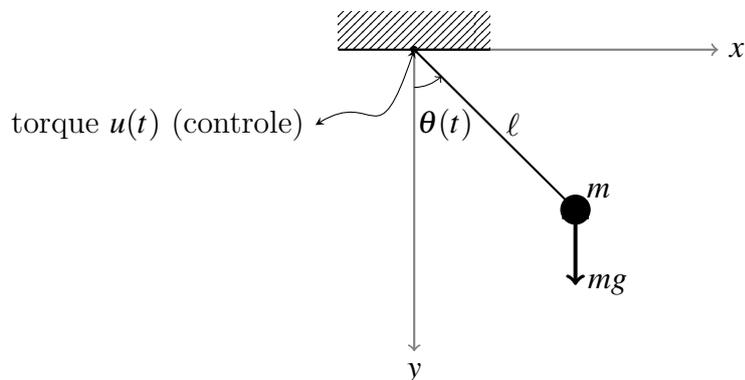
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(sistema linear invariante no tempo de ordem $n = 2$), onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} -1.5 & -1 \\ 0.5 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2: Sistema mecânico (pêndulo simples)

Considere o pêndulo simples ilustrado abaixo:



Com base na segunda lei de Newton, encontramos que (equação diferencial de segunda ordem)

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - k\ell\dot{\theta} + \frac{1}{\ell}u, \quad (1.4)$$

onde $k > 0$ é o coeficiente de atrito do ar (relembre que Torque = Força \times ℓ). Suponha que

$$y = \theta.$$

Escolhendo

$$\begin{cases} x_1 = \theta, \\ x_2 = \dot{\theta}, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2, \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \text{sen} x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$y = \theta = x_1. \quad (1.6)$$

Fixado um controle $u(t)$, $t \geq t_0$, é fácil ver que $(x_1(t), x_2(t)) = (\theta(t), \dot{\theta}(t))$ é solução (1.5) com condição inicial $(x_1(0), x_2(0)) = (\theta(0), \dot{\theta}(0))$ se e somente se $\theta(t) = x_1(t)$ é solução de (1.4) com condições iniciais $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, para $t \geq t_0$. Logo, (1.4) e (1.5) possuem as mesmas soluções! Portanto, o modelo em espaço de estado do pêndulo simples é dado por (sistema invariante no tempo de ordem $n = 2$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \text{sen} x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y = x_1 = h(x_1, x_2, u). \end{cases}$$

Note que a ordem de (1.4) é preservada!

Exemplo 3: Sistema MIMO com 2 entradas e 2 saídas (manipulador robótico)

Considere o robô de dois graus de liberdade ilustrado abaixo.

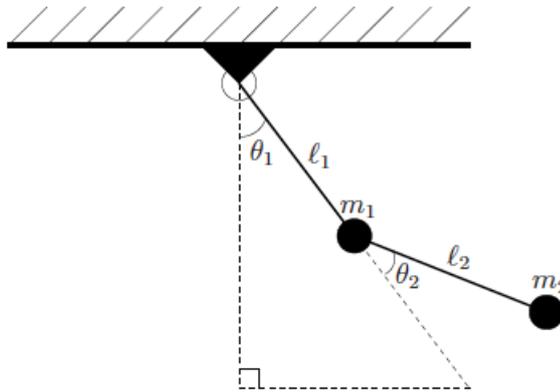


Figura 2 – Robô de 2 graus de liberdade.

Os dois discos escuros representam massas unitárias ($m_1 = m_2 = 1$) ligadas por braços de comprimento unitário ($\ell_1 = \ell_2 = 1$). Podemos aplicar torques de controle τ_1 e τ_2 através de motores elétricos presentes nas juntas de modo a controlar os graus de liberdade correspondentes θ_1 e θ_2 . O modelo associado a este robô é

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + K(\theta) = \tau,$$

onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)' \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de deslocamentos angulares, $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)' \in \mathbb{R}^2$ o vetor de velocidades angulares, $\tau = (\tau_1, \tau_2)' \in \mathbb{R}^2$ o vetor dos torques aplicados pelos motores, e

as matrizes M , K e C são dadas por:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos \theta_2 & 1 + \cos \theta_2 \\ 1 + \cos \theta_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \operatorname{sen} \theta_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen} \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} 2g \operatorname{sen} \theta_1 + g \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ g \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix},$$

onde g é a aceleração da gravidade. Assumimos que as saídas são:

$$y_1 = \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2),$$

$$y_2 = \operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2).$$

Note que $X = y_2$ e $Y = y_1$ são as coordenadas cartesianas (X, Y) do manipulador (massa m_2). Seja $x = (\theta', \dot{\theta}') = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)' \in \mathbb{R}^4$ o vetor de estado, $u = (u_1, u_2)' = \tau = (\tau_1, \tau_2)' \in \mathbb{R}^2$ o vetor de controle, e $y = (y_1, y_2)' \in \mathbb{R}^2$ o vetor de saída. Assim, o modelo em espaço de estado do robô é dado por (sistema MIMO de ordem $n = 4$ com 2 entradas e 2 saídas):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -M(x_1, x_2)^{-1} [C(x) + K(x_1, x_2)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M(\theta)^{-1} \end{pmatrix} u = f(x, u),$$

$$y_1 = \cos x_1 + \cos(x_1 + x_2) = h_1(x_1, x_2),$$

$$y_2 = \operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen}(x_1 + x_2) = h_2(x_1, x_2).$$

1.4 Simulação Numérica de Sistemas Dinâmicos

Considere um sistema dinâmico (invariante no tempo) modelado por

$$dx/dt = f(x, u), \quad (1.7)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle. Escolha uma entrada $u(t)$, $t \geq 0$, e seja $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ a condição inicial em $t_0 = 0$. Vamos lembrar agora como simular numericamente o sistema, ou seja, integrar numericamente (1.7) de modo a determinarmos uma aproximação da solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$. Escolha um passo de integração $T \cong 0$. Considerando o método de Euler, temos então que:

$$\frac{x(kT + T) - x(kT)}{T} \cong \dot{x}(kT) = f(x(kT), u(kT)) \Rightarrow x((k+1)T) \cong T f(x(kT), u(kT)) + x(kT)$$

Logo, para determinarmos uma aproximação numérica de $x(t)$, $t \geq 0$, encontramos

$$\begin{aligned}x(T) &= Tf(x(0), u(0)) + x(0), \\x(2T) &= Tf(x(T), u(T)) + x(T), \\x(3T) &= Tf(x(2T), u(2T)) + x(2T), \\&\vdots \\x((k+1)T) &= Tf(x(kT), u(kT)) + x(kT),\end{aligned}$$

e então realizamos uma interpolação linear entre $x(kT)$ e $x((k+1)T)$ para obtermos $x(t)$ para $kT < t < (k+1)T$.

1.5 Procedimentos

1. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema elétrico do Exemplo 1. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações. Dica: verifique o princípio da superposição com $u(t) = 0$, $u(t) = 1$ e $u(t) = \text{sen}(t)$.
2. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema mecânico do Exemplo 2. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações com $\ell = 1$, $g = 9.8$, e $k = 0.5$, $k = 0$. Dica: teste o princípio da superposição para $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e com $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi$.
3. No item anterior, justifique o comportamento observado (solução constante) com $\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$ quando $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Existe mais alguma outra solução constante? Justifique sua resposta.

2 Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Relembre do Lab 1 que o modelo em espaço de estado (ou, simplesmente, **modelo de estado**) de um sistema dinâmico tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u, t), \\ y(t) &= h(x(t), u, t), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada (controle), $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, e $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h = (h_1, \dots, h_p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ são aplicações (vetoriais). A primeira equação do modelo de estado acima é denominada de **equação de estado** e, a segunda, de **equação de saída**.

Definição: A **bola aberta** centrada em $x \in \mathbb{R}^n$ e de raio (finito) $\delta > 0$ é o subconjunto de \mathbb{R}^n definido por

$$B(x, \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \delta\},$$

onde $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$ é a **norma euclidiana** do vetor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** (em \mathbb{R}^n) se, para todo $x \in D$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset D$.

Exemplos:

1. A reta real \mathbb{R} é um conjunto aberto em \mathbb{R} ;
2. Todo intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto em \mathbb{R} ;
3. O conjunto $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ é aberto em \mathbb{R}^2 .

Propriedade: Os seguintes conjuntos são abertos em \mathbb{R}^n :

1. O próprio \mathbb{R}^n e o conjunto vazio ϕ ;
2. Toda bola aberta $B(x, \delta)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$;
3. A união **arbitrária** de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n ;
4. A intersecção **finita** de conjuntos abertos em \mathbb{R}^n .

Em várias situações práticas, a aplicação f que determina a equação de estado $dx(t)/dt = f(x, u, t)$ não pode ser definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $f(x, u, t) = t^2 u + 1/x \in \mathbb{R}$ ($n = 1$), então f só está definida para $x \neq 0$. Logo, o domínio de f é $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ é aberto. Note que D é de fato aberto, pois $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (união de dois abertos).

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos supor que, no modelo de estado, f e h não dependem do tempo t :

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u), \\ y(t) &= h(x(t), u), \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Exemplo (Motor CC): Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u, \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assim, $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado e

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u) = (x_2(t), -x_2(t) + u), \\ y(t) &= h(x(t), u) = x_1(t). \end{aligned}$$

O motor CC pode ser controlado tanto em malha-aberta quanto em malha-fechada. Por exemplo, podemos escolher:

- Malha-aberta: $u = \alpha(t) \triangleq \text{sen}(t)$;
- Malha-fechada (realimentação): $u = \alpha(x, t) \triangleq \overbrace{k(r(t) - x_1)}^{\text{controlador } P}$, onde $r(t) = t$ (rampa) e $k > 0$ é um ganho a ser ajustado.

Substituindo os controles acima no modelo do motor, obtemos:

- Malha-aberta:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = (x_2(t), -x_2(t) + \text{sen}(t)) \triangleq \bar{f}(x(t), t), \\ y(t) &= h(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = x_1(t) \triangleq \bar{h}(x(t), t). \end{aligned}$$

- Malha-fechada:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = (x_2(t), -x_2(t) + kt - kx_1(t)) \triangleq \hat{f}(x(t), t), \\ y(t) &= h(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = x_1(t) \triangleq \hat{h}(x(t), t). \end{aligned}$$

Note que, em ambos os casos (malha-aberta e malha-fechada), o modelo de estado resultante é da forma:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= \tilde{f}(x(t), t), \\ y(t) &= \tilde{h}(x(t), t). \end{aligned}$$

Considere o seguinte modelo de estado

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \\ y &= h(x, u), \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(x, t)$, onde $\alpha: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação (vetorial). Assim, o sistema resultante é da forma:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, \alpha(x, t)) \triangleq \hat{f}(x, t), \\ y &= h(x, \alpha(x, t)) \triangleq \hat{h}(x, t), \end{aligned}$$

com $\hat{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\hat{h}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$. Note que:

- Quando $u = \alpha(t)$, então temos controle em malha-aberta (por exemplo, $u = 0$ ou $u = \text{sen}(t)$);
- Quando $u = \alpha(x, t)$, então temos controle por realimentação de estado (malha-fechada).

Desse modo, podemos restringir o nosso estudo a equações de estado dadas por (votaremos a considerar a equação de saída mais adiante)

$$dx/dt = f(x, t),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tal equação de estado é denominada de **não-forçada**, e o sistema é chamado **não-autônomo**. Resaltamos que esta equação de estado pode corresponder tanto a sistemas em malha-aberta ($u = \alpha(t)$) quanto a sistemas em malha-fechada ($u = \alpha(x, t)$). Quando

$$dx/dt = f(x),$$

ou seja, a aplicação $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ não depende do tempo t , dizemos que o sistema é **autônomo**.

Vamos agora analisar sistemas descritos por EDO's da forma (equação de estado)

$$dx/dt = f(x, t),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denominamos f de **campo de vetores** dependente do tempo (fixado $t \geq 0$, para cada vetor $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ a aplicação f associa o vetor $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$).

Estamos considerando que a equação de estado acima modela um sistema dinâmico real em que foi fixada uma entrada $u = \alpha(x, t)$, $x \in D$, $t \geq 0$. Em um sistema dinâmico real, temos que, para cada condição inicial $x(t_0) \in D$ no instante inicial $t_0 \geq 0$, existe uma única solução $x(t)$, para $t \geq t_0$. Concluimos assim que o modelo acima deve preservar esta propriedade. Portanto, temos que determinar condições que o campo de vetores f do modelo deve satisfazer de modo a preservar a existência e unicidade de soluções do sistema real.

Considere a EDO

$$dx/dt = f(x, t), \quad (2.1)$$

onde $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**.

Definição: Seja $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$. Dizemos que uma curva diferenciável $x: J \rightarrow D$ é uma **solução** de (2.1) com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ no instante inicial $t_0 \geq 0$, se $J \subset [0, \infty)$ é um intervalo contendo t_0 e $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, para todo $t \in J$. Dizemos que tal solução $x: J \rightarrow D$ (com $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0) é **maximal** se, para qualquer outra solução $\bar{x}: \bar{J} \rightarrow D$ de (2.1) com condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 , temos que $\bar{J} \subset J$ e $\bar{x}(t) = x(t)$, para todo $t \in \bar{J}$.

Obs: Note que, **caso** uma solução **maximal exista**, então ela é **única** no seguinte sentido: se $x: J \rightarrow D$ e $\bar{x}: \bar{J} \rightarrow D$ são soluções maximais de (2.1) com as mesmas condições iniciais $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$ em t_0 , então $J = \bar{J}$ e $x(t) = \bar{x}(t)$, para $t \in J = \bar{J}$.

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções: Suponha que $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial f / \partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) são contínuas na EDO (2.1) acima. Então, dados $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, **existe** uma **única** solução maximal $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow D$ com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 , que por sua vez só depende da restrição do domínio de f ao subconjunto $D \times J \subset D \times [0, \infty)$. Em particular, se $\bar{x}: \bar{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$ é uma solução de (2.1) para a condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 , então tal solução é **única** no seguinte sentido: se $\tilde{x}: \tilde{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$ é uma outra solução de (2.1) com a mesma condição inicial $\tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 , então $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t)$, para $t \in \bar{J} \cap \tilde{J}$. Por este motivo, dizemos que $\bar{x}: \bar{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$ é **a solução** de (2.1) **no intervalo** \bar{J} para a condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 .

Obs 1: Relembre que (aqui, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto):

- Uma aplicação (vetorial) $f = (f_1, \dots, f_n): D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua **se e somente se** cada função coordenada $f_j: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $j = 1, \dots, n$;
- A soma, diferença, produto, divisão (com quociente não-nulo) e composição de funções contínuas é uma função contínua;

- Dada uma aplicação $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que $\partial f/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) é contínua **se e somente se** as derivadas parciais $\partial f_j/\partial x_k: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existem e são contínuas, para $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$;
- Uma aplicação $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é denominada de **classe C^1** quando $\partial f/\partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) é contínua, ou seja, quando as derivadas parciais $\partial f_j/\partial x_k: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existem e são contínuas, para $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$.

Obs 2: Suponha que na EDO (2.1) acima, o campo de vetores f não depende do tempo t , ou seja, $dx/dt = f(x)$, onde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Então, as hipóteses do teorema anterior são atendidas, pois $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ são contínuas. Neste caso, pode-se verificar que: dados $x_0 \in D, t_0 \geq 0$ e $T \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + T \geq 0$, se $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$ é a solução de $dx/dt = f(x)$ no intervalo $J = [t_0, b)$ para a condição inicial $x(t_0) = x_0$ no instante inicial $t = 0$, então $\bar{x}: \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \rightarrow D$ definida por $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$, para $t \in \bar{J}$, é a solução de $dx/dt = f(x)$ no intervalo $\bar{J} = [t_0 + T, b + T)$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$ em $t_0 + T$, onde $t_0 < b \leq \infty$. De fato, considere a curva definida por $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$. Temos que $\bar{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$ e, pela regra da cadeia, obtemos que $\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(\bar{x}(t))$. Logo, mostramos que $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ é uma solução de $dx/dt = f(x)$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0 + T) = x_0$ e, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, concluímos que $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ é de fato a solução de $dx/dt = f(x)$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0 + T) = x_0$. Por este motivo, dizemos que um sistema **autônomo** modelado por $dx/dt = f(x)$ é **invariante no tempo**, e **sempre podemos considerar que $t_0 = 0$** .

Obs 3: Considere a equação de estado

$$dx/dt = f(x, u),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $u \in \mathbb{R}^m$ é vetor de controle e $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , ou seja, $\partial f/\partial x: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial u: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são aplicações contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(x, t)$, onde $\alpha: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\partial \alpha/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ são aplicações contínuas. Então, o sistema resultante é dado por

$$dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \alpha(x, t)),$$

com $\bar{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial \bar{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, \alpha(x, t))} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x, \alpha(x, t))} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t).$$

Logo, o sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior.

Obs 4: Considere o modelo de estado

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \\ y &= h(x, u), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $u \in \mathbb{R}^m$ é vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída e $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Assuma que as aplicações $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(t)$, onde $\alpha: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua. Então, a equação de estado do sistema resultante é dada por

$$dx/dt = \tilde{f}(x, t) \triangleq f(x, u(t)),$$

com $\tilde{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial \tilde{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas. Logo, a equação de estado do sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Portanto, dados $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, existe uma **única** solução $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$ no intervalo $J = [t_0, b)$ para a condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 , que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$, onde $t_0 < b \leq \infty$.

Em particular, escolhida uma entrada contínua $u(t) = \alpha(t)$, $t \geq 0$, para o modelo de estado (2.2) acima e dada uma condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ em $t_0 \geq 0$, existe uma **única** saída $y(t) = h(x(t), u(t))$, $t \in J = [t_0, b)$, que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$. Logo, tal modelo de estado está de acordo com a definição de **vetor de estado de um sistema dinâmico** vista no Lab 1:

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \in D, \\ u(t) = \alpha(t), t \in J = [t_0, b) \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \in J = [t_0, b).$$

Ainda em relação ao modelo de estado (2.2), suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(t)$, onde $\alpha: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua. Então, o modelo de estado do sistema resultante é dado por

$$dx/dt = \tilde{f}(x, t) \triangleq f(x, u(t)), \quad y = h(x, u(t)),$$

com $\tilde{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial \tilde{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas. Sejam $x_0 \in D$, $t_0 \geq 0$ e $T \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + T \geq 0$. Defina $\bar{u}(t) = u(t - T) = \alpha(t - T)$, para $t \geq t_0 + T$. Considere o modelo de estado

$$dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \bar{u}(t)), \quad \bar{y} = h(x, \bar{u}(t)),$$

onde $\bar{f}: D \times [t_0 + T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pode-se verificar que, se $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$ é a solução de $dx/dt = \tilde{f}(x, t) = f(x, u(t))$ no intervalo $J = [t_0, b)$ para a condição inicial $x(t_0) = x_0$ em t_0 , onde $t_0 < b \leq \infty$, então:

1. $\bar{x}: \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \rightarrow D$ definida por $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$, para $t \in \bar{J}$, é a solução de $dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \bar{u}(t))$ no intervalo $\bar{J} = [t_0 + T, b + T)$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$ em $t_0 + T$;
2. Para o sistema resultante, existe uma **única** saída $y(t) = h(x(t), u(t))$, $t \in J = [t_0, b)$, que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$. E, além disto, a saída $\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ é **única**, satisfaz $\bar{y}(t) = y(t - T)$ e só depende da entrada $\bar{u}(t) = u(t - T)$, para $t \in \bar{J}$.

Portanto, mostramos que o modelo de estado (2.2) corresponde a um sistema **invariante no tempo** no sentido da definição vista no Lab 1:

Se

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = x_0, \\ u(t) = \alpha(t), t \in J = [t_0, b) \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \in J = [t_0, b),$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}(t_0 + T) = x_0, \\ \bar{u}(t) = u(t - T), t \in \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \in \bar{J}.$$

Desse modo, em tais modelos de estado **sempre podemos considerar** que $t_0 = 0$.

Obs 5: Os resultados das **Obs 3 e 4** acima permanecem válidos quando a entrada $u(t) = \alpha(t)$, $t \geq 0$, é **contínua por partes**.

Exemplo 1 (não-unicidade de soluções): Considere a EDO

$$\dot{x} = 3x^{2/3} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $t_0 = 0$ o instante inicial. Note que $x(t) = 0$, $t \geq 0$, é uma solução desta EDO com condição inicial $x(0) = 0$ em $t_0 = 0$. E, dado $c > 0$, observe que $x_c(t)$, $t \geq 0$, definida por

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq c, \\ (t - c)^3, & \text{se } t > c, \end{cases}$$

também é solução desta EDO com condição inicial $x(0) = 0$. Logo, existem infinitas soluções da EDO acima quando a condição inicial é nula em $t_0 = 0$ (e não existe solução maximal com $x(0) = 0$!). Portanto, um modelo descrito por essa EDO não permite determinar (prever) a solução do sistema real quando a condição inicial é nula. Isto ocorre, por exemplo, se aplicamos a realimentação $u = 3x^{2/3}/(2 + \cos x)$ em um sistema modelado por $\dot{x} = \bar{f}(x, u) = (2 + \cos x)u$. Note que, apesar da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da EDO acima ser contínua, f não é diferenciável em $x = 0$ e, portanto, não satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções.

Exemplo 2 (tempo de escape finito): Considere a EDO

$$\dot{x} = 1 + x^2 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável e, assim, as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções são satisfeitas para f . Seja $t_0 = 0$. Note que $x(t) = \tan(t)$, para $0 \leq t < \pi/2$, é uma solução dessa EDO para a condição inicial $x(0) = 0$ em $t_0 = 0$ (e, assim, é a solução no intervalo $J = [0, \pi/2)$ para $x(0) = 0$ em $t_0 = 0$). Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} x(t) = +\infty \quad (\text{tempo de escape finito em } t_e = \pi/2).$$

Desse modo, a solução maximal com condição inicial nula em $t_0 = 0$ não pode estar definida no instante $t_e = \pi/2$ e, portanto, concluímos que $x(t) = \tan(t)$, para $t \in J = [0, \pi/2)$, é a solução maximal quando a condição inicial é nula em $t_0 = 0$.

Exemplo 3 (Sistema Eletrônico): A equação de estado de Van der Pol, que modela o oscilador eletrônico utilizado nos primeiros aparelhos de rádio, é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 - x_1,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $x_1(t)$ é a tensão sobre um elemento resistivo com $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro constante (veja a Seção 1.2.4 do livro do Khalil para maiores detalhes). Assim:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = f(x),$$

para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Note que este é um sistema autônomo. Pela **Obs 2** acima, as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções serão atendidas caso a matriz jacobiana $\partial f/\partial x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ seja uma aplicação contínua. Para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon x_1 x_2 - 1 & -\varepsilon(x_1^2 - 1) \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Como cada componente da matriz jacobiana é contínua em relação a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (são polinomiais nas variáveis de estado), temos que $\partial f/\partial x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é contínua, ou seja, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 . Portanto, a equação de estado de Van der Pol satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções. Novamente pela **Obs 2** acima, sempre podemos considerar que $t_0 = 0$, pois o sistema é autônomo. Logo, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução maximal $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ para a condição inicial $x(0) = x_0$ em $t_0 = 0$.

Exemplo 4 (Sistema Biológico): Um modelo simplificado para a dinâmica de propagação de doenças contagiosas (malária, por exemplo), é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI, \\ \dot{I} &= \beta SI - \nu I, \\ \dot{R} &= \nu I,\end{aligned}$$

onde $x = (S, I, R) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de estado, S é o tamanho da população dos indivíduos suscetíveis à doença, I dos infectados, R dos que se recuperaram (após terem sido infectados), e $\beta, \nu > 0$ são parâmetros constantes. Assim:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{I} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \nu I \\ \nu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = f(x),$$

para $x = (S, I, R) \in \mathbb{R}^3$. Note que este é um sistema autônomo. Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial I}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial R}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial S}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial I}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial R}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial S}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial I}(x) & \frac{\partial f_3}{\partial R}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \nu & 0 \\ 0 & \nu & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

Como cada componente da matriz jacobiana é contínua em relação a $x = (S, I, R) \in \mathbb{R}^3$, temos que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 . Portanto, dado $x_0 \in \mathbb{R}^3$, existe uma única solução maximal $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a condição inicial $x(0) = x_0$ em $t_0 = 0$.

Exemplo 5 (Sistema Ecológico): O sistema presa-predador de Lotka-Volterra é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2) = f_1(x), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-c + dx_1) = f_2(x), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, x_1 é o tamanho da população das presas (peixes, por exemplo), x_2 dos predadores (arrais, por exemplo), e $a, b, c, d > 0$ são parâmetros constantes. Note que este é um sistema autônomo, e que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Como cada componente da matriz jacobiana é contínua em relação a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 . Portanto, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução maximal $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ para a condição inicial $x(0) = x_0$ em $t_0 = 0$.

Exemplo 6 (Motor CC com entrada senoidal): Considere um motor CC com controle modelado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x, u), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u = f_2(x, u), \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $x_1 = \theta$ é a posição angular do eixo do motor, $x_2 = \dot{\theta}$ a velocidade angular, e $u \in \mathbb{R}$ o controle (tensão de entrada). Note que este é um sistema invariante no tempo. Temos que:

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + u \end{bmatrix},$$

com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}.$$

Como cada componente das matrizes jacobianas $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial u$ são constantes, concluímos que $\partial f/\partial u: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\partial f/\partial x: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ são aplicações contínuas. Portanto, $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 . Escolha $u(t) = \text{sen}(t)$, para $t \geq 0$. Esta entrada (em malha-aberta!) é contínua no intervalo $[0, \infty)$. Logo, com base na **Obs 4** acima e no Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, temos que, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução maximal $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ do sistema resultante

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, t) = f(x, u)|_{u=\text{sen}(t)} = f(x, \text{sen}(t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty),$$

para a condição inicial $x(0) = x_0$ em $t_0 = 0$. Note que, novamente pela **Obs 4**, sempre podemos considerar que $t_0 = 0$, pois (2.3) é um sistema invariante no tempo.

Definição: Suponha que $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ são aplicações contínuas. Dizemos que o campo de vetores f da EDO $dx/dt = f(x, t)$ é **completo** se, para quaisquer $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, temos que a solução maximal correspondente $x: J \rightarrow D$ (com $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0) é tal que $J = [0, \infty)$, ou seja, cada solução maximal está definida para todo $t \in [0, \infty)$.

Teorema: Considere que o campo de vetores $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ da EDO $dx/dt = f(x, t)$ é completo. Denote por $\phi: [0, \infty) \times D \times [0, \infty) \rightarrow D$ o **fluxo** associado ao campo de vetores f , ou seja, dados $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, $\phi(\cdot; x_{t_0}, t_0): [0, \infty) \rightarrow D$ é igual à solução maximal da EDO com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0 . Então, dados $x_{t_0} \in D$, $t_2, t_1, t_0 \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \phi(t_0; x_{t_0}, t_0) &= x_{t_0}, \\ \phi(t_2; \phi(t_1; x_{t_0}, t_0), t_1) &= \phi(t_2; x_{t_0}, t_0). \end{aligned}$$

Em particular, temos que duas **soluções distintas** da EDO $dx/dt = f(x, t)$ **nunca podem se cruzar no mesmo instante de tempo**.

Prova (do resultado de cruzamento acima): Considere duas soluções distintas: $x: [0, \infty) \rightarrow D$ com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ em $t_0 \geq 0$, e $\bar{x}: [0, \infty) \rightarrow D$ com condição inicial $\bar{x}(\bar{t}_0) = \bar{x}_{\bar{t}_0} \in D$ em $\bar{t}_0 \geq 0$. A demonstração é por contradição. Assim, suponha que existe $t_1 \geq 0$ tal que $\phi(t_1; x(t_0), t_0) = \phi(t_1; \bar{x}(t_0), \bar{t}_0)$, ou seja, as soluções se cruzam no instante de tempo t_1 . Então, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t; x(t_0), t_0) = \phi\left(t; \underbrace{\phi(t_1; x(t_0), t_0)}_{=\phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0)}, t_1\right), \\ &= \phi\left(t; \phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0), t_1\right) = \phi(t; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0) = \bar{x}(t), \end{aligned}$$

ou seja, as duas soluções são idênticas, o que contradiz a hipótese de que elas são distintas.

3 Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano (Lab 2)

Objetivos: Vamos introduzir o conceito de ponto de equilíbrio, rever certos resultados de Álgebra Linear, e classificar o comportamento qualitativo das soluções de sistemas lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz que determina a dinâmica do sistema.

3.1 Ponto de Equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em equilíbrio quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente esta noção.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Dizemos que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação** ou **solução estacionária**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, se $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema acima **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

Demonstração: Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Então, a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ é a curva constante $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Logo, $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x^e)$, $t \geq 0$, ou seja, $f(x^e) = 0$. Agora, suponha que $x^e \in D$ é tal que $f(x^e) = 0$. Considere a curva constante $x: [0, \infty) \rightarrow D$ definida por $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Assim, $\dot{x}(t) = 0 = f(x^e) = f(x(t))$, $t \geq 0$, ou seja, mostramos que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é uma solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Teorema: Considere novamente o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ apresentado acima. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

3.2 Pontos de Equilíbrio de Sistemas Lineares no Plano

Exemplo 1: Considere o pêndulo simples do Lab 1 com $u = 0$ (sem controle)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado.

Para encontramos todos os pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in \mathbb{R}^2$ do pêndulo simples, resolvemos:

$$\begin{aligned}0 &= f_1(x_1^e, x_2^e) = x_2^e \Rightarrow x_2^e = 0, \\ 0 &= f_2(x_1^e, x_2^e) = -\frac{g}{l} \text{sen}(x_1^e) - \frac{k}{m} x_2^e \Rightarrow \text{sen}(x_1^e) = 0.\end{aligned}$$

Logo, os pontos de equilíbrio são $x_e = (x_1^e, x_2^e) = (\ell\pi, 0)$, com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Mas, como $x_1 = \theta$ (ângulo que o pêndulo forma com o eixo vertical), concluímos que o pêndulo simples apresenta apenas 2 pontos de equilíbrio: $(0, 0)$ (pêndulo parado em baixo) e $(\pi, 0)$ (pêndulo parado em cima).

Exemplo 2: Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Note que $f(x) = Ax$ é de classe C^1 , pois $\partial f / \partial x = A$ é constante. Para encontrarmos os pontos de equilíbrio do sistema, devemos resolver $Ax^e = 0$. É evidente que $x_e = 0$ sempre é um ponto de equilíbrio. Relembre de Álgebra Linear que o conjunto $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ (**núcleo** de A) é um subespaço vetorial, e que $N(A) = \{0\}$ **se e somente se** $\det(A) \neq 0$. Logo:

- Se $\det(A) \neq 0$, então $x^e = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio;
- Suponha que $\det(A) = 0$ com $A \neq 0$. Então, o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio, pois o conjunto $N(A) \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão maior ou igual a 1. Em particular, se $n = 2$ (sistema de segunda ordem), então $N(A)$ é um subespaço vetorial de dimensão 1, ou seja, uma reta passando pela origem do plano x_1 - x_2 .

3.3 Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada não-nula $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Relembre que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Note que, como $v \neq 0$,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in N(A - \lambda I) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Denominamos $\det(A - \lambda I)$ de **polinômio característico** de A . Logo, os autovalores de A são as raízes reais do seu polinômio característico. No entanto, é possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Em tal caso, dizemos que A possui **autovalores complexos**.

Relembre, ainda, que toda matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina o seguinte operador no \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n,$$

e que toda matriz quadrada invertível $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina a seguinte mudança linear de coordenadas (mudança de base)

$$z = Tx,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas originais do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , e $z = (z_1, \dots, z_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as novas coordenadas do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à nova base.

Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Temos então que A é a **representação** do operador no \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n,$$

em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível. Podemos então encontrar a matriz \bar{A} que representa operador acima nas novas coordenadas $z = Tx$. Note que

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto x = T^{-1}z \mapsto \tilde{x} = Ax = AT^{-1}z \mapsto \tilde{z} = T\tilde{x} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z = \bar{A}z \in \mathbb{R}^n,$$

onde $z = Tx$ e $\tilde{z} = T\tilde{x} = TAx$ são as novas coordenadas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax$ em relação à nova base, respectivamente. Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores: $\det(sI - \bar{A}) = \det(sITT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T(sI - A)T^{-1}) = \det((sI - A)T^{-1}T) = \det(sI - A)$.

3.4 Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Motivação: Considere a seguinte EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde a é um parâmetro real constante. Relembre que

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

com

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}, \quad e^{a \cdot 0} = 1.$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 = 0$, a solução desta EDO é dada por

$$x(t) = e^{at}x_0, \quad t \geq 0,$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 = ax(t), \quad t \geq 0.$$

Agora, considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

onde $(At)^k = (tA)(tA) \cdots (tA)$ (k vezes). Temos que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}.$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em $t_0 = 0$, a solução deste sistema é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0,$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t), \quad t \geq 0.$$

Relembre que $x^e = 0$ é sempre ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = Ax.$$

Logo, se a condição inicial é $x_0 = x^e = 0$ em $t_0 = 0$, então a solução correspondente é $x(t) = x^e = 0, t \geq 0$.

De agora em diante, vamos considerar apenas sistemas de segunda ordem ($n = 2$), ou seja, sistemas em que a dinâmica evolui no plano. Nosso objetivo é analisar de maneira **qualitativa** o comportamento do sistema quando $x_0 \neq 0$. Por exemplo, caso $x_0 \neq 0$, queremos saber:

- Se as soluções convergem (retornam) assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ e, em tal caso, se isto se dá de maneira oscilatória ou não;
- Se as soluções oscilam de maneira periódica, sem convergirem ao ponto de equilíbrio $x^e = 0$;

- As soluções se afastam (divergem) do ponto de equilíbrio $x^e = 0$.

Ao invés de determinarmos as soluções de maneira **quantitativa** (analítica), tal análise **qualitativa** será realizada pelo esboço do **retrato de fase** do sistema (definido a seguir), o qual será determinado a partir dos autovalores da matriz A .

Dada uma condição inicial x_0 , a **trajetória (ou órbita)** da solução corresponde $x(t)$, $t \geq 0$, é a curva no plano (parametrizada pelo tempo $t \geq 0$)

$$O_{x_0} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), \text{ para algum } t \geq 0\}.$$

Assim, as trajetórias do sistema exibem apenas o comportamento **qualitativo** do sistema. Por exemplo, uma trajetória O_{x_0} que é uma curva fechada no plano corresponde a uma solução oscilatória periódica no tempo, e uma trajetória que é somente um ponto corresponde a um ponto de equilíbrio. O **retrato de fase** do sistema é a união de todas as suas trajetórias (órbitas).

Obs: Considere um sistema autônomo da forma $\dot{x} = f(x)$, onde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções e a **Obs 2** do capítulo anterior, pode-se mostrar que as **órbitas desse sistema (autônomo!) nunca podem se cruzar no retrato de fase** (e cada órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo) pois, caso contrário, teremos mais de uma solução para uma mesma condição inicial! Em particular, nenhuma órbita pode “encostar” em um ponto de equilíbrio!

Para um sistema linear autônomo no plano ($n = 2$)

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $A \in \mathbb{R}^2$ é uma matriz quadrada não-nula, pode-se demonstrar que sempre existe $T \in \mathbb{R}^2$ invertível em que a matriz $\bar{A} = TAT^{-1}$ apresenta uma das seguintes formas (**forma canônica de Jordan** – veja o livro do Chen):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

No primeiro caso, λ_1, λ_2 são autovalores reais distintos de A . No segundo caso e no terceiro, os autovalores reais de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. No último caso, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ são os autovalores complexos de A . Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

Para determinarmos um esboço do retrato de fase do sistema, a ideia é:

1. Fazemos a mudança de coordenadas $z = Tx$, denominada de **coordenadas modais**;
2. Esboçamos o retrato de fase do sistema nas **coordenadas modais** $z = Tx$;
3. Voltamos às coordenadas originais por $x = T^{-1}z$, e esboçamos o retrato de fase na base canônica.

Seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema (nas coordenadas canônicas originais) para uma dada condição inicial x_0 em $t_0 = 0$. Defina $z(t) = Tx(t)$, $t \geq 0$ (solução nas coordenadas modais). Assim,

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z(t).$$

Portanto, a solução do sistema nas coordenadas modais é dada por

$$z(t) = e^{\bar{A}t}z_0, \quad t \geq 0, \quad \text{com } z_0 = Tx_0$$

e, nas coordenadas originais é $x(t) = T^{-1}z(t)$, $t \geq 0$.

Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{A}t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t}z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10}e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Desse modo:

1. Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó estável**.
2. Se $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó instável**.
3. Se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **sela**.

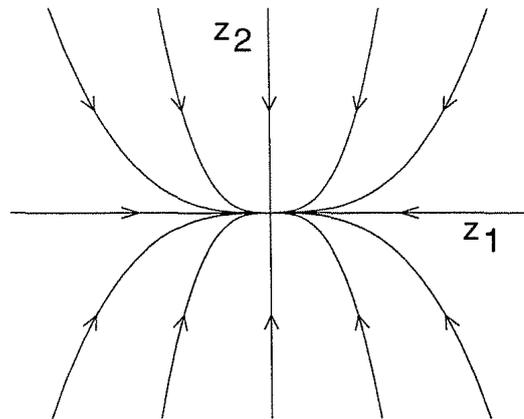


Figura 3 – Retrato de fase de um **nó estável** nas **coordenadas modais**.

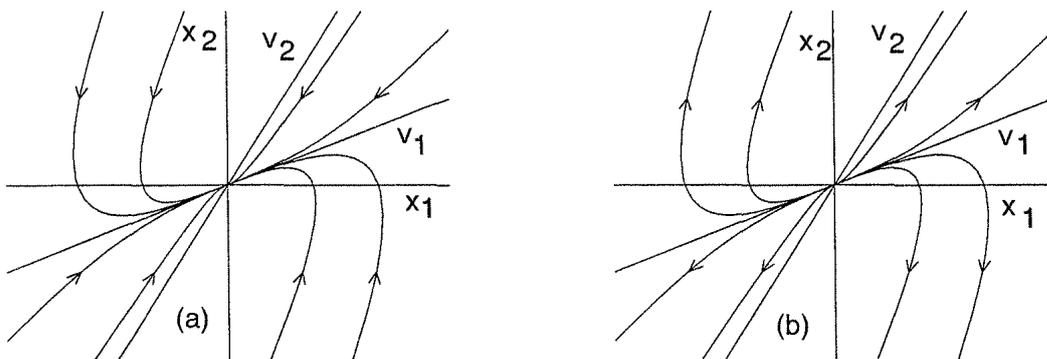


Figura 4 – Retrato de fase de um (a) **nó estável** e (b) **nó instável** nas **coordenadas originais**.

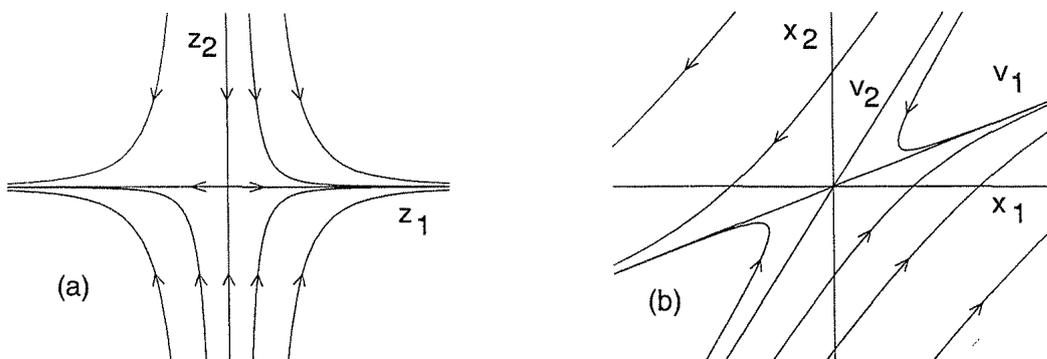


Figura 5 – Retrato de fase de uma **sela** (a) nas **coordenadas modais** e (b) nas **coordenadas originais**.

Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos) Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ -e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\alpha t} \cos \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t, \\ z_2(t) &= -z_{10} e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \cos \beta t, \end{aligned}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Passando para coordenadas polares

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(z_2/z_1),$$

obtemos que

$$r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)} = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \tan^{-1}(z_2(t)/z_1(t)) = \theta_0 + \beta t,$$

onde $r_0 = \sqrt{z_{10}^2 + z_{20}^2}$ e $\theta_0 = \tan^{-1}(z_{20}/z_{10})$. Desse modo:

1. Se $\alpha < 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ converge assintoticamente em espiral para a origem do plano z_1 - z_2 , com frequência (angular) de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **foco estável**.
2. Se $\alpha > 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ se afasta (diverge) em espiral da origem do plano z_1 - z_2 , com frequência de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **foco instável**.
3. Se $\alpha = 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ oscila periodicamente com frequência $\beta > 0$, sendo que a amplitude é determinada pelas condições iniciais z_{10} , z_{20} . Neste caso, as trajetórias das soluções $z(t)$ são círculos centrado na origem do plano z_1 - z_2 , e denominamos $x^e = 0$ de **centro**.

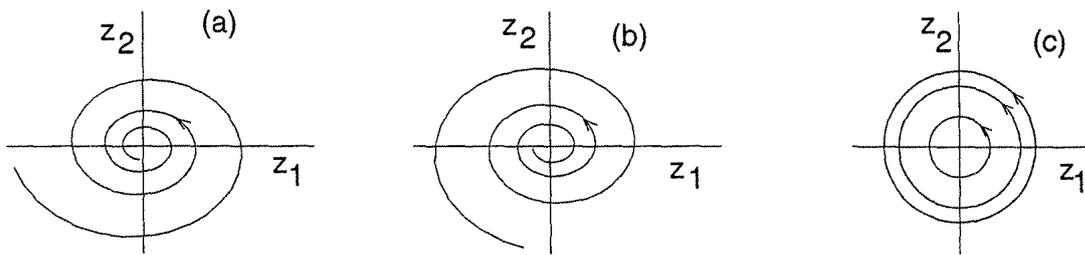


Figura 6 – Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas coordenadas modais.

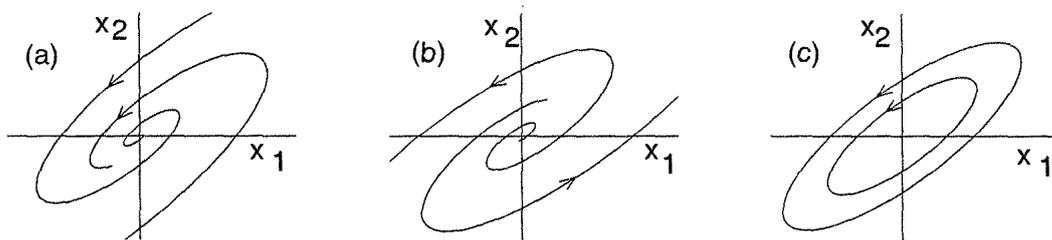


Figura 7 – Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas coordenadas originais.

Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Neste caso, temos duas situações:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Na primeira situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

1. Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) estável**.
2. Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) instável**.

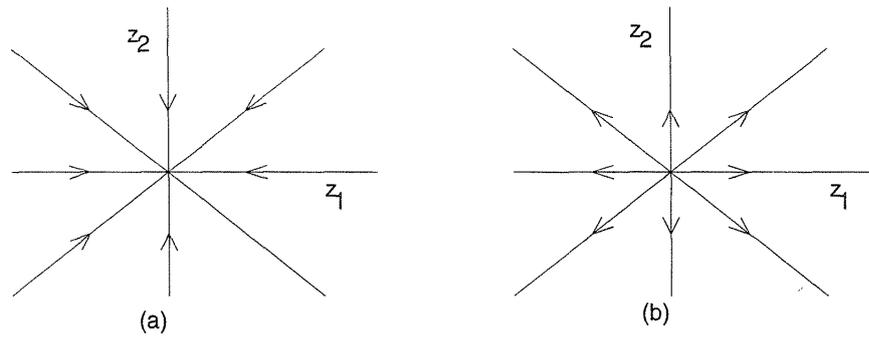


Figura 8 – Retrato de fase de um (a) **nó (ou estrela) estável** e (b) **nó (ou estrela) instável** nas **coordenadas modais**.

Por fim, na segunda situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10}e^{\lambda t} + z_{20}te^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

1. Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (impróprio) estável**.
2. Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (impróprio) instável**.

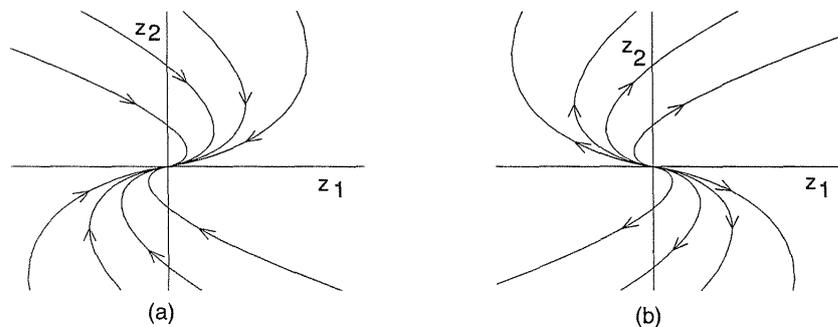


Figura 9 – Retrato de fase de um (a) **nó (impróprio) estável** e (b) **nó (impróprio) instável** nas **coordenadas modais**.

Resumo: Considere um sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax.$$

Com base nos autovalores λ_1, λ_2 da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, obtemos a seguinte classificação do ponto de equilíbrio $x^e = 0$:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), nó instável ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$), sela ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$);
2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \neq 0$: foco estável ($\alpha < 0$), foco instável ($\alpha > 0$), centro ($\alpha = 0$);
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda < 0$), nó instável ($\lambda > 0$).

Importante: como em todos os casos acima a matriz A não possui autovalores nulos, concluímos que $\det(A) \neq 0$, ou seja, $x^e = 0$ é o **único** ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que: (a) órbitas correspondentes a condições iniciais distintas nunca podem se cruzar no retrato de fase; (b) uma órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo; e (c) uma órbita nunca pode “encostar” em $x^e = 0$ (ponto de equilíbrio).

3.5 Procedimentos

1. Comprove por simulação que $x^e = (0, 0)$ e $x^e = (\pi, 0)$ são realmente pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Verifique também que o pêndulo simples é não-linear. Dica: simule o pêndulo para a condição inicial $x(0) = (\pi/2, 0)$.
2. Considere o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax.$$

Para cada um dos casos abaixo, classifique o ponto de equilíbrio $x^e = 0$, esboce a retrato de fase com base nos autovalores de A , e determine o retrato de fase por simulação para diversas condições iniciais. Dica: utilize o pacote **pplane** do Matlab.

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4 Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano (Lab 3)

Objetivos: Vamos introduzir o conceito de estabilidade estrutural e classificar o comportamento qualitativo local do retrato de fase de sistemas não-lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz do sistema linearizado.

4.1 Estabilidade Estrutural

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Definimos a **norma euclidiana** de A por $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^2}$. Temos o seguinte resultado da Teoria de Perturbação de Matrizes:

Proposição (Continuidade dos Autovalores): Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz constante) satisfaz $\|\Delta A\| < \delta$, então a distância entre autovalores das matrizes $A + \Delta A$ e A é menor que ε , ou seja, $|\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)| < \varepsilon$.

Considere o sistema linear autônomo no plano (**sistema nominal**)

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ é o vetor (coluna) de estado e os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são **distintos e não-nulos**, e o **sistema perturbado**

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x,$$

onde $\Delta A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz **constante**. Concluímos assim da proposição acima que, para **pequenas perturbações** ΔA , **a estabilidade e o tipo do ponto de equilíbrio** $x^e = 0$ **são preservados**. Mais precisamente, se o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema nominal** $\dot{x} = Ax$ é do tipo **nó estável** (os autovalores de A são reais e negativos), **nó instável** (reais e positivos), **sela** (A possui um autovalor negativo e outro positivo), **foco estável** (os autovalores de A são complexos conjugados com parte real negativa), **foco instável** (complexos conjugados com parte real positiva), então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema perturbado** $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ será do tipo **nó estável**, **nó instável**, **sela**, **foco estável** ou **foco instável**, respectivamente.

Dizemos que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Assim, sistemas lineares no plano da forma $\dot{x} = Ax$ são estruturalmente estáveis quando $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo nó (com autovalores distintos), sela ou foco.

Importante: Não há estabilidade estrutural quando o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema nominal $\dot{x} = Ax$ é do tipo centro (i.e. a matriz A possui autovalores complexos conjugados com parte real nula). Por exemplo, considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda_{1,2} = \pm j).$$

Assim, para

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

temos que os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ são $\lambda_{1,2} = \mu \pm j$. Portanto, se $\mu > 0$, então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema perturbado será do tipo foco instável e, se $\mu < 0$, será do tipo foco estável. Desse modo, o comportamento qualitativo do retrato de fase do sistema nominal não é preservado sob pequenas perturbações no campo de vetores $f(x) = Ax$.

4.2 Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Considere um sistema não-linear da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (i.e. $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é contínua). Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e) = 0$. A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio x^e é dada por

$$f(x) = \underbrace{f(x^e)}_{=0} + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS},$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x) \cong \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} \underbrace{(x - x^e)}_{=x_\delta}, \quad \text{para } x_\delta = x - x^e \cong 0.$$

Agora, seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$ em $t_0 = 0$, e considere o **desvio** $x_\delta(t) = x(t) - x^e$ da solução $x(t)$ em relação ao ponto de equilíbrio x^e . Assim, para $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ (pequenos desvios), temos

$$\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) \cong \underbrace{\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e}}_{\triangleq A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{(x(t) - x^e)}_{=x_\delta(t)} = Ax_\delta(t).$$

Denominamos

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right] x_\delta$$

de **sistema linearizado** associado ao sistema $\dot{x} = f(x)$ no ponto de equilíbrio x^e . Relembre que a solução do sistema linear autônomo $\dot{x}_\delta = Ax_\delta$ para a condição inicial $x_\delta(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $x_\delta(t) = e^{At}x_\delta(0)$, $t \geq 0$. Portanto, é razoável esperarmos que

$$x(t) = x^e + x_\delta(t) \cong x^e + e^{At}x_\delta(0) = x^e + e^{At}(x(0) - x^e), \quad t \geq 0,$$

desde que $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$, ou seja, $x(t) \cong x^e$. Em particular, é razoável esperarmos que o **retrato de fase** do **sistema não-linear** $\dot{x} = f(x)$ apresente, nas **proximidades** do ponto de equilíbrio x^e , um **comportamento qualitativo semelhante** ao do retrato de fase do sistema linear $\dot{x}_\delta = Ax_\delta = [\partial f(x^e)/\partial x]x_\delta$ (após uma **translação** por x^e). Isto é de fato verdade, conforme o teorema apresentado a seguir.

Teorema de Hartman-Grobman: Considere um sistema não-linear autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, e considere o sistema linearizado associado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right] x_\delta.$$

Assuma que os autovalores de A possuem **parte real não-nula**. Então, o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado associado. Em particular, quando $n = 2$ (**sistema no plano**) e os 2 autovalores da matriz A são **distintos e com parte real não-nula**, se $x_\delta^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, respectivamente.

Devido ao Teorema de Hartman-Grobman acima, dizemos que o sistema linearizado permite analisar **localmente** o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ **em torno** do ponto de equilíbrio x^e .

Obs: Quando $n = 2$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica (por exemplo, cada componente de f é a soma, diferença, produto ou quociente de funções polinomiais ou trigonométricas), então o resultado do Teorema de Hartman-Grobman permanece válido mesmo quando a matriz A possui 2 autovalores **repetidos fora do eixo imaginário**, ou seja, se $x_\delta^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável ou nó instável com autovalores iguais, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades

do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável ou nó instável, respectivamente.

Exemplo: Considere o circuito *tunnel-diode* abaixo:

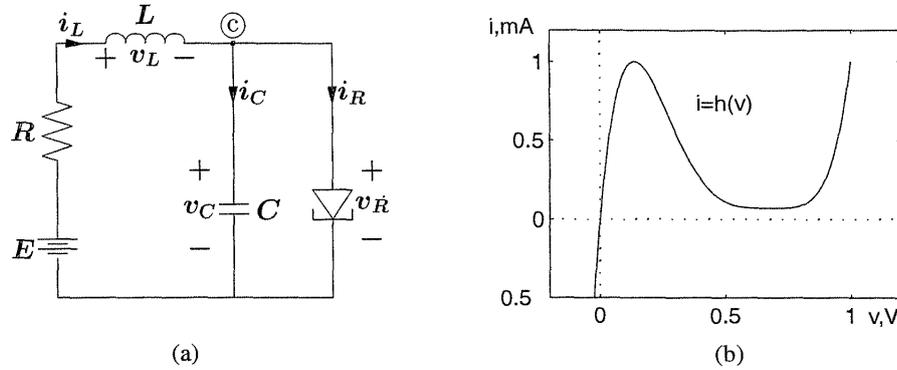


Figura 10 – (a) Circuito *tunnel-diode*, e (b) característica v_r-i_r do diodo.

Considerando que $u = E$ (controle), $x_1 = v_C$ e $x_2 = i_L$, temos que o modelo de estado do circuito é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}(-h(x_1) + x_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u).\end{aligned}$$

Para $u = 1.2V$, $R = 1.5k\Omega$, $C = 2pF = 2 \times 10^{-12}F$, $L = 5\mu H$, e considerando que o tempo é medido em nanosegundos e as correntes em mA, temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = 0.5(-h(x_1) + x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2).\end{aligned}$$

Suponha que

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5.$$

Fazendo $f(x_1^e, x_2^e) = (f_1(x_1^e, x_2^e), f_2(x_1^e, x_2^e)) = (0, 0)$, obtemos 3 pontos de equilíbrio:

$$Q_1 = (0.063, 0.758), \quad Q_2 = (0.285, 0.61), \quad Q_3 = (0.884, 0.21).$$

Temos que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -0.5dh(x_1)/dx_1 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

com

$$dh(x_1)/dx_1 = 17.76 - 207.58x_1 + 668.86x_1^2 - 905.25x_1^3 + 418.6x_1^4.$$

Assim:

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_1} = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -3.57, \lambda_2 = -0.33$$

$$A_2 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_2} = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.77, \lambda_2 = -0.25$$

$$A_3 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_3} = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1.33, \lambda_2 = -0.4.$$

Portanto: Q_1 é um nó estável, Q_2 é do tipo sela, e Q_3 é um nó estável. O retrato de fase abaixo comprova nossa análise **local** pelo sistema linearizado. Observe a presença das separatrizes (uma **separatriz** é uma curva que divide o retrato de fase em regiões com comportamentos qualitativos distintos). Assim, um circuito *tunnel-diode* **real** funciona como um circuito biestável: os 2 estados são Q_1 e Q_3 (na prática, pequenos ruídos externos forçarão a órbita a sair das separatrizes).

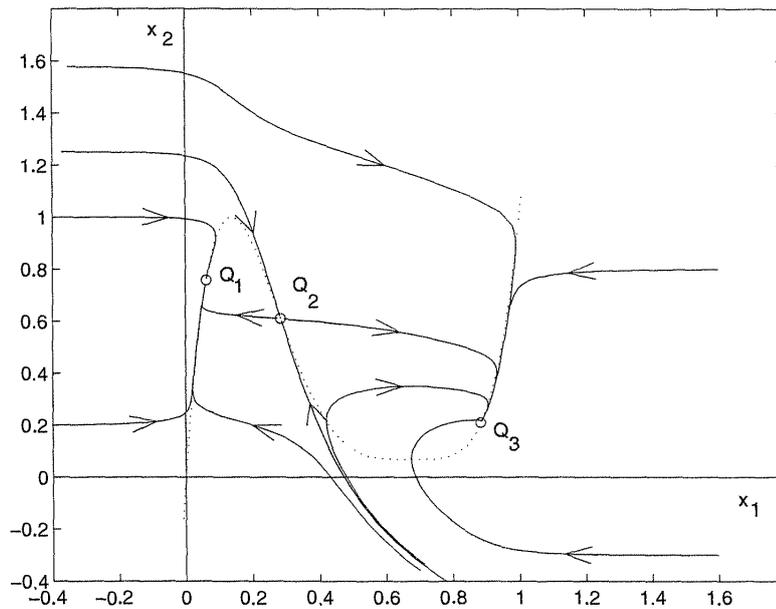


Figura 11 – Retrato de fase do circuito *tunnel-diode*.

4.3 Procedimentos

1. Para o circuito *tunnel-diode* do exemplo anterior, utilize o pacote simbólico do Matlab para calcular os pontos de equilíbrio e o sistema linearizado associado. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase utilizando o pacote **pplane**. Interprete o retrato de fase, concluindo que um circuito *tunnel-diode* **real** opera como um circuito

biestável. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento das separatrizes (fenômeno **global**).

2. Classifique os pontos de equilíbrio do pêndulo simples e esboce o retrato de fase. Relembre que o modelo de estado do pêndulo simples com $u = 0$ (sem controle) é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2,\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $m = \ell = 1$, $g = 9.8$ e $k = 0.1$.

3. Considere a equação de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\varepsilon = 0.2$ é um parâmetro. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase. Note a presença de um **ciclo-limite** (órbita fechada). Assim, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a amplitude de oscilação independe da condição inicial. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo limite (fenômeno **global**).

5 Sistemas Lineares

Neste capítulo, vamos estudar **sistemas lineares invariantes no tempo** (LTI – Linear Time-Invariant) modelados por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz $n \times m$), $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz $p \times n$) e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz $p \times m$) são **matrizes constantes**. Salvo menção contrária, de agora em diante iremos assumir que a entrada $u(t)$, $t \geq 0$, é **contínua por partes**. Como

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u), \quad y = Cx + Du = h(x, u),$$

com $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 ($\partial f/\partial x = A$, $\partial f/\partial u = B$, $\partial h/\partial x = C$, $\partial h/\partial u = D$), concluímos pelas **Obs 4 e 5** do Capítulo 2 que o sistema é de fato **invariante no tempo** e, assim, sempre podemos (**e iremos**) considerar que $t_0 = 0$.

Mostraremos na sequência que um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

é de fato linear, ou seja, o princípio da superposição é satisfeito. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

onde $(At)^k = tA \, tA \cdots tA$ (k vezes). Temos que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}, \quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$$

Relembre que se

$$\alpha(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad t \geq 0,$$

onde $\beta(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $t \geq 0$, é uma aplicação contínua, então

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \beta(t), \quad t \geq 0.$$

Dada uma condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ (em $t_0 = 0$), temos que

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

é uma solução do sistema no intervalo $J = [0, \infty)$ para a condição inicial x_0 , pois $x(0) = e^{A \cdot 0} x_0 = I x_0 = x_0$ e, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau, \\ \dot{x}(t) &= A e^{At} x_0 + A e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau + \overbrace{e^{At} e^{-At}}^{=I} B u(t) \\ &= A \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] + B u(t) \\ &= A x(t) + B u(t). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que

$$\boxed{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0}$$

é a solução do sistema no intervalo $J = [0, \infty)$ para a condição inicial $x(0) = x_0$. Assim, a saída $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= C x(t) + D u(t) \\ &= \underbrace{C e^{At} x_0}_{=y_0(t)} + \underbrace{\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{=y_{esn}(t)} + D u(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}}$$

Propriedade de Decomposição

Logo, o **princípio da superposição** é satisfeito:

Se

$$\left. \begin{array}{l} x_a(0), \\ u_a(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_a(t), t \geq 0, \quad \left. \begin{array}{l} x_b(0), \\ u_b(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_b(t), t \geq 0,$$

então ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$)

$$\left. \begin{array}{l} x_c(0) = k_1 x_a(0) + k_2 x_b(0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq 0.$$

Concluímos assim que todo sistema modelado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u, \\ y &= C x + D u, \end{aligned}$$

é de fato um **sistema linear invariante no tempo (LTI)**.

Importante: Como as soluções do modelo acima estão definidas em todo o intervalo $J = [0, \infty)$, **não há tempo de escape finito!**

5.1 Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Considere o sistema LTI

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}$$

Relembre que, fixada a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e escolhida uma entrada $u(t)$, $t \geq 0$, contínua por partes, a saída $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$\begin{aligned}y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ &= \underbrace{Ce^{At}x_0}_{=y_0(t)} + \int_0^t \underbrace{\left[\overbrace{Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D}^{\mathcal{G}(t-\tau)} \right]}_{=y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t)*u(t) \text{ (convolução!)}} u(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

onde $\delta(t)$ é o impulso unitário centrado em $t = 0$. Denominamos $\mathcal{G}(t) = Ce^{At}B + \delta(t)D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $t \geq 0$, de **matriz resposta ao impulso** do sistema.

Ao aplicarmos a transformada de Laplace \mathcal{L} em ambos os lados de

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}X(s) &= (X_1(s), \dots, X_n(s))' = \mathcal{L}\{x(t)\} = (\mathcal{L}\{x_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{x_n(t)\})', \\ U(s) &= (U_1(s), \dots, U_m(s))' = \mathcal{L}\{u(t)\} = (\mathcal{L}\{u_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{u_m(t)\})', \\ Y(s) &= (Y_1(s), \dots, Y_p(s))' = \mathcal{L}\{y(t)\} = (\mathcal{L}\{y_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{y_p(t)\})'.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s),$$

e, assim,

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s), \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s).\end{aligned}$$

Mas, para $t \geq 0$,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{=y_0(t)} + \int_0^t \underbrace{\left[\overbrace{Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D}^{\mathcal{G}(t-\tau)} \right] u(\tau) d\tau}_{=y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t)*u(t) \text{ (convolução!)}}.$$

Concluimos então que (relembre que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$):

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}, \quad t \geq 0,$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{=Y_0(s)} + \underbrace{\left[\overbrace{C(sI - A)^{-1}B + D}^{=G(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{G}(t)\}} \right] U(s)}_{=Y_{esn}(s) = G(s)U(s)},$$

onde

$$G(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{G}(t)\} \in \mathbb{R}^{p \times m} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

é denominada de **matriz de transferência** do sistema. Logo, para $x_0 = 0$ (condições iniciais nulas), temos

$$Y(s) = Y_{esn}(s) = G(s)U(s),$$

ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix}}_{=Y(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}}_{=G(s) = (G_{ij}(s)) = \mathcal{L}\{\mathcal{G}(t)\}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}}_{=U(s)},$$

com

$$\mathcal{G}(t) = (g_{ij}(t)) = Ce^{At}B + \delta(t)D = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & \dots & g_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{p1}(t) & \dots & g_{pm}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Portanto,

$$\frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = G_{ij}(s) = \mathcal{L}\{g_{ij}(t)\}$$

é a **função de transferência** entre a j -ésima entrada $u_j(t)$ e a i -ésima saída $y_i(t)$ do sistema quando as demais entradas $u_k(t)$ são identicamente nulas ($k \neq j$), e $g_{ij}(t)$ é a **resposta ao impulso** correspondente.

Obs: Relembre de Álgebra Linear que, dada uma matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\det(M) \neq 0$, então a matriz inversa $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe e é determinada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Adj}(M),$$

onde $\text{Adj}(M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz adjunta de M : $\text{Adj}(M) = C'$, com $C = (c_{ij})$ e $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, onde $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ é a submatriz obtida de M ao se eliminar a linha i e a coluna j .

Em particular, quando $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ com $\det(M) \neq 0$, então

$$M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}.$$

Relembre que a matriz de transferência é dada por

$$G(s) = (G_{ij}(s)) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)} C \text{Adj}(sI - A)B + D.$$

Temos que cada elemento da matriz $\text{Adj}(sI - A)$ é um polinômio em s de grau menor ou igual a $n - 1$, e o polinômio $\det(sI - A)$ tem grau n . Portanto, cada elemento $G_{ij}(s)$ de $G(s)$ é uma função de transferência racional da forma $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$, onde $p_{ij}(s)$ e $q_{ij}(s)$ são polinômios em s com $\text{grau}(p_{ij}(s)) \leq \text{grau}(q_{ij}(s)) \leq n$. Note que:

1. Não há cancelamentos polo-zero num certo elemento $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ da matriz de transferência $G(s)$ **se e somente se** $q_{ij}(s) = \det(sI - A)$ (com $\text{grau}(q_{ij}(s)) = n$);
2. Se $D = 0$, então $\text{grau}(p_{ij}(s)) < \text{grau}(q_{ij}(s))$ (sem transferência direta) em **cada** elemento $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ de $G(s)$.

Dizemos que $p \in \mathbb{C}$ é um **polo** da matriz da transferência $G(s)$ quando p é um polo de **algum** elemento de $G(s)$. Assim, cada polo de cada elemento de $G(s)$ é um polo da matriz de transferência $G(s)$. Como os autovalores da matriz A são as raízes de $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$, concluímos que **todo polo** da matriz de transferência $G(s)$ é um **autovalor** da matriz A . No entanto, nem todo autovalor de A é um polo de $G(s)$ devido a possíveis cancelamentos polo-zero nos elementos de $G(s)$.

Além disso, como $x(t) = e^{At}x_0$, $t \geq 0$, é a solução da equação de estado $\dot{x} = Ax$ ($u = 0$) para a condição inicial $x(0) = x_0$, onde $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A)\} = e^{At}$, $t \geq 0$, decorre que todo polo de $X(s)$ (para $u = 0$) é um autovalor da matriz A . Assim, por simplicidade, de agora em diante denominaremos os autovalores da matriz A de **polos**. Portanto, concluímos que, se os polos (autovalores) da matriz A são

$$\begin{aligned} p_1, p_2 & \text{ (reais e distintos),} \\ p_3 = p_4 = p_5 = p & \text{ (real de multiplicidade 3),} \\ p_{6,7} = \alpha \pm j\beta & \text{ (complexo conjugado),} \\ p_{8,9} = p_{9,10} = \gamma \pm j\delta & \text{ (complexo conjugado de multiplicidade 2),} \\ & \vdots \end{aligned}$$

então cada elemento da matriz exponencial e^{At} (e, conseqüentemente, cada elemento do vetor $x(t) = e^{At}x_0$) é combinação linear dos modos característicos associados:

$$\begin{aligned} & e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \\ & e^{p t}, t e^{p t}, t^2 e^{p t}, \\ & e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), \\ & e^{\gamma t} \cos(\delta t), e^{\gamma t} \sin(\delta t), t e^{\gamma t} \cos(\delta t), t e^{\gamma t} \sin(\delta t), \\ & \vdots \end{aligned}$$

(de modo análogo ao que foi visto na disciplina “Sinais e Sistemas Lineares”!).

A noção de **zeros** de uma matriz de transferência $G(s)$ é mais difícil de ser colocada, e não será vista no nosso curso. Para maiores detalhes, veja o livro do Chen.

Exemplo 1: Considere o sistema ($n = 2$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= x, \end{aligned}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução $x(t)$, $t \geq 0$, para a condição inicial $x_0 = [2 \ 5]'$ considerando entrada nula ($u = 0$). Encontre também a matriz de transferência $G(s)$ e determine seus polos.

Solução: Note que

$$C = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que $x(t) = e^{At}x_0$, $t \geq 0$, com

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}, \quad t \geq 0.$$

Os polos de A são $p_1 = p_2 = -1$, e temos que

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 2s + 1}_{=(s+1)^2 = \det(sI - A)}} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At}, \quad t \geq 0.$$

Logo,

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 3te^{-t} \\ 5e^{-t} - 3te^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Como era esperado, note que cada elemento de e^{At} e de $x(t) = e^{At}x_0$ é combinação linear dos modos característicos associados: e^{-t} , te^{-t} . Por fim,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Os polos de $G(s)$ são $p_1 = p_2 = -1$, coincidindo com os polos da matriz A . Note que não tivemos cancelamentos polo-zero em $G_{11}(s)$ e em $G_{21}(s)$.

Exemplo 2: Para o sistema ($n = 3$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2.25 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} x,$$

temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+3)^2}{(s+2)(s+3)^2} \\ \frac{5(s+2)}{(s+2)(s+3)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{5}{(s+3)^2} \end{bmatrix}.$$

Os polos de A são $p_1 = -2, p_{2,3} = -3$, coincidindo com os polos de $G(s)$. No entanto, observe que houve um cancelamento polo-zero em $G_{11}(s)$ e em $G_{21}(s)$.

Exemplo 3: Para o sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x,$$

temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}.$$

Os polos de A são $p_1 = -2, p_2 = -3$, mas a função de transferência $G(s)$ possui somente um polo em $p = -3$ devido a um cancelamento polo-zero.

5.2 Estabilidade

Considere um sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

Definição (Estabilidade Interna): Assuma que $u = 0$ (entrada nula). Dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **estável** do sistema quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \text{ para } t \geq 0.$$

Quando $x^e = 0$ não é estável, dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **instável**. Dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema quando $x^e = 0$ é estável e, além disso, dada qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x(0) = 0$.

Definição (Estabilidade Externa): Assuma que $x(0) = 0$ (condição inicial nula). Dizemos que o sistema acima é **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) estável** quando, para qualquer entrada limitada $u(t)$, $t \geq 0$, temos que a **resposta estado nulo** $y(t) = y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t) * u(t)$, $t \geq 0$, é limitada. Quando o sistema não é BIBO estável, dizemos que o mesmo é **BIBO instável**. Isto significa que existe ao menos uma entrada **limitada** $u(t)$, $t \geq 0$, para a qual a resposta estado nulo $y(t) = y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t) * u(t)$, $t \geq 0$, **não é limitada**.

Obs: Relembre que uma aplicação $v: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ é **limitada** quando existe $0 < M_v < \infty$ tal que

$$\|v(t)\| \leq M_v, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Teorema: Considere um sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

Então:

1. O ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é instável caso a matriz A possua **algum** polo (autovalor) com parte real positiva (i.e. no SPD);
2. O ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** a matriz A possui **todos** os polos (autovalores) com parte real negativa (i.e. estão no SPE);
3. O sistema é BIBO estável **se e somente se** cada elemento $G_{ij}(s)$ da matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável, ou seja, todos os polos de $G(s)$ estão no SPE.

Obs 1: Relembre que todo polo de $G(s)$ é um polo (autovalor) da matriz A . Portanto: (a) se $G(s)$ possui algum polo no SPD, então o sistema é BIBO instável e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio instável; e (b) se todos os polos da matriz A estão no SPE, então o $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, além disso, o sistema é BIBO estável. No entanto, um sistema pode ser BIBO estável mas $x^e = 0$ não ser globalmente assintoticamente estável (devido a cancelamentos polo-zero instáveis nos elementos de $G(s)$).

Obs 2: Relembre que a solução de $\dot{x} = Ax$ para a condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0,$$

com

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A)\} = e^{At}, \quad t \geq 0.$$

Portanto, quanto mais afastados da origem estiverem os polos da matriz A no SPE, mais rápida será a convergência assintótica da solução $x(t)$ para $x^e = 0$.

Exemplo: Considere (novamente) o sistema ($n = 2$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x \quad (\text{i.e. } C = I).$$

Temos que

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A) = s(s + 2) + 1 = (s + 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow p_{1,2} = -1 \in \text{SPE}.$$

Logo, $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, portanto, o sistema é BIBO estável. A BIBO estabilidade também pode ser verificada diretamente (os polos de $G(s)$ são $p_{1,2} = -1 \in \text{SPE}$):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s + 1)^2} \\ \frac{s}{(s + 1)^2} \end{bmatrix}.$$

5.3 Controlabilidade e Observabilidade

Considere (novamente) um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du.$$

Definição: Dizemos que o sistema é **controlável** quando, cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada estado final $x_T \in \mathbb{R}^n$, existe uma entrada $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que a solução $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema para a condição inicial $x(0) = x_0$ satisfaz $x(T) = x_T$, para algum $T > 0$. Isto significa que sempre podemos levar o sistema de todo estado inicial para qualquer estado final desejado em tempo finito através de uma entrada adequada. Dizemos que o sistema é **não-controlável** quando ele não for controlável.

Definição: Dizemos que o sistema é **observável** quando, para todo estado inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ desconhecido, existe $T > 0$ tal que o conhecimento de **qualquer** entrada aplicada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e da saída correspondente $y(t) \in \mathbb{R}^p$ no intervalo de tempo $[0, T]$ é suficiente

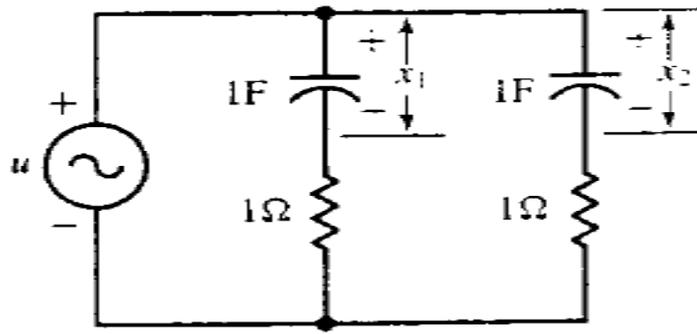


Figura 12 – Exemplo de um circuito elétrico **não-controlável**: a tensão de entrada $u(t)$ nunca é capaz de transferir as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para estados finais distintos $x_1(T) \neq x_2(T)$ a partir das condições iniciais $x_1(0) = x_2(0)$ (capacitores em paralelo).

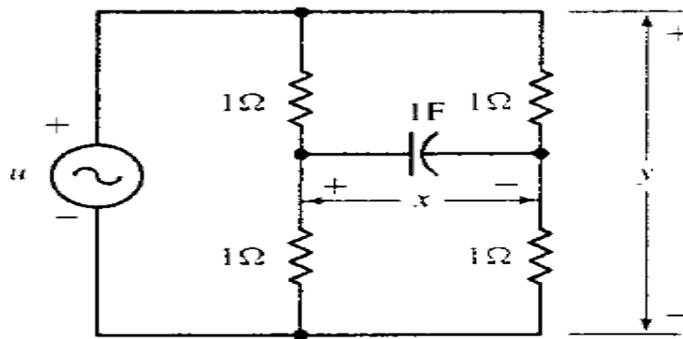


Figura 13 – Exemplo de um circuito elétrico **não-observável**: quando $u = 0$, temos que $y = 0$ devido à simetria do circuito. Assim, mesmo conhecendo $u(t) = y(t) = 0$, para $t \geq 0$, não temos como determinar de maneira única a tensão inicial $x(0)$ do capacitor.

para determinar de maneira única o estado inicial $x(0)$. Dizemos que o sistema é **não-observável** quando ele não for observável.

Para um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du,$$

definimos a **matriz de controlabilidade** por

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]_{n \times nm},$$

e a **matriz de observabilidade** por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{np \times n} .$$

Teorema: Considere um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

Então:

1. O sistema é controlável **se e somente se** $\text{posto}(\mathcal{C}) = n$ (posto completo de linha). Neste caso, dizemos simplesmente que o par (A, B) é controlável, pois a matriz de controlabilidade \mathcal{C} só depende das matrizes A e B ;
2. O sistema é observável **se e somente se** $\text{posto}(\mathcal{O}) = n$ (posto completo de coluna). Neste caso, dizemos simplesmente que o par (A, C) é observável, pois a matriz de observabilidade \mathcal{O} só depende das matrizes A e C ;
3. O par (A, C) é observável **se e somente se** o par (A', C') é controlável (**dualidade**);
4. Quando o sistema é SISO ($m = p = 1$), temos que o sistema é controlável e observável **se e somente se** não há cancelamentos polo-zero na função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Obs 1: Note que, quando $m = 1$ (uma única entrada), o sistema é controlável **se e somente se** $\det(\mathcal{C}) \neq 0$. E, quando $p = 1$ (uma única saída), o sistema é observável **se e somente se** $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

Obs 2: Temos os seguintes comandos no Matlab:

1. `sys = ss(A,B,C,D)` \Rightarrow define o modelo de estado $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$;
2. `G = tf(sys)` \Rightarrow calcula a matriz de transferência $G = C(sI - A)^{-1}B + D$;
3. `minreal(G)` \Rightarrow realiza os possíveis cancelamentos polo-zero na matriz de transferência G ;
4. `zpk(G)` \Rightarrow coloca cada elemento de G na forma fatorada;
5. `MC = ctrb(A,B)` \Rightarrow calcula a matriz de controlabilidade \mathcal{C} ;
6. `MO = obsv(A,C)` \Rightarrow calcula a matriz de observabilidade \mathcal{O} ;

7. $\text{svd}(M) \Rightarrow$ calcula os valores singulares de uma matriz M . O número de valores singulares não-nulos é igual a $\text{posto}(M)$. Utilizar o comando svd para calcular o posto de uma matriz M é numericamente mais robusto do que determinar o posto de M diretamente pelo comando $\text{rank}(M)$.

Exemplo 1 (Sistema Plataforma – usado no estudo de sistemas de suspensão de automóveis):

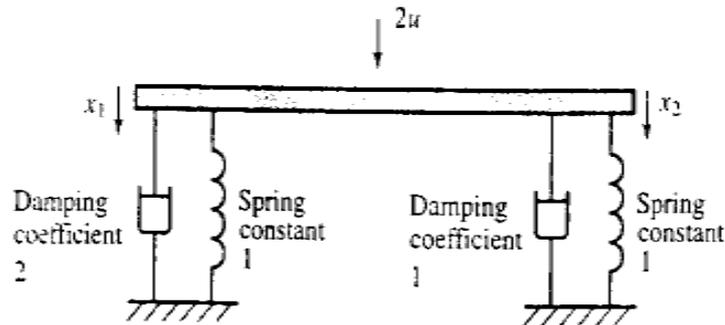


Figura 14 – Sistema plataforma.

A equação de estado deste sistema é dada por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u.$$

Como

$$\mathcal{C} = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}) = -0.25),$$

concluimos que o sistema é controlável.

Exemplo 2: Considere um sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 4$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(\mathcal{C}) = 4,}_{(\det(\mathcal{C})=36)}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(\mathcal{O}) = 4.}_{(\det(\mathcal{O})=1)}$$

Assim, o sistema é controlável e observável.

Exemplo 3: Considere (novamente) o sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \ (\det(\mathcal{C}) = 10),$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 1 \ (\det(\mathcal{O}) = 0).$$

Portanto, o sistema é controlável, mas não é observável. Ressaltamos que este sistema SISO não poderia ser controlável e observável, pois há um cancelamento polo-zero em sua função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}.$$

5.4 Estabilização por Realimentação de Estado

Motivação 1: Considere um motor CC modelado de maneira simplificada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)},$$

onde $y = \theta$ é a posição angular do eixo do motor e u é a tensão de entrada. Em termos de variáveis de estado, temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u, \end{aligned}$$

onde $x_1 = y = \theta$ e $x_2 = \dot{y} = \dot{\theta}$ (velocidade angular). Seja r uma referência do tipo degrau a ser rastreada pela saída y . Relembre da disciplina *Sistemas de Controle* que o controlador PD (na malha-inversa, e não na malha-direta!)

$$U(s) = R(s) - k_1 Y(s) - k_2 s Y(s),$$

ou seja,

$$u(t) = r(t) - k_1 y(t) - k_2 \dot{y}(t) = r(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t),$$

posiciona **arbitrariamente** no SPE os polos de malha-fechada de $G_{MF}(s) = Y(s)/R(s)$ por uma escolha adequada dos ganhos $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Motivação 2: Considere um sistema linear no plano modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado e $u \in \mathbb{R}$ é o controle. Suponha que os polos da matrix A são complexos conjugados no SPE, mas com parte real relativamente próxima do eixo imaginário, ou seja, a origem $x^e = 0$ é do tipo foco estável em malha-aberta ($u = 0$), mas com uma convergência assintótica relativamente lenta de $x(t)$ em direção a $x^e = 0$. O problema de controle é acelerar a convergência assintótica de $x(t)$ em direção a $x^e = 0$ em malha-fechada e assegurar que $x(t)$ não apresente oscilações ao longo do tempo.

Ao escolhermos uma realimentação da forma

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -Kx,$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são os ganhos a serem determinados com $K = [k_1 \ k_2]$, temos que o sistema em malha-fechada é dado por

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x.$$

Assim, se o vetor de ganho $K = [k_1 \ k_2]$ puder se escolhido de modo que os polos de $A - BK$ sejam posicionados arbitrariamente no SPE, então será possível solucionarmos o problema de controle em questão, pois poderemos assegurar que $x^e = 0$ seja do tipo nó estável (sem oscilações) em malha-fechada e com parte real dos polos relativamente afastada do eixo imaginário (convergência assintótica mais rápida).

De agora em diante, vamos considerar sistemas LTI modelados por (n estados, m entradas e p saídas)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

ou seja, $D = 0$ (sem transmissão direta entre o vetor de entrada e o vetor de saída).

Considere a **realimentação (linear) de estado**

$$u = r - Kx \quad (\text{ou seja, } u(t) = r(t) - Kx(t) \in \mathbb{R}^m, \text{ para } t \geq 0),$$

onde $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada (que não é necessariamente um vetor de referência, pois lembre que temos n estados, p saídas e m novas entradas em r) e $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz **constante**. Note que a i -ésima componente do controle $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ é dada por

$$u_i(t) = r_i(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij}x_j = r_i(t) - k_{i1}x_1(t) - \dots - k_{in}x_n(t), \quad t \geq 0,$$

para $i = 1, \dots, m$. Denominamos K de **matriz de ganho** ou, simplesmente, de **ganho de realimentação**. Substituindo tal realimentação no modelo de estado acima, obtemos o sistema em **malha-fechada**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Logo, a matriz de transferência em **malha-fechada** é dada por

$$G_{MF}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G_{MF}(s)R(s).$$

Desse modo, todo polo de $G_{MF}(s)$ é um polo (autovalor) da matriz $A - BK$, ou seja, uma realimentação de estado $u = r - Kx$ desloca os polos da matriz de transferência em **malha-aberta** $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ para os polos de $G_{MF}(s)$. No entanto, pode-se demonstrar que uma **realimentação de estado** da forma $u = r - Kx$ **não afeta os zeros** de $G(s)$, ou seja, $G(s)$ e $G_{MF}(s)$ possuirão os **mesmos zeros** caso não ocorra nenhum cancelamento polo-zero em $G_{MF}(s)$.

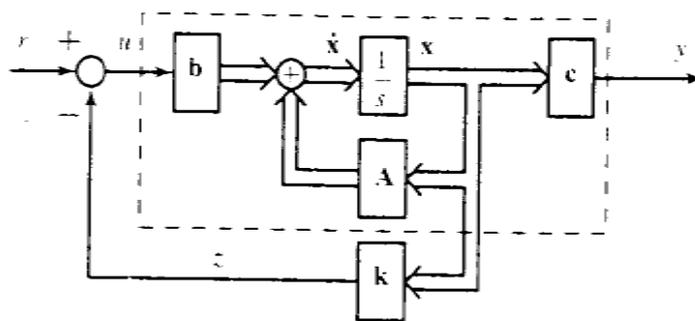


Figura 15 – Sistema em malha-fechada com a realimentação (linear) de estado $u = r - Kx$.

Definição (Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos): Encontrar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que os todos pólos da matriz $(A - BK)$ do sistema em malha-fechada sejam posicionados arbitrariamente no plano complexo, onde $u = r - Kx$ é a realimentação de estado. Em particular, se todos os pólos de $(A - BK)$ forem posicionados no SPE, então asseguramos que $x^e = 0$ é um ponto

de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada e que a matriz de transferência $G_{MF}(s)$ é BIBO estável.

O próximo resultado garante que a controlabilidade é preservada por uma realimentação de estado da forma $u = r - Kx$:

Teorema 1: O par (A, B) é controlável se e somente se o par $(A - KB, B)$ é controlável, onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é qualquer matriz constante.

E resultado abaixo assegura que o **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos** sempre tem solução para sistemas controláveis:

Teorema 2: Os pólos da matriz $A - BK$ podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se e somente se o par (A, B) é controlável.

Obs: Veremos como determinar uma matriz K adequada na Seção 5.7.

Exemplo: Considere o sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \quad 2]}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \quad AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}) = 2),$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \quad (\det(\mathcal{O}) = -10).$$

Logo, o sistema é controlável e observável. Temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s}{(s - 3.449)(s + 1.449)}.$$

Agora, considere a realimentação de estado

$$u = r - \underbrace{[3 \quad 1]}_{=K} x = r - 3x_1 - x_2.$$

Assim, o sistema em malha-fechada é dado por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A-BK} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} r, \quad y = \underbrace{[1 \quad 2]}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathcal{C}_{MF} = [B \quad (A - BK)B]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}_{MF}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}_{MF}) = 2),$$

$$\mathcal{O}_{MF} = \begin{bmatrix} C \\ C(A - BK) \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}_{MF}) = 1 \quad (\det(\mathcal{O}_{MF}) = 0).$$

Logo, o sistema em malha-fechada é controlável (como tinha que ser pelo Teorema 1 acima), mas não é observável. Como o sistema é SISO, sabemos que terá que ocorrer um cancelamento polo-zero na função de transferência em malha-fechada (veja o Teorema da Seção 5.3). De fato, a função de transferência em malha-fechada é dada por

$$G_{MF}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{2s}{s(s-1)} = \frac{2}{(s-1)}.$$

Concluimos assim que uma realimentação de estado da forma $u = r - Kx$ pode fazer com que um sistema observável se torne não-observável em malha-fechada.

5.5 Estimador de Estado

Definimos na seção anterior o conceito de realimentação de estado:

$$u = r - Kx.$$

Relembre que isto significa que

$$u(t) = r(t) - Kx(t), \quad t \geq 0.$$

Sempre que escolhemos uma dada realimentação de estado, fica implícito que estamos assumindo que todas as variáveis de estado $x_1(t), \dots, x_n(t)$ do vetor de estado $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^n$ podem ser realimentadas, ou seja, todas elas podem ser medidas por sensores. No entanto, isto nem sempre será possível, pois: (a) podemos não ter acesso direto a certas variáveis de estado (a corrente num certo indutor, por exemplo); (b) os sensores necessários podem não estar disponíveis para uso ou serem em número insuficiente (precisamos de dois tacogeradores, mas só temos um disponível, por exemplo); e/ou (c) os sensores que precisamos são muito caros.

Uma alternativa para tal problema é a seguinte: projetarmos um dispositivo que estime as variáveis de estado que não podem ser medidas diretamente. Tal sistema é denominado de **estimador de estado** ou **observador de estado**. Denotaremos por \hat{x} uma certa estimação do vetor de estado x .

Considere um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx.$$

Assuma que as matrizes A, B, C são conhecidas e que tanto a entrada $u(t)$ quanto a saída $y(t)$ podem ser medidas, para $t \geq 0$. No entanto, consideramos que o vetor de estado $x(t)$ não pode ser medido. O problema é então obtermos uma estimação adequada $\hat{x}(t)$ do vetor estado $x(t)$, para $t \geq 0$.

Uma ideia bem simples é definirmos um **estimador de estado de malha-aberta** como uma réplica da equação de estado sistema original:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu.$$

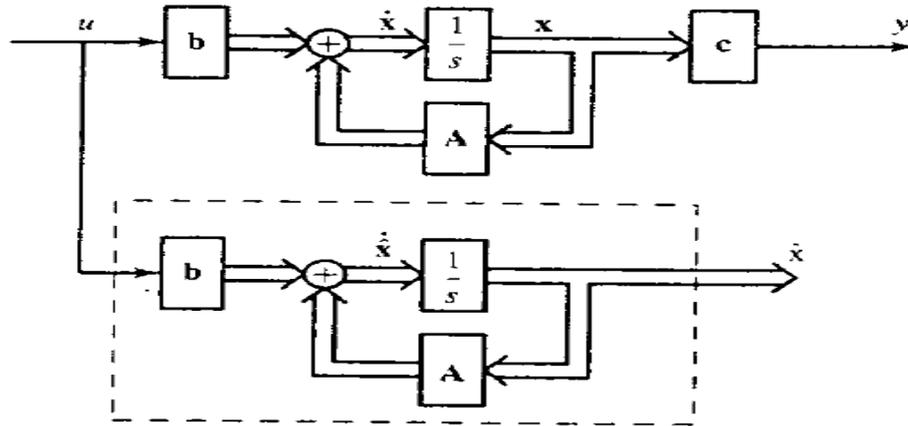


Figura 16 – Estimador de estado de malha-aberta, o qual pode ser implementado através de amp-ops, por exemplo.

Assim, se $\hat{x}(0) = x(0)$, então, para qualquer entrada aplicada $u(t)$, $t \geq 0$, teremos que $\hat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq 0$. Desse modo, o problema passa a ser determinarmos a condição inicial $x(0)$. Suponha que o sistema original é observável. Logo, podemos determinar $x(0)$ a partir de $u(t)$ e $y(t)$, para t pertencente a um certo intervalo, digamos $t \in [0, t_1]$. Assim, é possível calcularmos $x(t_2)$ a partir da expressão analítica explícita da solução $x(t)$ (veja a Seção 2.1), onde $t_2 \geq t_1$, e então escolhemos $\hat{x}(t_2) = x(t_2)$. Com isso, $\hat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq t_2$, ou seja, teremos uma estimacão exata do vetor de estado $x(t)$. Concluímos então que se o sistema original for observável, então o estimador de estado de malha-aberta acima soluciona o problema de estimacão. No entanto, tal estimador de malha-aberta apresenta algumas limitaes. Primeiramente, toda vez que formos utilizar o estimador, sua condio inicial terá que ser determinada a partir da propriedade de observabilidade do sistema original. Além disso, ao consideramos o erro de estimacão $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, temos que o mesmo  soluço da seguinte equaco de estado

$$\dot{e} = x - \hat{x} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu) = A(x - \hat{x}) = Ae.$$

Note que $e = 0$  um ponto de equilíbrio. Assim, se $e(t_2) = x(t_2) - \hat{x}(t_2) = 0$ (i.e. $x(t_2) = \hat{x}(t_2)$), então $e(t) = 0$, ou seja, $\hat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq t_2$. Mas, na prática, sempre teremos que $\hat{x}(t_2) \neq x(t_2)$ devido a pequenas perturbaes/ruídos externos. O problema então se agrava quando a matriz A possui algum polo com parte real positiva, de modo que $e = 0$

é um ponto de equilíbrio instável (relembre que $e(t) = \exp(At)e(t_2)$, $t \geq t_2$). Em tal caso, mesmo que tenhamos $\hat{x}(t_2) \cong x(t_2)$, poderemos ter uma magnitude relativamente grande para o erro de estimação $e(t)$ no decorrer do tempo.

Estas restrições podem ser facilmente contornadas se injetarmos a saída $y(t)$ do sistema no estimador de estado de malha-aberta através do acréscimo de um termo de correção da forma $L(y - C\hat{x})$, onde $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é uma matriz **constante**:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}).$$

Ressaltamos que, como $y = Cx$, podemos considerar que $\hat{y} = C\hat{x}$ é uma estimação da saída y . Assim, o termo de correção adicionado $L(y - C\hat{x})$ corresponde a multiplicarmos o erro de estimação da saída $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$ pela matriz (de ganho) L . Com tal modificação, temos que a dinâmica do erro de estimação do estado $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ é dada pela seguinte equação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})] \\ &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})] \\ &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e. \end{aligned}$$

Desse modo, mostramos que estimador de estado definido por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}),$$

assegura que

$$\dot{e} = (A - LC)e,$$

onde $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ é o erro de estimação. Suponha que a matriz L foi escolhida de modo que todos os polos da matriz $A - LC$ estão no SPE. Assim, $e = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Em particular, dada qualquer condição inicial $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ para o erro de estimação, teremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0,$$

ou seja, o erro de estimação $e(t)$ converge assintoticamente para zero quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, mesmo que em uma certa situação prática seja possível determinarmos uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, sempre teremos que $\hat{x}(0) \neq x(0)$ devido a pequenas perturbações/ruídos externos. No entanto, isto não será problema, pois o estimador de estado acima garante que $\hat{x}(t) \cong x(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande. Além disso, em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, sempre poderemos escolher $\hat{x}(0) = 0$, pois teremos $\hat{x}(t) \cong x(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande.

Considere uma planta (sistema LTI) modelada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Assuma que as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são conhecidas e que tanto a entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ quanto a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ podem ser medidas, para $t \geq 0$. Denominamos o sistema

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

de **estimador de estado assintótico** (ou **observador de estado assintótico** ou, simplesmente, **observador**) da planta (5.1) acima quando, para qualquer erro de estimação inicial $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. A matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é denominada de **matriz de ganho do observador**. De acordo com a exposição anterior, este sistema corresponderá a um observador caso todos os polos da matriz $A - LC$ estejam no SPE, pois $\dot{e} = (A - LC)e$. O próximo resultado estabelece que isto será atingido sempre que a planta (5.1) for observável.

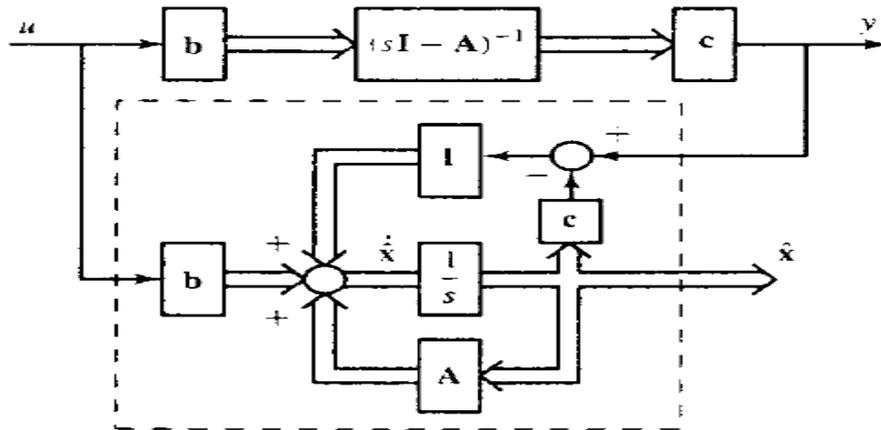


Figura 17 – Planta (acima) com seu observador (abaixo).

Teorema: Todos os polos da matriz $A - LC$ podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ **se e somente** o par (A, C) é observável.

Obs: Veremos como determinar uma matriz L adequada na Seção 5.7.

5.6 Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas e p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Relembre da Seção 5.5. que, fixada uma realimentação de estado $u = r - Kx$, temos que o sistema em malha-fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

e que todos os polos da matriz $A - BK$ podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par (A, B) for controlável. Relembre também da Seção 5.6. que, caso o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ da planta não puder ser realimentado (medido), podemos utilizar o observador (assintótico)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

para obtermos uma estimação $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, sendo que todos os polos de $A - LC$ ($\dot{e} = (A - LC)e$, com $e = x - \hat{x}$) podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par (A, C) for observável. Surge então a seguinte pergunta: Na situação em que o vetor de estado $x(t)$ da planta não pode ser realimentado (medido), o que acontece se realimentarmos o estado estimado $\hat{x}(t)$ no lugar de $x(t)$, ou seja, se aplicarmos na planta

$$u = r - K\hat{x} \quad ?$$

Isto é ilustrado na Figura abaixo. Tal estrutura de controle é denominada de **configuração controlador-observador**. Note que o vetor de estado deste sistema é $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Vamos responder na sequência a pergunta que acabamos de levantar.

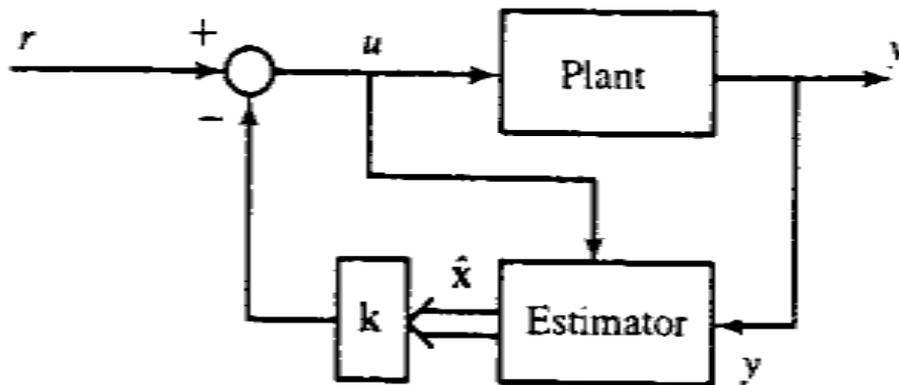


Figura 18 – Configuração controlador-observador.

Temos a planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

e o observador

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.$$

Substituindo $y = Cx$ no observador, substituindo

$$u = r - K\hat{x}$$

em ambos, e definindo o vetor de estado $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$, obtemos assim o modelo de estado da configuração controlador-observador:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}} r, \\ y &= \underbrace{[C \ 0]}_{=\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}. \end{aligned}$$

Vamos agora representar o sistema controlador-observador em novas coordenadas $z = T\tilde{x}$, onde $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é invertível. Isto permitirá responder nossa pergunta de maneira fácil e direta. Considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}.$$

Note que $T^{-1} = T$. Nas novas coordenadas $z = T\tilde{x}$, o modelo de estado do sistema controlador-observador é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\tilde{x}} = T(\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r) = T\tilde{A} \underbrace{\tilde{x}}_{=T^{-1}z} + T\tilde{B}r = T\tilde{A}T^{-1}z + T\tilde{B}r \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=T\tilde{A}T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=T\tilde{B}} r, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} = \tilde{C}T^{-1}z \\ &= \underbrace{[C \ 0]}_{=\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z}. \end{aligned}$$

Relembre de Álgebra Linear que como a matriz $T\tilde{A}T^{-1}$ é bloco triangular, temos que o conjunto dos autovalores de $T\tilde{A}T^{-1}$ é igual à união (com repetição) do conjunto dos autovalores de $A - BK$ com o conjunto dos autovalores de $A - LC$. Relembre também que

os autovalores das matrizes \tilde{A} e $T\tilde{A}T^{-1}$ coincidem, pois

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - T\tilde{A}T^{-1}) &= \det(\lambda \underbrace{TT^{-1}}_{=I} - T\tilde{A}T^{-1}) = \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) \\ &= \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) = \det((\lambda I - A)\underbrace{T^{-1}T}_{=I}) \\ &= \det(\lambda I - A).\end{aligned}$$

Mostramos assim que os autovalores da matriz \tilde{A} do sistema controlador-compensador são a união (com repetição) dos autovalores das matrizes $A - BK$ e $A - LC$.

Suponha que a planta é controlável e observável. Concluimos então que (agora chegamos na resposta da pergunta levantada):

- (a) Os autovalores da matriz \tilde{A} do sistema controlador-compensador podem ser arbitrariamente posicionados SPE por uma escolha **independente** das matrizes de ganho K e L : K corresponde ao controlador $u = r - K\hat{x}$ (realimentação baseada no estado estimado para os autovalores de $A - BK$) e L corresponde ao observador $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$ (para os autovalores de $A - LC$). Isto assegurará que $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e, assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \hat{x}(t)) = (0, 0)$ para qualquer $\tilde{x}(0) = (x(0), \hat{x}(0))$ (com $r = 0$). Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ (com $r = 0$).
- (b) O projeto das matrizes de ganho K e L para o posicionamento dos polos da matriz \tilde{A} no SPE é realizado **como se** o vetor de estado $x(t)$ da planta pudesse ser efetivamente medido e utilizássemos o controlador $u = r - Kx$ na planta (o sistema em malha-fechada seria $\dot{x} = (A - BK)x + Br$, $y = Cx$), e **como se** o observador $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$ para a planta fosse independente de tal realimentação de estado! Tal propriedade é denominada de **princípio da separação**.
- (c) Para o sistema controlador-observador, lembre que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

Assim, percebemos que a dinâmica do erro de estimação $e = x - \hat{x}$ é dada por $\dot{e} = (A - LC)e$, ou seja, a mesma independe do vetor de estado $x(t)$ e do ganho K . Suponha que os polos de $A - LC$ são rápidos, ou seja, estão relativamente longe da origem (no SPE!). Assim, para $t \geq 0$ suficientemente grande, tudo se passa como se $e(t) = 0$, ou seja, $\hat{x}(t) = x(t)$ (estimação exata). Consequentemente, para $t \geq 0$ grande, percebemos que tudo se passa como se

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br, \quad y = Cx,$$

o que coincide com a planta em malha-fechada com a realimentação de estado $u = r - Kx$! **Uma regra prática é que os pólos dominantes de $A - LC$ sejam de 2 a 5 vezes mais rápidos que os polos dominantes de $A - BK$ (SPE!).**

- (d) Pode-se demonstrar que a matriz de transferência do sistema controlador-observador é dada por

$$G(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G(s)R(s),$$

o que coincide a matriz de transferência da planta em malha-fechada com a realimentação de estado $u = r - Kx$ (veja a Seção 2.4.)! Justificativa: a matriz de transferência pressupõe que a condição inicial do sistema controlador-observador é nula, ou seja, $\hat{x}(0) = x(0) = 0$. Logo, $e(0) = 0$ e, assim, $e(t) = 0, t \geq 0$. Desse modo, a relação entre $R(s)$ e $Y(s)$ é determinada por (veja o Item (c) acima)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Exemplo: Considere a planta SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \ 0]}_{=C} x = x_1.$$

Os autovalores de A são: $\pm\sqrt{20}$. Logo, a origem $x = 0$ é instável ($u = 0$). Devemos então projetar um controlador que estabilize o sistema em malha-fechada. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \ (\det(\mathcal{C}) = -1), \\ \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \ (\det(\mathcal{O}) = 1). \end{aligned}$$

Logo, o sistema é controlável e observável, e assim, podemos posicionar arbitrariamente os polos de $A - BK$ e $A - LC$ no SPE para uma escolha adequada de K e L .

Note que $y = x_1$. Suponha que a variável de estado x_2 não pode ser medida. Pelo princípio da separação, podemos projetar as matrizes de ganho K (da realimentação do estado estimado) e L (do observador) de maneira independente e como se pudessemos aplicar a realimentação de estado $u = -Kx$ na planta. Considere que:

- Os polos desejados referentes à realimentação, i.e. para a matriz $A - BK$ do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado $u = -Kx$, são: $-1.8 \pm j2.4$;
- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz $A - LC$ de $\hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$, são: $-8, -8$.

Uma escolha adequada é (mostraremos na Seção 5.7 os cálculos realizados na determinação de K e L):

$$K = [29.6 \ 3.6], \quad L = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}.$$

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4,$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8.$$

Como o estado x_2 não pode ser realimentado (medido), devemos utilizar a configuração controlador-observador com:

- Controlador: $u = -K\hat{x} = -29.6\hat{x}_1 - 3.6\hat{x}_2$ (realimentação do estado estimado);
- Observador: $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$.

Logo, os polos da configuração controlador-observador são: $-1.8 \pm j2.4, -8, -8 \in \text{SPE}$. Assim, $\tilde{x} = (x, \hat{x}) = (0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Simulações: veja o arquivo `ExemploControladorObservador.mdl` no Moodle

5.7 Determinação das Matrizes de Ganho K e L para Imposição de Polos

1. Caso SISO ($m = p = 1$)

- **Determinação de $K = [k_1 \ \dots \ k_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$**

1. Verifique que par (A, B) é controlável ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$);
2. Seja $\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ (polinômio característico de A);
3. Seja $v_n = B$ e calcule $v_{i-1} = Av_i + a_{i-1}B \in \mathbb{R}^n$, $i = n, \dots, 2$ (vetores coluna);
4. Defina a matriz $T = [v_1 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
5. Sejam p_1, \dots, p_n os polos desejados para $A - BK$. Assim, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por $\det(sI - (A - BK)) = (s - p_1) \cdots (s - p_n) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0$;
6. Defina o vetor $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ \dots \ d_{n-1} - a_{n-1}]$;
7. Escolha $K = \bar{K}T^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Isto garante que os polos de $A - BK$ são p_1, \dots, p_n .

Demonstração: Suponha que o par (A, B) é controlável e que o polinômio característico da matriz A é dado por

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Considere a mudança de coordenadas $z = T^{-1}x$, onde T é a matriz invertível determinada pelo algoritmo acima. Pode-se mostrar que, nas novas coordenadas z , o sistema é descrito por (**forma canônica de controlabilidade**):

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=\bar{A} = T^{-1}AT} z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\bar{B} = T^{-1}B} u.$$

Logo, para

$$u = -Kx = -\underbrace{\bar{K}T^{-1}}_{=z}x = -\bar{K}z = -[d_0 - a_0 \ \dots \ d_{n-1} - a_{n-1}]z,$$

temos que, nas coordenadas z , o sistema em malha-fechada é descrito por

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix}}_{=\bar{A} - \bar{B}\bar{K}} z.$$

Como $T^{-1}(A - BK)T = \bar{A} - \bar{B}\bar{K}$, concluímos que:

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BK)) &= \det(sI - (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \\ &= (s - p_1) \cdots (s - p_n). \end{aligned}$$

Obs 1: Pode-se mostrar que $\det(T) = \det(\mathcal{C})$. Relembre que $T^{-1} = \text{Adj}(T)/\det(T)$. Logo, se o par (A, B) está no limiar da controlabilidade, ou seja, $\det(\mathcal{C}) \cong 0$, então os elementos da matriz de ganho $K = \bar{K}T^{-1}$ poderão assumir valores relativamente elevados, comprometendo assim a aplicação do sinal de controle $u(t) = -Kx(t)$ (ou $u(t) = -K\hat{x}(t)$) na planta devido às limitações práticas do atuador.

Obs 2: Quando o par (A, B) não é controlável, pode-se mostrar que a matriz A possui um conjunto de polos que ficam “trancados”, no sentido de que a matriz $A - BK$ possuirá esses mesmos polos para qualquer escolha de K . Quando os polos da matriz A que ficam “trancados” estão no SPE, dizemos que o par (A, B) é **estabilizável**, e então podemos encontrar K de forma que todos os polos de $A - BK$ estejam no SPE (mas não podem ser escolhidos arbitrariamente!). Tais resultados serão vistos na Seção 5.11.

• **Determinação de $L = [\ell_1 \ \dots \ \ell_n]' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (por dualidade)**

1. Verifique que par (A, C) é observável ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$);

2. Sejam p_1, \dots, p_n os polos desejados para $A - LC$;
3. Seja $\tilde{A} = A'$ e $\tilde{B} = C'$. Assim, o par (\tilde{A}, \tilde{B}) é controlável;
4. Siga o procedimento acima de modo a determinar $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que os polos de $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ sejam p_1, \dots, p_n (relembre que $\det(sI - A) = \det(sI - A')$);
5. Escolha $L = \tilde{K}' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Isto garante que os polos de $A - LC$ são p_1, \dots, p_n , pois $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})' = (\tilde{A})' - (\tilde{K})'(\tilde{B})' = A - LC$.

Obs 1: Pode-se mostrar que $\det(L) = \det(\mathcal{O})$. Relembre que $L^{-1} = \text{Adj}(L)/\det(L)$. Logo, se o par (A, C) está no limiar da controlabilidade, ou seja, $\det(\mathcal{O}) \cong 0$, então os elementos da matriz L poderão assumir valores relativamente elevados, comprometendo assim a implementação do observador devido à presença de ruídos externos em situações práticas.

Obs 2: Quando o par (A, C) não é observável, pode-se mostrar que a matriz A possui um conjunto de polos que ficam “trancados”, no sentido de que a matriz $A - LC$ possuirá esses mesmos polos para qualquer escolha de L . Quando os polos da matriz A que ficam “trancados” estão no SPE, dizemos que o par (A, C) é **detectável**, e então podemos encontrar L de forma que todos os polos de $A - LC$ estejam no SPE (mas não podem ser escolhidos arbitrariamente!). Tais resultados serão vistos na Seção 5.11.

2. Caso MIMO

- **Determinação de $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$**

1. Verifique que par (A, B) é controlável ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$);
2. Sejam p_1, \dots, p_n os polos desejados para $A - BK$;
3. Escolha quaisquer $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $N \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (vetor coluna) de modo que o par $(A - BM, BN)$ seja controlável;
4. Sejam $A_1 = A - BM \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_1 = BN \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Assim, o par (A_1, B_1) é controlável;
5. Siga o procedimento anterior do caso SISO de modo a determinar $K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que os polos de $A_1 - B_1K_1$ sejam p_1, \dots, p_n ;
6. Escolha $K = M + NK_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Isto garante que os polos de $A - BK$ são p_1, \dots, p_n .

Obs: No Passo 3 acima, o **probabilidade** de escolhermos M, N de modo que o par $(A - BM, BN)$ seja **não-controlável** é igual a **zero**, ou seja, a **probabilidade** do par $(A - BM, BN)$ ser **controlável** para um “chute aleatório” de M, N é igual a **um**. Existem métodos para se determinar a matriz de ganho K no caso MIMO que não envolvem “chutes aleatórios”. Para maiores detalhes, veja o livro do Chen. No entanto, isto não será visto no nosso curso. O comando **place** do Matlab utiliza um algoritmo de otimização para

determinar K , com a restrição de que a multiplicidade de cada polo não seja superior ao número m de entradas.

• **Determinação de $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (por dualidade)**

1. Verifique que par (A, C) é observável ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$);
2. Sejam p_1, \dots, p_n os polos desejados para $A - LC$;
3. Seja $\tilde{A} = A'$ e $\tilde{B} = C' \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Assim, o par (\tilde{A}, \tilde{B}) é controlável;
4. Siga o procedimento anterior de modo a determinar $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que os polos de $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ sejam p_1, \dots, p_n ;
5. Escolha $L = \tilde{K}' \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Isto garante que os polos de $A - LC$ são p_1, \dots, p_n .

Obs: Quando (A, B) é controlável e (A, C) é observável, sabemos que podemos posicionar arbitrariamente os polos de $A - BK$ (realimentação) e de $A - LC$ (observador) no SPE para uma escolha adequada das matrizes de ganho K e L , respectivamente. No entanto, uma dificuldade técnica é como escolher tais polos (de maneira geral temos vários polos a serem posicionados). Por exemplo, os polos de $A - BK$, referentes à realimentação $u = -Kx$, influenciam no regime transitório de $x(t)$ (oscilação e taxa de convergência) e também no esforço de controle (magnitude e energia de $u(t) = -Kx(t)$). O método denominado **Controle Ótimo** posiciona os polos de $A - BK$ e determina a matriz de ganho K de modo a minimizar uma certa função custo, a qual corresponde a uma ponderação entre a energia do vetor de estado $x(t)$ e a energia da realimentação $u(t) = -Kx(t)$. Por outro lado, os polos de $A - LC$, referentes ao observador, determinam o regime transitório do erro de estimação $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, mas também influenciam na atenuação/amplificação de ruídos externos. O **Filtro de Kalman** posiciona os polos de $A - LC$ e determina a matriz de ganho L do observador de modo a minimizar o efeito de tais ruídos no sistema. Tanto **Controle Ótimo** quanto o **Filtro de Kalman** serão vistos posteriormente no nosso curso (Lab 10 e Lab 11, respectivamente).

Exemplo 1: Considere novamente a planta SISO do exemplo da Seção 5.6:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \ 0]}_{=C} x = x_1.$$

Relembre que:

- Os polos desejados referentes ao controlador, i.e. para a matriz $A - BK$ do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado $u = -Kx$, são: $-1.8 \pm j2.4$;
- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz $A - LC$ da dinâmica $\dot{e} = (A - LC)e$ do erro, são: $-8, -8$.

Vamos agora determinar K e L através dos procedimentos apresentados acima.

Começaremos calculando K :

1. Já verificamos na Seção 2.6 que o sistema é controlável;
2. $\det(sI - A) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_0$ (polinômio característico de A);
3. Considere

$$v_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = Av_2 + a_1B = AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

4. Considere $T = [v_1 \ v_2] = I$;
5. Os polos desejados para $A - BK$ são: $-1.8 \pm j2.5$. Assim, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por $\det(sI - (A - BK)) = (s - (-1.8 + j2.4))(s - (-1.8 - j2.4)) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + d_1s + d_0$;
6. Defina o vetor $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [29.6 \ 3.6]$;
7. Escolha $K = \bar{K}T^{-1} = \bar{K} = [29.6 \ 3.6]$.

Agora, calcularemos L :

1. Já verificamos na Seção 2.6 que o sistema é observável;
2. Sejam

$$\tilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. $\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_0$;
4. Considere

$$v_2 = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \tilde{A}v_2 + a_1\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

5. Considere $T = [v_1 \ v_2] = I$;
6. Os polos desejados para $A - LC$ são: $-8, -8$. Assim, o polinômio característico de $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ é dado por $\det(sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})) = (s - (-8))(s - (-8)) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + d_1s + d_0$;
7. Defina o vetor $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [84.6 \ 16]$;
8. Calcule $\tilde{K} = \bar{K}T^{-1} = \bar{K} = [84.6 \ 16]$, e então escolha $L = \tilde{K}' = [84.6 \ 16]'$.

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4,$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8.$$

Exemplo 2: Considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \ (\det(\mathcal{C}) = 100),$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \ (\det(\mathcal{O}) = -1).$$

Logo, (A, B) é controlável e (A, C) é observável. Considere que os polos desejados para $A - BK$ são $\{-4, -4\}$, e que os polos desejados para $A - LC$ são $\{-12, -12\}$.

Começaremos calculando K :

1. Já verificamos que (A, B) é controlável;
2. $\det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1s + a_0$ (polinômio característico de A);
3. Considere

$$v_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad v_1 = Av_2 + a_1B = AB + B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix};$$

4. Considere $T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$;
5. Os polos desejados para $A - BK$ são: $-4, -4$. Assim, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por $\det(sI - (A - BK)) = (s + 4)(s + 4) = s^2 + 8s + 16 = s^2 + d_1s + d_0$;
6. Defina o vetor $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [16 - 5\sqrt{2} \ 7]$;
7. Escolha $K = \bar{K}T^{-1} = [0.8929 \ 0.7]$.

Agora, calcularemos L :

1. Já verificamos que (A, C) é observável;

2. Sejam

$$\tilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & -5\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. $\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1s + a_0;$

4. Considere

$$v_2 = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \tilde{A}v_2 + a_1\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

5. Considere

$$T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Os polos desejados para $A - LC$ são: $-12, -12$. Assim, o polinômio característico de $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ é dado por $\det(sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})) = (s + 12)(s + 12) = s^2 + 24s + 144 = s^2 + d_1s + d_0;$

7. Defina o vetor $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [144 - 5\sqrt{2} \ 23];$

8. Calcule $\tilde{K} = \bar{K}T^{-1} = [23 \ 113.9289]$, e então escolha $L = \tilde{K}' = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}.$

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4,$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -23 & 1 \\ -121 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -12.$$

Exemplo 3: Considere o pêndulo invertido linear abordado no Lab 4, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14.715 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4.905 \\ 1 & 0 & 4.905 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -14.715 \\ -1 & 0 & -14.715 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 4 \ (\det(\mathcal{C}) = 96.236)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.905 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 4 \ (\det(\mathcal{O}) = 24.059).$$

Logo, (A, B) é controlável e (A, C) é observável. Considere que os polos desejados para $A - BK$ são $\{-2, -2, -2, -2\}$ ($t_s \cong 3.0s$), e que os polos desejados para $A - LC$ são $\{-4, -4, -4, -4\}$.

Começaremos calculando K :

1. Já verificamos que (A, B) é controlável.
2. $\det(sI - A) = s^4 - 14.715s^2 = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$ (polinômio característico de A)
3. Considere

$$v_4 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = Av_4 + a_3B = AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = Av_3 + a_2B = Av_3 - 14.715B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_1 = Av_2 + a_1B = Av_2 = \begin{bmatrix} -9.81 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Considere

$$T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] = \begin{bmatrix} -9.81 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9.81 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Os polos desejados para $A - BK$ são: $-2, -2, -2, -2$. Assim, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por $\det(sI - (A - BK)) = (s + 2)^4 = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0$.

6. Defina o vetor

$$\bar{K} = [d_0 - a_0 \quad d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad d_3 - a_3] = [16 \quad 32 \quad 38.715 \quad 8].$$

7. Escolha

$$K = \bar{K}T^{-1} = [-1.630989 \quad -3.261978 \quad -40.345989 \quad -11.261978].$$

Agora, calcularemos L :

1. Já verificamos que (A, C) é observável.

2. Sejam

$$\tilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.905 & 0 & 14.715 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. $\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A) = s^4 - 14.715s^2 = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$.

4. Considere

$$v_4 = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \tilde{A}v_4 + a_3\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \tilde{A}v_3 + a_2\tilde{B} = \tilde{A}v_3 - 14.715\tilde{B} = \begin{bmatrix} -14.715 \\ 0 \\ -4.905 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_1 = \tilde{A}v_2 + a_1\tilde{B} = \tilde{A}v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -14.715 \\ 0 \\ -4.905 \end{bmatrix}.$$

5. Considere

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14.715 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14.715 \\ 0 & 0 & -4.905 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.905 \end{bmatrix}.$$

6. Os polos desejados para $A - LC$ são: $-4, -4, -4, -4$. Assim, o polinômio característico de $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ é dado por $\det(sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})) = (s+4)^4 = s^4 + 16s^3 + 96s^2 + 256s + 256 = s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0$.

7. Defina o vetor

$$\bar{K} = [d_0 - a_0 \quad d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad d_1 - a_1] = [256 \quad 256 \quad 110.715 \quad 16].$$

8. Calcule $\tilde{K} = \bar{K}T^{-1}$, e então escolha

$$L = \tilde{K}' = \begin{bmatrix} 16.000000 \\ 110.715000 \\ -100.191641 \\ -384.336641 \end{bmatrix}.$$

Verificação:

$$A - BK \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3,4} \cong -2,$$

$$A - LC \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2,3,4} \cong -4.$$

5.8 Projeto: Estabilização de um Pêndulo Invertido com Base na Configuração Controlador-Observador (Lab 4)

Objetivos: Vamos inicialmente analisar algumas das propriedades de um modelo linear simplificado de um pêndulo invertido. Na sequência, projetaremos uma realimentação de estado com o objetivo de se estabilizar o pêndulo invertido, ou seja, manter o pêndulo equilibrado na vertical em repouso. Por fim, com base no princípio da separação, vamos projetar um observador de estado para então utilizarmos a configuração controlador-observador na estabilização do sistema.

5.8.1 Modelo Linear Simplificado de um Pêndulo Invertido

Considere o pêndulo invertido mostrado abaixo:

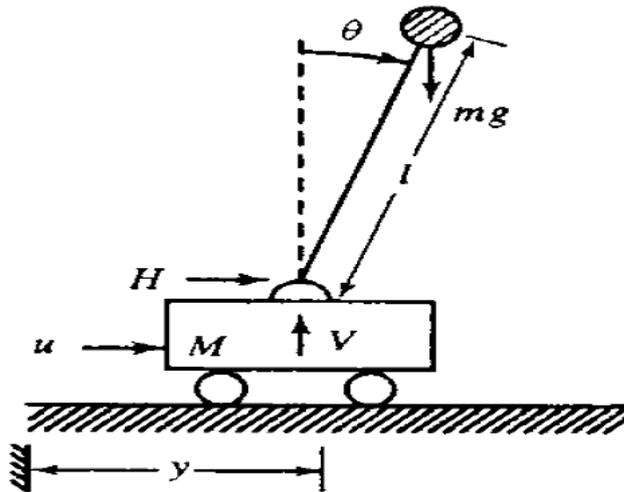


Figura 19 – Pêndulo invertido.

Um modelo de estado linear simplificado deste sistema é dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (m+M)g/(ML) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/(ML) \end{bmatrix} u,$$

$$y = x_1,$$

onde:

- $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ é o vetor de estado;
- $x_1 = y$ é a posição do carro;

- $x_2 = \dot{y}$ é a velocidade do carro;
- $x_3 = \theta$ é o ângulo da haste do pêndulo com o eixo vertical;
- $x_4 = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da haste do pêndulo;
- u é a força aplicada no carro (controle);
- m é a massa da esfera do pêndulo, M é a massa do carro, L é o comprimento da haste, e g é a aceleração de gravidade.

Esse modelo é válido quando $\theta \cong 0$ e $\dot{\theta} \cong 0$. Veja o livro do Chen, Exemplo 2.8, p. 22, para maiores detalhes.

5.8.2 Procedimentos

Considere que $m = 0.5\text{kg}$ (massa da esfera do pêndulo), $M = 1\text{kg}$ (massa do carrinho), $L = 1\text{m}$ (comprimento da haste) e $g = 9.81\text{m/s}^2$ (aceleração da gravidade).

1. A origem $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável (estabilidade interna)? Justifique, e realize algumas simulações para comprovar sua resposta.
2. Encontre a função de transferência $G(s)$ do sistema. O sistema é BIBO-estável (estabilidade externa)? Justifique sua resposta. Note que o sistema apresenta um zero no SPD (fase não-mínima).
3. Verifique a controlabilidade e a observabilidade do sistema (a saída $y = x_1$ é a posição do carro). Note que os polos de $G(s)$ coincidem com os polos (autovalores) da matriz A . Isto era esperado? Justifique sua resposta.
4. O sistema continua sendo observável caso a saída fosse $y = x_3$ (ângulo da haste do pêndulo)? Justifique sua resposta. Observe que há um cancelamento pólo-zero na função de transferência associada à saída $y = x_3$. Isto era esperado? Justifique.
5. Os polos de malha-fechada podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo através de uma realimentação de estado da forma $u = -Kx$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, projete uma realimentação de estado com o objetivo de estabilizar a origem, ou seja, manter o pêndulo equilibrado na vertical em repouso e com o carro na posição $y = x_1 = 0$. O projeto da matriz de ganho K deverá atender à seguinte especificação: para as condições iniciais $x_3(0) = \theta(0) = \pi/4$ (45°) e $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$, tem-se que $x_3(t) = \theta(t)$ entra e permanece na faixa de ± 0.061 ($\pm 3.5^\circ$) em $t_s \cong 3.0\text{s}$. **Dica:** escolha polos repetidos por tentativa e erro.

Agora, considerando que o controle satura em $\pm 40\text{N}$, analise os resultados de simulação obtidos para $x(0) = (0, 0, \pi/4, 0)$, observando o desempenho dinâmico de $x(t)$ e o esforço de controle (o controle $u(t)$ corresponde à força aplicada no carro). Repita para $t_s \cong 1.6\text{s}$. Por fim, responda: os polos de malha-fechada podem ser escolhidos tão rápidos quanto se queira? Justifique.

6. Refaça o item anterior com a especificação de $t_s \cong 3.0s$, mas agora assumindo que os estados não podem ser realimentados. Utilize a configuração controlador-observador para tal, e relembre o princípio da separação. Compare os resultados de simulação obtidos, considerando que os polos da dinâmica do erro de estimação (ou seja, os polos de $A - LC$) são 2 vezes mais rápidos que os polos da realimentação de estado (i.e. de $A - BK$). **Resaltamos que o cálculo analítico de K e L é mostrado no Exemplo 3 da Seção 5.7 acima.** Analise os resultados de simulação obtidos considerando que $x(0) = (0, 0, \pi/4, 0)$, e $\hat{x}(0) = x(0)$, $\hat{x}(0) = (0.05, 0, \pi/5, 0.1)$, $\hat{x}(0) = (0.05, 0, 0, 0)$, $\hat{x}(0) = (0.3, 0, \pi/4, 0)$. Não se esqueça de verificar se a especificação de $t_s \cong 3.0s$ foi atendida. Note que, quando $\hat{x}(0) = x(0)$, então $\hat{x}(t) = x(t)$ para $t \geq 0$. Isto era esperado? Na prática, é possível termos $\hat{x}(0) = x(0)$? Justifique.

Agora, repita as simulações, mas considerando que os polos de $A - LC$ são 3 e 5 vezes mais rápidos que os de $A - BK$.

Conclua que, para o modelo do pêndulo invertido em questão, a configuração controlador-observador atende à especificação de $t_s \cong 3.0s$ desde que $\hat{x}_1(0) \cong x_1(0) = y(0)$ ($|\hat{x}_1(0) - x_1(0)| \cong 0.05m$) e os polos de $A - LC$ (observador) sejam relativamente rápidos em relação aos polos de $A - BK$ (realimentação). Como que a condição $\hat{x}_1(0) \cong x_1(0) = y(0)$ poderia ser assegurada na implementação prática do controlador-observador? Justifique. Ressaltamos que, como não estamos medindo x_2 , x_3 e x_4 , então é razoável setarmos $\hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = \hat{x}_4(0) = 0$ no observador.

5.9 Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares (Lab 5)

Objetivos: Trataremos do problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares. Para isso, primeiramente vamos introduzir o conceito de modelo interno. Em seguida, estudaremos uma estrutura de controle que permite resolver o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação através de uma realimentação de estado. Por fim, aplicaremos as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

5.9.1 Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw,\end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída com $\boxed{m \geq p}$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{q \times p}$ são matrizes **constantes**. Assuma que $r(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, é um dado **vetor de referência** escolhido, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

5.9.2 Modelo Interno

Vamos considerar que **cada componente** do vetor de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ e do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, é solução de uma **mesma** equação diferencial linear homogênea conhecida, ou seja,

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, p, t \geq 0,$$

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1 D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} w_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, q, t \geq 0,$$

para uma determinada condição inicial $r_i^{(k-1)}(0), \dots, r_i^{(1)}(0), r_i^{(0)}(0)$ e $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$, respectivamente, onde $D = d/dt$ é o operador diferencial, $k \geq 0$ é a ordem da equação diferencial, e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ são constantes reais. Portanto, a EDO

$$\beta(D)g(t) = 0,$$

modela a dinâmica do vetor de referência $r(t)$ e do vetor de perturbação $w(t)$.

Ressaltamos que apesar do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, ser não-mensurável, estamos assumindo que conhecemos a equação diferencial $\beta(D)w_j(t) = 0$ que cada componente $w_j(t)$, $t \geq 0$, satisfaz. No entanto, a princípio as condições iniciais $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$ são **desconhecidas**.

Obs: Podemos sempre escolher

$$\beta(s) = \boxed{\text{produto dos denominadores de } R_i(s) \text{ e } W_j(s)}$$

$$= s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

Exemplo 1: Suponha que $p = q = 1$ com $r(t) = A_1 t$ (rampa de coeficiente angular A_1) e $w(t) = B_1$ (degrau de amplitude B_1 desconhecida em princípio), $t \geq 0$. Então, $R(s) = A_1/s^2$, $W(s) = B_1/s$ e

$$\beta(s) = s^2,$$

(e não $\beta(s) = s^2 \cdot s = s^3!$) pois

$$\begin{aligned}\beta(D)r(t) &= D^2r(t) = 0, & t \geq 0, \\ \beta(D)w(t) &= D^2w(t) = 0, & t \geq 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2: Suponha que $p = q = 2$ com

$$\begin{aligned}r(t) &= (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2t}_{\text{rampa}}), \quad t \geq 0, \\ w(t) &= (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_2 \text{sen}(2t)}_{\text{senoide}}, \underbrace{B_3}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_4 \text{sen}(5t)}_{\text{senoide}}), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

onde $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ são constantes com B_1, B_2, B_3, B_4 desconhecidas em princípio. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s^2$, $W_1(s) = B_1/s + 2B_2/(s^2 + 4)$, $W_2(s) = B_3/s + 5B_4/(s^2 + 25)$ e

$$\beta(s) = s^2(s^2 + 4)(s^2 + 25) = s^2(s^4 + 29s^2 + 100) = \boxed{s^6 + 29s^4 + 100s^2},$$

pois

$$\beta(D)g(t) = (D^6 + 29D^4 + 100D^2)g(t) = [D^2(D^2 + 4)(D^2 + 25)]g(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

para $g(t) = r_1(t), r_2(t), w_1(t), w_2(t)$, $t \geq 0$.

Agora, seja $g(t) = r_1(t), \dots, r_p(t), w_1(t), \dots, w_q(t)$, $t \geq 0$. É fácil ver que $g(t)$, $t \geq 0$, é solução da EDO

$$\beta(D)g(t) = (D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)g(t) = 0$$

se e somente se $y_\beta(t) = x_{\beta_1}(t) = g(t)$, $t \geq 0$, é a saída do modelo de estado abaixo com as mesmas condições iniciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\beta = \begin{bmatrix} \dot{g}^{(0)} \\ \dot{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{g}^{(k-2)} \\ \dot{g}^{(k-1)} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}}_{= M \in \mathbb{R}^{k \times k}} \underbrace{\begin{bmatrix} g^{(0)} \\ g^{(1)} \\ \vdots \\ g^{(k-2)} \\ g^{(k-1)} \end{bmatrix}}_{= x_\beta \in \mathbb{R}^k} \\ y_\beta &= \underbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{= P \in \mathbb{R}^{1 \times k}} x_\beta = x_{\beta_1}\end{aligned}$$

Logo, este sistema é a representação em espaço de estado da EDO acima. Temos que $\det(sI - M) = \beta(s)$, ou seja, os polos (autovalores) de M coincidem com as raízes de $\beta(s) = 0$.

Defina o sistema (p cópias bloco diagonal do sistema anterior)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de estado, $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada deste sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1},$$

com $\beta(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$. Denominamos o sistema acima de **modelo interno** (da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$).

Pode-se verificar que o modelo interno é controlável, e que sua matriz de transferência é dada pela matriz bloco diagonal

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m = \begin{bmatrix} 1/\beta(s) & & & \\ & 1/\beta(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\beta(s) \end{bmatrix}_{p \times p},$$

com $Y_m(s) = G_m(s)E(s)$ e considerando que a saída é

$$y_m = \underbrace{\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & P \end{bmatrix}}_{= C_m \in \mathbb{R}^{p \times pk}} x_m = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,1+k} \\ \vdots \\ x_{m,1+(p-1)k} \end{bmatrix}}_{= y_m \in \mathbb{R}^p}, \text{ onde } P = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times k}.$$

Obs: Assuma que cada $r_i(t)$ e $w_j(t)$ são do tipo degrau, ou seja, $\beta(s) = s$. Então, $M = 0$, $N = 1$, $A_m = 0$ e $B_m = I$, ou seja, $\dot{x}_m = e$. Logo: $x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + x_m(0)$.

5.9.3 Sistema Aumentado

Relembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw, \end{aligned}$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m e,$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m (r - Cx - Fw) = -B_m Cx + A_m x_m - B_m Fw + B_m r.$$

Considere o vetor de estado **aumentado** $x_a = (x, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Obtemos assim o **sistema aumentado**:

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r,$$

$$y_a = y = \underbrace{[C \ 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw.$$

5.9.4 Estrutura de Controle

Considere a estrutura de controle em malha-fechada mostrada abaixo:

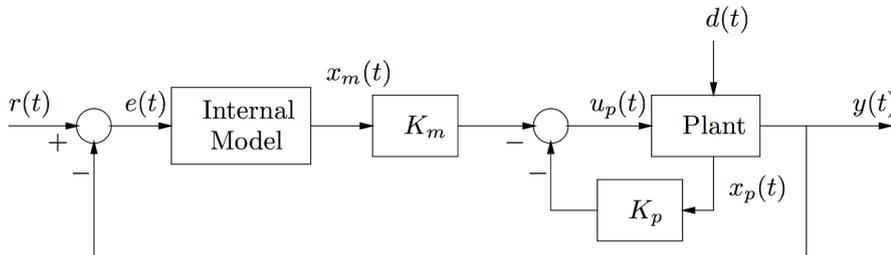


Figura 20 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

O próximo resultado apresenta condições para que esta estrutura de controle resolva o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Veremos que se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável, isto é, o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Então, a realimentação de estado

$$u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m,$$

onde $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, soluciona o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0,$$

para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, temos que $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema aumentado em malha-fechada com tal realimentação $u = -K_a x_a$ (para $w = r = 0$). Em particular, o sistema aumentado em malha-fechada é BIBO-estável (para $x_a(0) = 0$).

Prova: Com base na Figura acima, no sistema aumentado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema aumentado em malha-fechada com a realimentação $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{=B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ e = \underbrace{[-C \ 0]}_{=C_e = -C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{[-F \ I]}_{=D_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}. \end{aligned}$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

Como o par (A_a, B_a) é controlável, podemos sempre encontrar uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Portanto, $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (com $u_e = (w, r) = (0, 0)$). Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(A_e t) x_a(0) = 0$, para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ ($u_e = 0$).

Relembre que (resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo):

$$e(t) = \underbrace{C_e \exp(A_e t) x_a(0)}_{=e_0(t)} + \underbrace{\mathcal{G}_e(t) * u_e(t)}_{=e_{esn}(t)}.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_e \exp(A_e t) x_a(0) = 0,$$

para todo $x_a(0) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Assim, resta-nos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0.$$

Temos que

$$G_e(s) = (G_{eij}(s)) = C_e (sI - A_e)^{-1} B_e + D_e, \text{ com } E(s) = G_e(s) U_e(s).$$

Pode-se mostrar que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = G_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)},$$

onde $\eta_{ij}(s)$ é um polinômio em s . Portanto,

$$E_i(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)} U_{e_j}(s).$$

Concluimos então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0,$$

pois algum fator do polinômio $\beta(s)$ cancelará os polos de $U_{e_j}(s)$ (relembre que os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ não coincidem com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$, por hipótese). Isto termina a prova.

Obs 1: A estrutura de controle da Figura acima é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta) e $K_a = [K_m \ K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s) = 0$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, K_a .

Obs 2: Para determinarmos uma matriz de ganho $K_a = [K_m \ K]$ que soluciona o problema de controle em questão, necessitamos apenas montar as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado e verificar se o par (A_a, B_a) é controlável. Caso o par (A_a, B_a) seja controlável, então basta determinarmos $K_a = [K_m \ K]$ de maneira que os polos da matriz $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com as raízes de $\beta(s) = 0$. Logo, o sistema aumentado é utilizado apenas para fins de cálculo de $K_a = [K_m \ K]$! Para controlarmos o sistema em malha-fechada, basta implementarmos o modelo interno e aplicarmos a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta.

Obs 3: Note que o modelo de estado do sistema aumentado em malha-fechada com a realimentação $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{=B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ y_a = y &= \underbrace{[C \ 0]}_{=C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{[F \ 0]}_{=D_a} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada é determinada por

$$G_a(s) = (G_{a_{ij}}(s)) = C_a(sI - A_e)^{-1} B_e + D_a, \text{ com } Y(s) = G_a(s) U_e(s).$$

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação:

1. A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**;
2. Considere o **modelo interno** (p -cópias de M, N):

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1};$$

3. Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$, com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$;

4. Implemente o modelo interno e aplique a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início desta seção.

5.9.5 Exemplo

Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo o qual consiste de 2 blocos de massas m_1 e m_2 conectados por 3 molas com constantes de mola k_1, k_2, k_3 . As variáveis de controle são as forças u_1, u_2 aplicadas em cada bloco, e as variáveis de saída são os deslocamentos y_1 e y_2 de cada bloco. Por simplicidade, assumimos que não há atrito entre os blocos e a superfície.

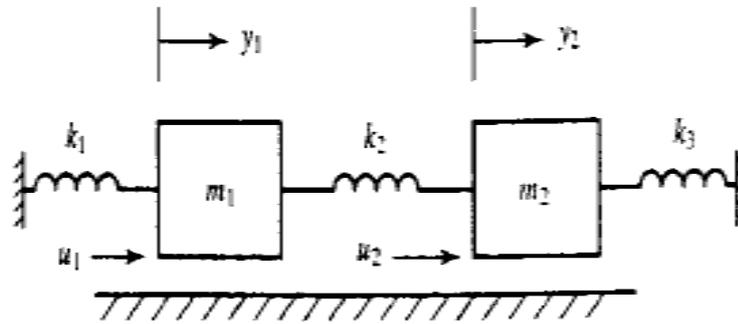


Figura 21 – Sistema massa-mola.

Com base na 2ª Lei de Newton, temos que

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= u_1 - k_1 y_1 - k_2 (y_1 - y_2), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= u_2 + k_2 y_1 - (k_1 + k_2) y_2. \end{aligned}$$

Vamos agora representar o sistema em modelo de estado. Definindo o vetor de controle $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, o vetor de saída $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, e o vetor de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ com

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \dot{y}_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = \dot{y}_2,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{=u}, \\ y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x}. \end{aligned}$$

Considere que há uma perturbação $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ na **entrada** do sistema, ou seja, $E = B$ com

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \underbrace{E}_{=B} w, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

e suponha que

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = \left(\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2 + A_3 \text{sen}(t)}_{\text{senoide}} \right), t \geq 0,$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = \left(\underbrace{B_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{B_2}_{\text{degrau}} \right), t \geq 0,$$

onde A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 são constantes com B_1, B_2 desconhecidas. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s + A_3/(s^2 + 1)$, $W_1(s) = B_1/s$, $W_2(s) = B_2/s$, e

$$\beta(s) = s(s^2 + 1) = s^3 + s \quad (k = 3).$$

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e o modelo interno é dado por ($p = 2$ cópias)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_m} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B_m} e.$$

Logo, as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado são, respectivamente,

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}_{10 \times 2}.$$

5.9.6 Procedimentos

1. Determine e analise a matriz de transferência do sistema massa-mola (malha-aberta).
2. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 5.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5 \text{sen}(t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 2$ e $w_2(t) = 3$, incidindo a partir de $t \geq 50$ s. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \ K_m]$ na realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ para o sistema massa-mola de modo a atender à seguinte especificação em malha-fechada: para a condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) = (0, 0)$, tem-se que as componentes $e_1(t)$ e $e_2(t)$ do erro de rastreamento $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$ entram e permanecem na faixa de ± 0.2 m em $t_s \cong 10.0$ s

em relação à referência dada acima. **Dica:** escolha $n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos repetidos por tentativa e erro.

Agora, considerando que os controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$ (correspondentes às forças aplicadas nas massas m_1 e m_2 , respectivamente) saturam em $\pm 20\text{N}$, analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada para $x(0) = 0$ e $x(0) \neq 0$, verificando se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido. Analise a matriz de transferência $G_a(s)$ do sistema aumentado em malha-fechada ($Y(s) = G_a(s)U_e(s)$), e analise os resultados de simulação obtidos (referência, perturbação, estado, saída, erro, controle). Repita os procedimentos anteriores, mas agora para polos 50%, 2 vezes e 3 vezes mais rápidos que os polos determinados para $t_s \cong 10\text{s}$. Por fim, responda: os polos de malha-fechada podem ser escolhidos tão rápidos quanto se queira? Justifique.

3. Determine os polos de malha-fechada considerando que:

$$K_a = \begin{bmatrix} 4.5975 & 3.5337 & 0.9908 & 0.4067 & -1.8253 & 0.0778 & -4.9807 & -0.0386 & 0.1826 & -0.1056 \\ 0.6755 & 0.2034 & 4.1541 & 4.4480 & 0.0386 & 0.1659 & 0.1402 & -1.8253 & 0.5435 & -4.9345 \end{bmatrix}.$$

Simule o sistema em malha-fechada com tal matriz de ganho, observando uma diminuição significativa do tempo de acomodação t_s e também do esforço de controle (picos no regime transitório) em comparação à matriz de ganho projetada no Item 1 para $t_s \cong 10\text{s}$.

Conclusão: apesar de podermos posicionar os polos de malha-fechada (i.e. os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$) arbitrariamente no SPE, de maneira geral não é uma tarefa fácil escolhê-los adequadamente, no sentido de se obter um compromisso razoável entre desempenho e esforço de controle!

Obs: Para o sistema massa-mola, temos que:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_3 = x_4.$$

E, para o modelo interno:

$$\dot{x}_{m1} = x_{m2},$$

$$\dot{x}_{m2} = x_{m3} = \ddot{x}_{m1},$$

$$\dot{x}_{m3} = -x_{m2} + e_1,$$

$$\dot{x}_{m4} = x_{m5},$$

$$\dot{x}_{m5} = x_{m6} = \ddot{x}_{m4},$$

$$\dot{x}_{m6} = -x_{m5} + e_2.$$

Assim, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 u_i &= -K_a^i x_a = -K^i x - K_m^i x_m \\
 &= -K_{i1}x_1 - K_{i2}x_2 - K_{i3}x_3 - K_{i4}x_4 \\
 &\quad - K_{m_{i1}}x_{m1} - K_{m_{i2}}x_{m2} - K_{m_{i3}}x_{m3} - K_{m_{i4}}x_{m4} - K_{m_{i5}}x_{m5} - K_{m_{i6}}x_{m6} \\
 &= -K_{i1}x_1 - K_{i2}\dot{x}_1 - K_{i3}x_3 - K_{i4}\dot{x}_3 \\
 &\quad - K_{m_{i1}}x_{m1} - K_{m_{i2}}\dot{x}_{m1} - K_{m_{i3}}\ddot{x}_{m1} - K_{m_{i4}}x_{m4} - K_{m_{i5}}\dot{x}_{m4} - K_{m_{i6}}\ddot{x}_{m4} \\
 &= - \underbrace{(K_{i1}x_1 + K_{i3}x_3 + K_{m_{i1}}x_{m1} + K_{m_{i4}}x_{m4})}_{\text{termo } P} \\
 &\quad - \underbrace{(K_{i2}\dot{x}_1 + K_{i4}\dot{x}_3 + K_{m_{i2}}\dot{x}_{m1} + K_{m_{i3}}\ddot{x}_{m1} + K_{m_{i5}}\dot{x}_{m4} + K_{m_{i6}}\ddot{x}_{m4})}_{\text{termo } D}.
 \end{aligned}$$

Logo, temos uma realimentação com ação PD (Proporcional-Derivativa) nos estados da planta e do modelo interno! Além disso, lembre que, no modelo interno:

$$\frac{X_{m1}(s)}{E_1(s)} = \frac{X_{m4}(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{\beta(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}.$$

Portanto, a realimentação projetada tem ação integral nos erros de rastreamento $e_1 = r_1 - y_1$, $e_2 = r_2 - y_2$.

Concluimos então que o controlador projetado tem ação PID (Proporcional-Integral-Derivativa) nos erros de rastreamento!

5.10 Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares com Observador de Estado (Lab 6)

Objetivos: Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares visto no Lab 5, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Para isso, utilizaremos um observador de estado. Aplicaremos então as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

5.10.1 Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 5.4 do Lab 5 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas. Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\hat{x} - K_m x_m$.

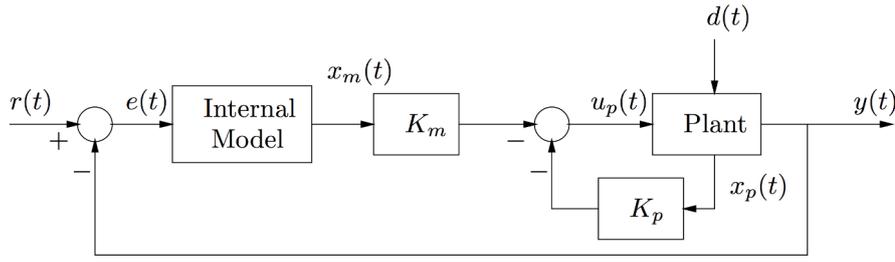


Figura 22 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_mx_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

Primeiramente, lembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw,\end{aligned}$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_me,$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_m(r - Cx - Fw) = -B_mCx + A_mx_m - B_mFw + B_mr.$$

Com isso, lembre que o **sistema aumentado** é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_mC & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_mF \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r, \\ y_a = y &= \underbrace{[C \ 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw.\end{aligned}$$

Agora, considere o **observador de estado** (para a planta, e não para o sistema aumentado!):

$$\hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.$$

Seja $\xi = x - \hat{x}$ o erro de estimação. Note que, na presença de uma perturbação $w \neq 0$ sobre a planta, não temos que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi$, mas sim que:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{x} - \hat{\dot{x}} = Ax + Bu + Ew - ((A - LC)\hat{x} + Bu + Ly) \\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\hat{x} - Bu - \underbrace{L(Cx + Fw)}_{=y} \\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w.\end{aligned}$$

No entanto, isto não causa nenhuma dificuldade técnica adicional, pois o próximo resultado estabelece condições para que a realimentação (do estado estimado \hat{x} e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m,$$

resolva o problema de controle através do projeto independente das matriz de ganho $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação) e L (observador). Veremos que novamente se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável (i.e. o par (A_a, B_a) é controlável) e que a planta é observável (i.e. o par (A, C) é observável). Escolha as matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Então, o observador de estado

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly,$$

e a realimentação

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m,$$

onde $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, solucionam o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0,$$

para qualquer condição inicial $\tilde{x}(0) = (x(0), x_m(0), \hat{x}(0)) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, temos que $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com tal controlador (para $w = r = 0$).

Prova: Seja $\tilde{x} = (x_a, \hat{x}) = (x, x_m, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ o vetor de estado do sistema aumentado com o observador. Com base no sistema aumentado, no observador de estado e considerando o erro $e = r - y$ como saída, obtemos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ é:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ e &= \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

Temos que

$$\tilde{G}_e(s) = (\tilde{G}_{e_{ij}}(s)) = \tilde{C}_e(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}_e, \text{ com } E(s) = \tilde{G}_e(s)U_e(s),$$

e que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = \tilde{G}_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\tilde{\eta}_{ij}(s)}{\det(sI - \tilde{A}_e)},$$

onde $\tilde{\eta}_{ij}(s)$ é um polinômio em s .

Agora, considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}.$$

Note que $T^{-1} = T$ e $\tilde{x} = T^{-1}z = Tz$. Nas novas coordenadas $z = T\tilde{x}$, o sistema em malha-fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\tilde{x}} = T(\tilde{A}_e\tilde{x} + \tilde{B}_e u_e) = T\tilde{A}_e\tilde{x} + T\tilde{B}_e u_e = T\tilde{A}_e T^{-1}z + T\tilde{B}_e u_e \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=T\tilde{A}_e T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=T\tilde{B}_e} u_e, \\ e &= \tilde{C}_e\tilde{x} + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e T^{-1}z + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e z + \tilde{D}_e u_e, \end{aligned}$$

com

$$A_a - B_a K_a = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}.$$

Concluimos então que o conjunto de polos da matriz \tilde{A}_e é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$ (**princípio da separação**).

Por hipótese, (A_a, B_a) é controlável e (A, C) é observável. Logo, podemos encontrar matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Portanto, $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (para $u_e = (w, r) = (0, 0)$), e o restante da prova é análogo ao Teorema da Seção 5.4 do Lab 5. Isto conclui a demonstração.

Obs 1: A estrutura de controle com o observador de estado é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta), L (observador) e $K_a = [K \ K_m]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s) = 0$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, L, K_a .

Obs 2: Note que o modelo de estado do sistema aumentado com o observador e em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ \tilde{y} = y &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}=-\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{G}(s) = (\tilde{G}_{ij}(s)) = \tilde{C}(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}, \text{ com } Y(s) = \tilde{G}(s)U_e(s).$$

Obs 3: Considere que no lugar de

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \tag{5.2}$$

optamos por utilizar

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu - Le. \tag{5.3}$$

Seja $\xi = x - \hat{x}$ o erro de estimação. Temos então que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu + Ew - ((A - LC)\hat{x} + Bu - Le) \\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\hat{x} - Bu + L \underbrace{(r - (Cx + Fw))}_{=e=r-y} \\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w + Lr. \end{aligned}$$

Logo, o sistema (5.3) desempenha o papel de um estimador de estado apenas quando $w = r = 0$. No entanto, note que os resultados do teorema acima permanecem válidos mesmo quando utilizamos (5.3) no lugar de (5.2), pois em tal caso o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ e considerando o erro

$e = r - y$ como saída é:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ LF & L \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ e = \underbrace{[-C \ 0 \ 0]}_{\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} &+ \underbrace{[-F \ I]}_{\tilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que a única diferença em relação à utilização do estimador (5.2) é a matriz \tilde{B}_e no lugar de \tilde{B}_e (veja a prova do teorema).

Temos que

$$\bar{G}_e(s) = (\bar{G}_{e_{ij}}(s)) = \tilde{C}_e(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}_e, \text{ com } E(s) = \bar{G}_e(s)U_e(s),$$

e que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = \bar{G}_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\bar{\eta}_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)},$$

onde $\bar{\eta}_{ij}(s)$ é um polinômio em s . Portanto, concluímos pela demonstração do teorema acima (referente a (5.2)) que tal resultado permanece válido mesmo quando utilizamos (5.3) no lugar de (5.2), já que a única diferença entre $\bar{G}_{e_{ij}}(s)$ e $\tilde{G}_{e_{ij}}(s)$ são os zeros determinados pelos polinômios $\bar{\eta}_{ij}(s)$ e $\tilde{\eta}_{ij}(s)$. Ressaltamos que diferenças entre os polinômios $\bar{\eta}_{ij}(s)$ e $\tilde{\eta}_{ij}(s)$ são decorrentes das diferenças entre as matrizes \tilde{B}_e (com (5.3)) e \tilde{B}_e (com (5.2)).

Além disso, note que o modelo de estado do sistema aumentado com (5.3) e em malha fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & L \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}, \\ \bar{y} = y = \underbrace{[C \ 0 \ 0]}_{\tilde{C}_e = -\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} &+ \underbrace{[F \ 0]}_{=\tilde{D}} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{G}(s) = (\bar{G}_{ij}(s)) = \tilde{C}(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}, \text{ com } Y(s) = \bar{G}(s)U_e(s).$$

Logo, as componentes correspondentes das matrizes de transferência $\bar{G}(s)$ (com (5.3)) e $\tilde{G}(s)$ (veja a Obs 2 acima referente ao observador (5.2)) podem apresentar zeros diferentes devido à diferença entre as matrizes \tilde{B}_e e \tilde{B}_e .

Por fim, ao utilizarmos (5.3) no lugar de (5.2), temos que o modelo de estado do controlador a ser implementado é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu - Le = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m - Le, \\ \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m e, \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m.\end{aligned}$$

Aqui, $x_c = (\hat{x}, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ é o estado do controlador, o error $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada do controlador e $u = -K_a x_c \in \mathbb{R}^m$ é a saída do controlador, onde $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$. Desse modo, podemos escrever o modelo de estado do controlador como:

$$\begin{aligned}x_c &= \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK - LC & -BK_m \\ 0 & A_m \end{bmatrix}}_{=A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} -L \\ B_m \end{bmatrix}}_{=B_c} e, \\ u &= -\underbrace{[K \ K_m]}_{K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c}.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de transferência do controlador é dada por:

$$C(s) = -K_a(sI - A_c)^{-1}B_c, \quad \text{com } U(s) = C(s)E(s).$$

Note que as raízes de $\beta(s) = 0$ aparecem como polos da matriz A_c do controlador, pois como A_c é uma matriz bloco triangular superior, temos que o conjunto de polos de A_c é a união (com repetição) dos polos de $A - BK - LC$ com os polos de A_m (vemos pelo Lab 5 que os valores dos polos de A_m coincidem com as raízes de $\beta(s) = 0$). Como A_m é a matriz do modelo interno, concluímos que o controlador acima **generaliza** para o caso **multivariável** a abordagem de projeto **monovariável** vista na disciplina *Sistemas de Controle* para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação: primeiramente colocamos os polos do modelo interno como polos do controlador, e em seguida projetamos um estabilizador de forma a posicionar os polos de malha-fechada no SPE.

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação com Observador de Estado:

1. A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**;

2. Considere o **modelo interno** (p -cópias de M, N):

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & & \\ & M & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & & \\ & N & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1};$$

3. Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável e o par (A, C) é observável. Em caso afirmativo, determine matrizes de ganho $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação), com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (observador) de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$;

4. Implemente o modelo interno e o observador de estado (para a planta, e não para o sistema aumentado!)

$$\hat{\dot{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \text{ (ou } -Le),$$

e aplique a realimentação $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início da Seção 5.4 do Lab 5. Assim, concluímos que o controlador projetado a ser implementador é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \text{ (ou } -Le), \\ \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m e, \text{ com } e = r - y, \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m. \end{aligned}$$

Note que o observador de estado é referente somente à planta (não ao sistema aumentado!), já que sempre podemos realimentar o estado x_m pelo fato do modelo interno ser implementado. Tal controlador resolve o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Ressaltamos que os polos de malha-fechada serão a união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, ou seja, as matrizes de ganho $K_a = [K \ K_m]$ (realimentação) e L (observador) são projetadas independentemente (**princípio da separação**).

5.10.2 Procedimentos

1. Considere novamente o sistema massa-mola da Seção 5.5 do Lab 5. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 5.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5 \text{sen}(t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 2$ e $w_2(t) = 3$, incidindo a partir de $t \geq 50$ s. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \ K_m]$ na realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ para o sistema massa-mola de modo a atender à seguinte especificação em malha-fechada: para a condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) = (0, 0)$, tem-se que as componentes $e_1(t)$ e $e_2(t)$ do erro de rastreamento $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$ entram e permanecem na faixa de ± 0.2 m em $t_s \cong 10.0$ s em relação à referência dada acima. **Dica:** escolha $n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos repetidos por tentativa e erro. **Resposta:** polos em $s = -1$.

2. Comprove que o sistema massa-mola é observável, e então determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da matriz $A - LC$) sejam 2 vezes mais rápidos que os polos de $A_a - B_a K_a$ encontrados no Item 1. Considerando que os controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$ (forças aplicadas nas massas) saturam em ± 20 , analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com o observador (5.2) para $\hat{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$, $x(0) = [1 \ 2 \ 0.8 \ -0.3]$, lembrando que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi + (E - LF)w$, onde $\xi = x - \hat{x}$ é o erro de estimação. Verifique se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido, comparando o desempenho em relação à realimentação de estado $u = -K_m x_m - Kx$, e analisando a referência, perturbação, estado, estado estimado, saída, erro e controle. Repita, mas agora considere que os polos de $A - LC$ são 5, 10 e 20 vezes mais rápidos que os de $A_a - B_a K_a$. Observe que o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação diminui à medida que os polos de $A - LC$ se tornam mais rápidos. Isto era esperado? Justifique. **Dica:** lembre o princípio da separação.

3. Refaça o item anterior, mas agora utilizando (5.3) no lugar de (5.2), lembrando que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi + (E - LF)w + Lr$. Observe o sobressinal na saída durante o regime transitório do rastreamento da referência. Explique tal comportamento. **Dica:** encontre a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada com (5.3) (veja a Obs 3 acima) e compare com a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada com (5.2) (veja a Obs 1). Por fim, encontre a matriz de transferência $C(s)$ do controlador resultante ao se utilizar (5.3) (veja a Obs 3). Note que as raízes de $\beta(s) = s(s^2 + 1) = 0$ (modelo interno) aparecem como pólos de $C(s)$, em conformidade com a Obs 3.

4. Modifique as referências $r_1(t)$ e $r_2(t)$ com o objetivo de se diminuir as oscilações na saída durante o regime transitório em relação ao Item 2. **Dica:** escolha $r_1(t) = 3(1 - e^{-t/3})$, $r_2(t) = 2(1 - e^{-t/3}) + 0.5 \text{sen}(t)$ ($t_s(5\%) = 9$ para a exponencial), e reprojete o modelo interno. Determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da

matriz $A - LC$) sejam 2 vezes mais rápidos que os polos de $A_a - B_a K_a$ ($s = -1$). Analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com o observador (5.2) para $\hat{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$, $x(0) = [1 \ 2 \ 0.8 \ -0.3]$, observando a diminuição das oscilações na saída durante o regime transitório em relação ao Item 2. Repita, mas agora considere que polos de $A_a - B_a K_a$ são 3 vezes mais rápidos ($s = -3$).

5.11 Decomposição Canônica

Considere um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas) da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Veremos nesta seção condições para estabilizarmos a origem via realimentação de estado ou via estrutura controlador-observador caso o sistema seja não-controlável ou não-observável.

Suponha que T é uma matriz invertível ($\det(T) \neq 0$), ou seja, T corresponde a uma mudança de coordenadas. Então, nas novas coordenadas $z = Tx$, temos que o sistema acima é descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAx + TBu = \underbrace{TAT^{-1}}_{=A} z + TBu, \\ y &= CT^{-1}z, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}} z + \underbrace{TB}_{=\bar{B}} u, \\ y &= \bar{C}z = \underbrace{CT^{-1}}_{=\bar{C}} z. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Já mostramos anteriormente que $\det(sI - A) = \det(sI - \bar{A})$, ou seja, as matrizes A e \bar{A} possuem os mesmos polinômios característicos. Sejam \mathcal{C} , \mathcal{O} e $G(s)$ a matriz de controlabilidade, a matriz de observabilidade e a matriz de transferência do modelo de estado (5.4), respectivamente. Do mesmo modo, sejam $\bar{\mathcal{C}}$, $\bar{\mathcal{O}}$ e $\bar{G}(s)$ a matriz de controlabilidade, a matriz de observabilidade e a matriz de transferência do modelo de estado (5.5), respectivamente. Temos então que:

- $\bar{\mathcal{C}} = T\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}T^{-1}$. Em particular, $\text{posto}(\bar{\mathcal{C}}) = \text{posto}(\mathcal{C})$ e $\text{posto}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{posto}(\mathcal{O})$ (pois T é invertível);
- $\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CT^{-1}(sITT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB = CT^{-1}(T(sI - A)T^{-1})^{-1}TB = CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB = C(sI - A)^{-1}B = G(s)$.

Concluimos assim que: controlabilidade, observabilidade, matriz de transferência, polos e estabilidade (interna e externa), são aspectos geométricos de um sistema, ou seja, independem das coordenadas em que representamos o sistema.

Teorema 1 (Decomposição Canônica nas Partes Controlável e Não-Controlável):

Considere que (5.4) é não-controlável com $\text{posto}(\mathcal{C}) = n_c < n$. Então, existe uma matriz invertível T tal que, nas novas coordenadas $(z_c, z_{\bar{c}}) = z = Tx$, o sistema (5.4) é descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{=\bar{A}=TAT^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\bar{B}=TB} u, \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{=\bar{C}=CT^{-1}} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $z_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $\bar{A}_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $z_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{n-n_c}$, $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_c) \times (n-n_c)}$. Além disso, o subsistema de ordem n_c

$$\begin{aligned} \dot{z}_c &= \bar{A}_c z_c + \bar{B}_c u, \\ y_c &= \bar{C}_c z_c, \end{aligned} \quad (5.7)$$

é controlável e possui a mesma matriz de transferência que (5.4), ou seja,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_c(sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c.$$

A matriz invertível T pode ser determinada da seguinte maneira:

$$T^{-1} = V = [V_1 \quad \cdots \quad V_{n_c} \quad \cdots \quad V_n],$$

onde V_1, \dots, V_{n_c} são quaisquer n_c colunas linearmente independentes da matriz de controlabilidade \mathcal{C} , e as $n - n_c$ colunas restantes V_{n_c+1}, \dots, V_n são escolhidas de maneira que $\det(T^{-1}) \neq 0$ (relembre de Álgebra Linear que sempre podemos escolher tais $n - n_c$ colunas V_{n_c+1}, \dots, V_n dentre as n colunas da base canônica de \mathbb{R}^n).

A mudança de coordenadas $(z_c, z_{\bar{c}}) = z = Tx \in \mathbb{R}^n$ decompõe o espaço vetorial \mathbb{R}^n em dois subespaços (soma direta): um **controlável** (pois o subsistema (5.7) é controlável) e outro **não-controlável** (pois vemos em (5.6) que a entrada u não afeta $z_{\bar{c}}$ diretamente nem indiretamente via z_c). Como o subsistema (5.7) é controlável, podemos sempre encontrar uma entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq t \leq T_f$, de modo a transferir o subsistema (5.7) do estado inicial $z_c(0) \in \mathbb{R}^{n_c}$ ao estado final desejado $z_c(T_f) \in \mathbb{R}^{n_c}$ em $t = T_f < \infty$. Consequentemente, essa mesma entrada transferirá (5.6) do estado inicial $z(0) = (z_c(0), 0)$ ao estado final $z(T_f) = (z_c(T_f), 0)$ em $t = T_f < \infty$, já que teremos (note que $\dot{z}_{\bar{c}} = \bar{A}_{\bar{c}} z_{\bar{c}}$ em (5.6)):

$$z_{\bar{c}}(t) = e^{\bar{A}_{\bar{c}} t} \underbrace{z_{\bar{c}}(0)}_{=0} = 0.$$

Logo, o **subespaço controlável** tem dimensão n_c e consiste dos vetores da forma $(z_c, 0) \in \mathbb{R}^n$. Por simplicidade, dizemos que z_c é o **estado controlável** (nas coordenadas z).

Por outro lado, nenhuma entrada $u(t) \in \mathbb{R}^n$ é capaz de afetar a componente $z_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{n-n_c}$ em (5.6): como $\dot{z}_{\bar{c}} = \bar{A}_{\bar{c}} z_{\bar{c}}$, temos que $z_{\bar{c}}(t) = e^{\bar{A}_{\bar{c}} t} z_{\bar{c}}(0)$. Desse modo, o **subespaço não-controlável** tem dimensão $n - n_c$ e consiste dos vetores da forma $(0, z_{\bar{c}})$, no sentido de que não existe nenhuma entrada $u(t) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T_f$, capaz de transferir (5.6) de um determinado estado inicial $(0, z_{\bar{c}}(0))$ a um dado estado final desejado $(0, z_{\bar{c}}(T_f))$ em $t = T_f < \infty$. Por simplicidade, dizemos que $z_{\bar{c}}$ é o **estado não-controlável**.

Por fim, ressaltamos que a matriz de transferência de (5.4) só depende do **subsistema controlável** de ordem reduzida (5.7): $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_c(sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c$.

Obs 1: No Matlab, o comando `ctrbf` determina uma matriz invertível T de modo que $(z_{\bar{c}}, z_c) = z = Tx$ com

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{\bar{c}} \\ \dot{z}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\bar{c}} \\ z_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_c \end{bmatrix} u, \quad y = [\bar{C}_{\bar{c}} \quad \bar{C}_c] \begin{bmatrix} z_{\bar{c}} \\ z_c \end{bmatrix}.$$

Obs 2: Como $\bar{A} = TAT^{-1}$ em (5.6) é uma matriz bloco triangular superior, concluímos que os polos da matriz A em (5.4) são dados pela união (com repetição) do polos de \bar{A}_c (parte controlável) com os polos de $\bar{A}_{\bar{c}}$ (parte não-controlável).

Obs 3: Considere que aplicamos no sistema (5.4) uma realimentação de estado da forma:

$$u = -Kx.$$

Temos o sistema em malha-fechada:

$$\dot{x} = (A - BK)x.$$

Suponha que (5.4) é não-controlável. Mostraremos agora que os polos da matriz $\bar{A}_{\bar{c}}$ (parte não-controlável) ficam **trancados** no plano complexo em relação a realimentações de estado da forma $u = -Kx$, no sentido de que a matriz $A - BK$ possuirá esses mesmos polos para qualquer escolha da matriz de ganho K .

Pelo teorema acima, temos que existe uma matriz invertível T tal que, nas novas coordenadas $(z_c, z_{\bar{c}}) = z = Tx$, o sistema (5.4) é descrito por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Nas novas coordenadas $z = Tx$, a realimentação é descrita por

$$u = -Kx = -\underbrace{KT^{-1}}_{=x} z = -\underbrace{KT^{-1}}_{=\bar{K}} z = -\bar{K}z = -[\bar{K}_c \quad \bar{K}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix},$$

e o sistema em malha-fechada por

$$\begin{aligned} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{K}_c \quad \bar{K}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c & \bar{A}_{12} - \bar{B}_c \bar{K}_{\bar{c}} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, os polos de $A - BK$ do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

são dados pela união (com repetição) dos polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ (subsistema controlável em malha-fechada com o ganho \bar{K}_c) com os polos de $\bar{A}_{\bar{c}}$ (parte não-controlável de malha-aberta). Concluimos então que os polos de $\bar{A}_{\bar{c}}$ não podem ser deslocados no plano complexo pela realimentação de estado $u = -Kx$, ou seja, os mesmos estão trancados. Por outro lado, os polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ podem ser arbitrariamente posicionados no SPE pela escolha adequada do ganho \bar{K}_c , pois o par (\bar{A}_c, \bar{B}_c) é controlável (subsistema controlável). Essa discussão motiva a seguinte definição:

Definição: Dizemos que o sistema (5.4) é **estabilizável** (ou que o par (A, B) é **estabilizável**) quando os pólos de $A - BK$ (malha-fechada) podem ao menos ser **estabilizados**, ou seja, posicionados em **algum lugar** do SPE, por uma escolha adequada da matriz de ganho K na realimentação de estado $u = -Kx$.

É imediato que:

Proposição 1: Todo sistema controlável é estabilizável.

E, pela Obs 3 acima, obtemos os dois próximos resultados:

Proposição 2: Suponha que o sistema (5.4) é não-controlável. Então, (5.4) é estabilizável **se e somente se** os polos da parte não-controlável $\bar{A}_{\bar{c}}$ em (5.6) estão no SPE.

Proposição 3: Suponha que o sistema (5.4) é não-controlável mas estabilizável. Então, para estabilizarmos os polos de $A - BK$, basta aplicarmos a seguinte realimentação de estado

$$u = - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{K}_c & 0 \end{bmatrix}}_{=K} \overset{=\bar{K}}{T} x = -Kx,$$

onde a matriz invertível T é como no Teorema 1 acima e \bar{K}_c é escolhido de modo que os polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ (subsistema controlável em malha-fechada com ganho \bar{K}_c) estejam no SPE. Com isso, os polos de $A - BK$ estão no SPE e são dados pela união (com repetição) dos polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ com os polos de $\bar{A}_{\bar{c}}$ (os quais podem ser relativamente lentos, e não podem ser deslocados pelo ganho K da realimentação!). Note que: $u = -[\bar{K}_c \quad 0]Tx = -\bar{K}_c[I \quad 0]Tx = -\bar{K}_c[I \quad 0]z = -\bar{K}_c z_c$.

Exemplo 1: Considere o sistema

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u,$$

$$y = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0]}_{=C} x.$$

Tal sistema é não-controlável, pois

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{C}) = 0, \text{ posto}(\mathcal{C}) = 3.$$

Logo, $n_c = 3 < n = 4$. As primeiras 3 colunas V_1, V_2, V_3 de \mathcal{C} são linearmente independentes. Escolhendo-se $V_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]'$, temos que

$$T^{-1} = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \det(T^{-1}) = 9 \neq 0.$$

Pelo Teorema 1 acima, temos que a decomposição canônica nas partes controlável e não-controlável do sistema é dada por:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CT^{-1} = [\bar{C}_c \ \bar{C}_{\bar{c}}] = [0 \ 1 \ 4 \ 0].$$

Como $\bar{A}_{\bar{c}} = -1 \in \text{SPE}$, concluímos que o sistema é estabilizável pela Proposição 2 anterior.

Sabemos que (\bar{A}_c, \bar{B}_c) é controlável, onde

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para posicionarmos os polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ em $\{-2, -3, -4\}$, encontramos que $\bar{K}_c = [12 \ 62 \ 25.6]$. Portanto, pela Proposição 3, a realimentação de estado

$$\begin{aligned} u &= -[\bar{K}_c \ 0]Tx = -[12 \ 62 \ 206 \ 0]Tx = \\ &= -\underbrace{[40.0000 \ 11.3333 \ 0 \ 0.6666]}_{=K}x = -Kx, \end{aligned}$$

estabiliza $A - BK$ com os polos em $\{-1, -2, -3, -4\}$ (união dos polos de $\bar{A}_c - \bar{B}_c \bar{K}_c$ com o polo de $\bar{A}_{\bar{c}}$).

Verificação:

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -40 & -9.33 & 0 & -0.67 \\ -40 & -11.33 & -1 & -0.67 \\ -40 & -9.33 & 0 & -1.67 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \det(sI - (A - BK)) &= s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0 \\ \Rightarrow s &= -1, -2, -3, -4. \end{aligned}$$

Teorema 2 (Decomposição Canônica nas Partes Observável e Não-Observável):

Considere que (5.4) é não-observável com $\text{posto}(\mathcal{O}) = n_o < n$. Então, existe uma matriz invertível T tal que, nas novas coordenadas $(z_o, z_{\bar{o}}) = z = Tx$, (5.4) é descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_o \\ \dot{z}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=\bar{A}=TAT^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_o \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=\bar{B}=TB} u, \\ y &= \underbrace{[\bar{C}_o \ 0]}_{=\bar{C}=CT^{-1}} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $z_o \in \mathbb{R}^{n_o}$, $\bar{A}_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $z_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n-n_o}$, $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{n-n_o \times n-n_o}$. Além disso, o subsistema de ordem n_o

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= \bar{A}_o z_o + \bar{B}_o u, \\ y &= \bar{C}_o z_o, \end{aligned} \quad (5.9)$$

é observável e possui a mesma matriz de transferência que (5.4), ou seja, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_o(sI - \bar{A}_o)^{-1}\bar{B}_o$. A matriz invertível T pode ser determinada da seguinte maneira:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_o} \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix},$$

onde T_1, \dots, T_{n_o} são quaisquer n_o linhas linearmente independentes da matriz de observabilidade \mathcal{O} , e as $n - n_o$ linhas restantes T_{n_o+1}, \dots, T_n são escolhidas de maneira que $\det(T) \neq 0$ (relembre de Álgebra Linear que sempre podemos escolher as $n - n_o$ linhas T_{n_o+1}, \dots, T_n dentre as n linhas da base canônica de \mathbb{R}^n).

A mudança de coordenadas $(z_c, z_{\bar{c}}) = z = Tx \in \mathbb{R}^n$ decompõe o espaço vetorial \mathbb{R}^n em dois subespaços (soma direta): um **observável** (pois o subsistema (5.9) é observável) e outro **não-observável** (pois vemos em (5.8) que $z_{\bar{o}}$ não afeta a saída y diretamente nem indiretamente via z_o). Como o subsistema (5.9) é observável, podemos sempre determinar sua condição inicial (desconhecida) $z_o(0) \in \mathbb{R}^{n_o}$ ao conhecermos qualquer entrada aplicada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e a saída correspondente $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $0 \leq t \leq T_f < \infty$. Como as equações de \dot{z}_o e y em (5.8) são idênticas a (5.9), concluímos então que a componente inicial (desconhecida) $z_o(0) \in \mathbb{R}^{n_o}$ de toda condição inicial de (5.8) da forma $z(0) = (z_o(0), 0) \in \mathbb{R}^n$ pode ser determinada ao conhecermos qualquer entrada aplicada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e a saída correspondente $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $0 \leq t \leq T_f < \infty$. Logo, o **subespaço observável** tem dimensão n_o e consiste dos vetores da forma $(z_o, 0) \in \mathbb{R}^n$. Por simplicidade, dizemos que z_o é o **estado obserável** (nas coordenadas z).

Por outro lado, suponha que a condição inicial em (5.8) é da forma $z(0) = (0, z_{\bar{o}}(0)) \in \mathbb{R}^n$ e a entrada aplicada $u(t) = 0$ é identicamente nula. Então, temos que a saída correspondente $y(t) = 0$ também é identicamente nula também e, assim, não há como determinarmos a componente inicial (desconhecida) $z_{\bar{o}}(0) \in \mathbb{R}^{n-n_o}$ a partir de $u = 0$ e $y = 0$. De fato, para $z(0) = (0, z_{\bar{o}}(0))$ e $u(t) = 0$, obtemos de (5.8) que

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_o \\ \dot{z}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} z_o \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=z},$$

$$y = \bar{C}_o z_o.$$

Logo, $\dot{z}_o = \bar{A}_o z_o$, ou seja,

$$z_o(t) = e^{\bar{A}_o t} \underbrace{z_o(0)}_{=0} = 0.$$

Consequentemente, $y(t) = \bar{C}_o z_o(t) = 0$. Portanto, o **subespaço não-observável** tem dimensão $n - n_o$ e consiste dos vetores da forma $(0, z_{\bar{o}})$, no sentido de que existe ao menos uma entrada $u(t)$ em que não é possível determinarmos a componente inicial (desconhecida) $z_{\bar{o}}(0) \in \mathbb{R}^{n-n_o}$ da condição inicial $z(0) = (0, z_{\bar{o}}(0)) \in \mathbb{R}^n$ de (5.8) a partir do conhecimento de $u(t)$ e da saída correspondente $y(t)$. Por simplicidade, dizemos que $z_{\bar{o}}$ é o **estado não-observável**.

Por fim, ressaltamos que a matriz de transferência de (5.4) só depende do **subsistema observável** de ordem reduzida (5.9): $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_o(sI - \bar{A}_o)^{-1}\bar{B}_o$.

Obs 4: No Matlab, o comando `obsvf` determina uma matriz invertível T de modo que

$(z_{\bar{o}}, z_o) = z = Tx$ com

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{\bar{o}} \\ \dot{z}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{o}} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\bar{o}} \\ z_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{\bar{o}} \\ \bar{B}_o \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad \bar{C}_o] \begin{bmatrix} z_{\bar{o}} \\ z_o \end{bmatrix}.$$

Obs 5: Como $\bar{A} = TAT^{-1}$ em (5.8) é uma matriz bloco triangular inferior, concluímos que os polos da matriz A em (5.4) são dados pela união (com repetição) do polos de \bar{A}_o (parte observável) com os polos de $\bar{A}_{\bar{o}}$ (parte não-observável).

Obs 6: Considere que utilizamos no sistema (5.4) um observador de estado da forma:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.$$

Temos então a seguinte dinâmica para o erro de estimação $e = x - \hat{x}$:

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

Suponha que (5.4) é não-observável. Mostraremos agora que os polos da matriz $\bar{A}_{\bar{o}}$ (parte não-observável) ficam **trancados** no plano complexo em relação a observadores de estado da forma $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$, no sentido de que a matriz $A - LC$ possuirá esses mesmos polos para qualquer escolha da matriz de ganho L .

Pelo teorema anterior, temos que existe uma matriz invertível T tal que, nas novas coordenadas $(z_o, z_{\bar{o}}) = z = Tx$, o sistema (5.4) é descrito por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_o \\ \dot{z}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=\bar{A}=TAT^{-1}} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix}}_{=\bar{B}=TB} u,$$

$$y = \underbrace{[\bar{C}_o \quad 0]}_{=\bar{C}=CT^{-1}} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix}.$$

Nas novas coordenadas $(\xi_o, \xi_{\bar{o}}) = \xi = Te$, a dinâmica do erro de estimação é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= T\dot{e} = T \underbrace{(A - LC)}_{=\dot{e}} e = T(A - LC) \underbrace{T^{-1}\xi}_{=e} = \underbrace{(TAT^{-1})}_{=A} - \underbrace{TL}_{=\bar{L}} \underbrace{CT^{-1}}_{=\bar{C}} \xi \\ &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})\xi = \left(\bar{A} - \begin{bmatrix} \bar{L}_o \\ \bar{L}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \bar{C} \right) \xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \dot{\xi}_o \\ \dot{\xi}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{L}_o \\ \bar{L}_{\bar{o}} \end{bmatrix} [\bar{C}_o \quad 0] \right) \begin{bmatrix} \xi_o \\ \xi_{\bar{o}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_o - \bar{L}_o\bar{C}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} - \bar{L}_{\bar{o}}\bar{C}_{\bar{o}} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_o \\ \xi_{\bar{o}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, os polos de $A - LC$ da dinâmica do erro de estimação

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

são dados pela união (com repetição) dos polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o$ (subsistema observável com ganho \bar{L}_o) com os polos de $\bar{A}_{\bar{o}}$ (parte não-observável de malha-aberta). Concluímos então que os polos de $\bar{A}_{\bar{o}}$ não podem ser deslocados no plano complexo pelo ganho L do observador $\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$, ou seja, os mesmos estão trancados. Por outro lado, os polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o$ podem ser arbitrariamente posicionados no SPE pela escolha adequada do ganho \bar{L}_o , pois o par (\bar{A}_o, \bar{C}_o) é observável (subsistema observável). Essa discussão motiva a seguinte definição:

Definição: Dizemos que o sistema (5.4) é **detectável** (ou que o par (A, C) é **detectável**) quando os pólos de $A - LC$ (dinâmica do erro de estimação) podem ao menos ser **estabilizados**, ou seja, posicionados em **algum lugar** do SPE, por uma escolha adequada da matriz de ganho L do observador de estado $\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$.

É imediato que:

Proposição 4: Todo sistema observável é detectável.

E, pela Obs 6 anterior, obtemos os dois próximos resultados:

Proposição 5: Suponha que o sistema (5.4) é não-observável. Então, (5.4) é detectável **se e somente se** os polos da parte não-observável $\bar{A}_{\bar{o}}$ em (5.8) estão no SPE.

Proposição 6: Suponha que o sistema (5.4) é não-observável mas detectável. Então, para estabilizarmos os polos de $A - LC$, basta escolhermos a matriz de ganho L do observador de estado $\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$ da seguinte maneira:

$$L = T^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{L}_o \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\bar{L}},$$

onde a matriz invertível T é como no teorema anterior e \bar{L}_o é escolhido de modo que os polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o$ (subsistema observável com ganho \bar{L}_o) estejam no SPE. Com isso, os polos de $A - LC$ estão no SPE e são dados pela união (com repetição) dos polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o$ com os polos de $\bar{A}_{\bar{o}}$ (os quais podem ser relativamente lentos, e não podem ser deslocados pelo ganho L do observador!). Note que: para $(\hat{z}_o, \hat{z}_{\bar{o}}) = \hat{z} = T\hat{x}$, temos

$$\hat{z}_o = [I \ 0]\hat{z} = [I \ 0]T\hat{x} = (\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o)\hat{z}_o + \bar{B}_o u + \bar{L}_o y.$$

Exemplo 2: Considere novamente o sistema do Exemplo 1 acima:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \\ y &= \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0]}_{=C} x. \end{aligned}$$

Tal sistema é não-observável, pois

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{O}) = 0, \text{ posto}(\mathcal{O}) = 2.$$

Logo, $n_o = 2 < n = 4$. As primeiras 2 linhas T_1, T_2 de \mathcal{O} são linearmente independentes. Escolhendo-se $T_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0], T_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, temos que

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \det(T) = 0.11 \neq 0.$$

Pelo Teorema 2 acima, temos que a decomposição canônica nas partes observável e não-observável do sistema é dada por:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = TB = B = \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CT^{-1} = C = [\bar{C}_o \ 0] = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Como

$$\bar{A}_{\bar{o}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{polo duplo em } s = -1,$$

concluimos que o sistema é detectável pela Proposição 5 anterior.

Sabemos que (\bar{A}_o, \bar{C}_o) é observável, onde

$$\bar{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_o = [1 \ 0].$$

Para posicionar os polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o \bar{C}_o$ em $\{-6, -9\}$, encontramos que $\bar{L}_o = [19 \ 126]'$. Portanto, pela Proposição 6, o observador de estado $\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$ com

$$L = T^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{L}_o \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\bar{L}} = T^{-1} \begin{bmatrix} 19 \\ 126 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 88 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

estabiliza a matriz $A - LC$ de $\dot{e} = (A - LC)e$, onde $e = x - \hat{x}$ é o erro de estimação, com os polos em $\{-1, -1, -6, -9\}$ (união dos polos de $\bar{A}_o - \bar{L}_o\bar{C}_o$ com os polos de \bar{A}_δ).

Verificação:

$$A - LC = \begin{bmatrix} -17 & 1 & 0 & 0 \\ -88 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(sI - (A - LC)) = s^4 + 17s^3 + 85s^2 + 123s + 54 = 0$$

$$\Rightarrow s = -1, -1, -6, -9.$$

Concluimos então pelo princípio da separação que a estrutura controlador-observador com

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \\ u &= -K\hat{x}, \end{aligned}$$

torna a origem do sistema em malha-fechada globalmente assintoticamente estável com os polos em $\{-1, -1, -1, -2, -3, -4, -6, -9\}$, onde (veja o Exemplo 1 acima):

$$K = [40.0000 \ 11.3333 \ 0 \ 0.6666], \quad L = [19 \ 88 \ 0 \ 0]'$$

Obs 7: Pelo o que vimos até o momento nesta seção, concluimos que **todos** os resultados apresentados nas seções anteriores do presente capítulo permanecem válidos ao substituímos a hipótese de **controlabilidade** (par (A, B) é controlável) por **estabilizabilidade** (par (A, B) é estabilizável), e a hipótese de **observabilidade** (par (A, C) é observável) por **detectabilidade** (par (A, C) é detectável).

Teorema 3 (Decomposição Canônica de Kalman): Considere que o sistema (5.4) é não-controlável e/ou não-observável. Então, existe uma matriz invertível T tal que, nas novas coordenadas $\underbrace{(z_{co}, z_{c\bar{o}})}_{=z_c}, \underbrace{(z_{\bar{c}o}, z_{\bar{c}\bar{o}})}_{=z_{\bar{c}}} = (z_c, z_{\bar{c}}) = z = Tx$, (5.4) é descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{=\bar{A}=TAT^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\bar{B}=TB} u \\ &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{co} \\ \dot{z}_{c\bar{o}} \\ \dot{z}_{\bar{c}o} \\ \dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{co} \\ z_{c\bar{o}} \\ z_{\bar{c}o} \\ z_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \underbrace{[\bar{C}_c \ \bar{C}_{\bar{c}}]}_{=\bar{C}=CT^{-1}} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{\bar{c}} \end{bmatrix} = [\bar{C}_{co} \ 0 \ \bar{C}_{\bar{c}o} \ 0] \begin{bmatrix} z_{co} \\ z_{c\bar{o}} \\ z_{\bar{c}o} \\ z_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde o estado z_{co} é controlável e observável, $z_{c\bar{o}}$ é controlável e não-observável, $z_{\bar{c}o}$ é não-controlável e observável, e $z_{\bar{c}\bar{o}}$ é não-controlável e não-observável. Além disso, o subsistema de ordem reduzida

$$\begin{aligned} \dot{z}_{co} &= \bar{A}_{co}z_{co} + \bar{B}_{co}u, \\ y_{co} &= \bar{C}_{co}z_{co}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

é controlável e observável, e possui a mesma matriz de transferência que (5.4), ou seja,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co}.$$

Prova: Primeiramente, utilizamos o Teorema 1 acima no sistema (5.4), subdividindo o sistema nas partes controlável e não-controlável. Em seguida aplicamos, tanto na parte controlável quanto na parte não-controlável resultantes, o Teorema 2 anterior. Isto significa que subdividimos cada uma das partes controlável e não-controlável nas partes observável e não-observável.

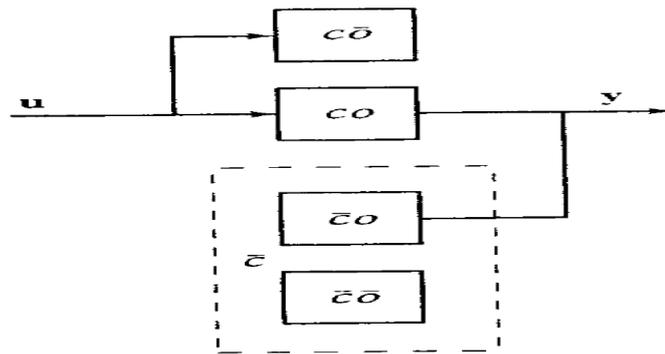


Figura 23 – Decomposição Canônica de Kalman.

Ressaltamos que os polos de A são dados pela união (com repetição) dos polos de \bar{A}_{co} , $\bar{A}_{c\bar{o}}$, $\bar{A}_{\bar{c}o}$, $\bar{A}_{\bar{c}\bar{o}}$. A decomposição canônica de Kalman é ilustrada na Figura acima, em que percebemos que apenas a dinâmica do estado controlável e observável z_{co} está conectada tanto à entrada quanto à saída do sistema. Isto ilustra o fato da matriz de transferência $G(s)$ do sistema só depender do **subsistema controlável e observável** (5.10):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co}.$$

Concluimos assim que: **a descrição de um sistema através da matriz de transferência $G(s)$ não capta toda a descrição fornecida pelo modelo de estado (5.4)! A matriz de transferência $G(s)$ capta apenas a relação entrada-saída do subsistema controlável e observável (e para condição inicial $x(0) = 0$ nula)! Por exemplo, se algum polo da parte não-controlável $\bar{A}_{\bar{c}}$ estiver no SPD (i.e. o sistema (5.4) não é estabilizável), então alguma variável de estado do sistema (5.4) poderá explodir**

com o tempo (dependendo da condição inicial), mas tal comportamento não tem como ser captado pela matriz de transferência $G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co}$.

Obs 8: No Matlab, o comando `minreal` determina uma matriz invertível T que coloca o sistema (5.4), nas novas coordenadas $z = Tx$, na forma canônica de Kalman.

5.12 Realização de Matrizes de Transferência

Definição: Dizemos que uma matriz de transferência $G(s) = (G_{ij}(s))$ é **estritamente própria** quando cada componente $G_{ij}(s) = N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ é racional com $\text{grau}(D_{ij}(s)) < \text{grau}(N_{ij}(s))$, onde $N_{ij}(s)$ e $D_{ij}(s)$ são polinômios em s .

Definição: Seja $G(s)$ uma matriz de transferência estritamente própria. Dizemos que $G(s)$ é **realizável** quando existe um sistema linear da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

em que sua matriz de transferência correspondente coincide com $G(s)$, ou seja, temos que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Neste caso, dizemos que tal sistema é uma **realização** de $G(s)$. Por simplicidade, denotaremos tal sistema por (A, B, C) e diremos que (A, B, C) é uma **realização** de $G(s)$. Dizemos que um sistema da forma acima é uma **realização minimal** de $G(s)$ (ou que (A, B, C) é uma **realização minimal** de $G(s)$) quando: (i) o sistema é uma realização de $G(s)$, e (ii) a ordem de tal sistema é menor ou igual à ordem de todas as outras possíveis realizações de $G(s)$.

O problema de encontrar uma realização de $G(s)$ é motivado por situações práticas. Em primeiro lugar, existem muitos métodos de projeto de controladores e algoritmos computacionais que são baseados em modelos de estado, e não em matrizes de transferência. Desse modo, quando desconhecemos o modelo de estado de uma planta mas conhecemos sua matriz de transferência $G(s)$ (por exemplo, quando identificamos $G(s)$ experimentalmente pela resposta ao degrau), temos que encontrar uma realização de $G(s)$ para que tais métodos e algoritmos possam ser aplicados. Isto ocorre quando simulamos a saída de uma matriz de transferência $G(s)$ a uma entrada escolhida no Matlab/Simulink: para efetuar a simulação, o Matlab/Simulink primeiramente encontra uma realização (A, B, C) de $G(s)$, e em seguida calcula a saída por integração numérica de tal modelo de estado. Em segundo lugar, uma dada matriz de transferência $G(s)$ (de um controlador, por exemplo) pode ser implementada eletronicamente na prática pela utilização de amp-ops com base na determinação de uma realização.

Pelo o que vimos na seção anterior, se existir uma certa realização de $G(s)$, então há infinitas realizações de $G(s)$. De fato, suponha que (A, B, C) é uma realização de $G(s)$. Então, para cada matriz invertível T , temos que $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$ também é

uma realização de $G(s)$, pois

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}.$$

Desse modo, o problema de se encontrar uma realização minimal de $G(s)$ é crucial na prática, pois quanto menor for a ordem de uma realização, menor será o número de amp-ops necessários para implementá-la, ou seja, menor a complexidade e o custo envolvido.

Veremos na sequência como encontrar uma realização de $G(s)$, como verificar se uma realização é de fato minimal, e como determinar uma realização minimal de $G(s)$.

Primeiramente vamos tratar da realização de funções de transferência estritamente próprias da forma $G(s) = N'(s)/D'(s)$ (caso SISO). Suponha que, após termos efetuado todos os possíveis cancelamentos polo-zero em $G(s)$, obtemos que

$$G(s) = \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0},$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ não possuem fatores em comum, ou seja, não há mais possíveis cancelamentos polo-zero. Considere o seguinte sistema de ordem n (**forma canônica de controlabilidade**):

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{= A \in \mathbb{R}^{n \times n}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= B \in \mathbb{R}^n} u,$$

$$y = \underbrace{[\beta_0 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]}_{= C \in \mathbb{R}^n} x.$$

Pode-se mostrar que a forma canônica de controlabilidade acima possui as seguintes propriedades:

1. $\det(sI - A) = D(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$;
2. (A, B) é controlável e (A, C) é observável;
3. $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, ou seja, a forma canônica de controlabilidade é uma realização de $G(s) = N(s)/D(s)$.

Teorema 1: Seja

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0},$$

onde os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ não possuem fatores em comum. Considere que (A, B, C) é uma realização de $G(s)$. Então, as seguintes afirmações são **equivalentes**:

- (A, B, C) é uma realização minimal de $G(s)$;
- (A, B) é controlável e (A, C) é observável;
- $\text{ordem}(A) = n$ (ou seja, a ordem do sistema (A, B, C) coincide com $\text{grau}(D(s))$).

Em particular, a forma canônica de controlabilidade acima é uma realização minimal de $G(s)$.

Exemplo: Seja

$$G(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+5)(s+8)} = \frac{2s+6}{s^3+13s^2+40s}.$$

Então, uma realização minimal de $G(s)$ é dada pela forma canônica de controlabilidade:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40 & -13 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u,$$

$$y = \underbrace{[6 \ 2 \ 0]}_{=C} x.$$

Verificação:

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s+6}{s^3+13s^2+40s} = G(s),$$

e a forma canônica de controlabilidade tem ordem 3 (veja o Teorema 1 acima).

Obs 1: Em muitas situações práticas, não conhecemos o modelo de estado de uma planta linear SISO, mas apenas sua função de transferência $G(s)$ (determinada experimentalmente pela resposta ao degrau, por exemplo). Em tal caso, podemos mesmo assim aplicar os métodos de controle tratados anteriormente no presente capítulo (no entanto, relembre da seção anterior que $G(s)$ é determinada apenas pelo **subsistema controlável e observável** da planta!) Por exemplo, suponha que desejamos projetar um controlador em série com a planta e com realimentação unitária para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação (isto foi abordado na disciplina *Sistemas de Controle* no domínio da frequência: Transformada de Laplace + Lugar das Raízes). Pelo o que vimos acima e com os resultados apresentados no Lab 6, concluímos que podemos projetar tal controlador no domínio do tempo através dos seguintes passos:

1. Encontre as matrizes A, B, C da forma canônica de controlabilidade de $G(s)$;
2. Determine o modelo interno de ordem k

$$\dot{x}_m = A_m + B_m e$$

para a referência $r(t)$ e a perturbação $w(t)$, onde $e = r - y$ é o erro de rastreamento;

3. Verifique que o par (A_a, B_a) do sistema aumentado é estabilizável (já sabemos que o par (A, C) é observável);

4. Determine K_a de modo a estabilizar $A_a - B_a K_a$ e L de modo a estabilizar $A - LC$, verificando que os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ não coincidem com os polos da referência e da perturbação (ou seja, com as raízes de $\beta(s) = 0$ do modelo interno);
5. O modelo de estado do controlador projetado é dado por

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK - LC & -BK_m \\ 0 & A_m \end{bmatrix}}_{=A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} -L \\ B_m \end{bmatrix}}_{=B_c} e,$$

$$u = - \underbrace{\begin{bmatrix} K & K_m \end{bmatrix}}_{K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c},$$

e sua função de transferência é dada por

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_a (sI - A_c)^{-1} B_c;$$

6. A implementação deste controlador de ordem $n + k$ resolve o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Os polos de malha fechada de $Y(s)/R(s) = C(s)G(s)/[1 + C(s)G(s)]$ e de $Y(s)/W(s)$ serão a união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$ (a menos de cancelamentos polo-zero).

Vamos agora abordar a realização de matrizes de transferência $G(s)$ estritamente próprias (caso MIMO). Com o objetivo de não sobrecarregar a notação, assuma por simplicidade que ($m = 3$ entradas e $p = 2$ saídas)

$$G(s) = (G_{ij}(s)) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

onde $G_{ij}(s) = N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$, $\text{grau}(D_{ij}(s)) < \text{grau}(N_{ij}(s))$, e os polinômios $N_{ij}(s)$ e $D_{ij}(s)$ não possuem fatores em comum. Seja (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) uma realização minimal da função de transferência $G_{ij}(s)$ (a forma canônica de controlabilidade, por exemplo). Então, pode-se

mostrar que o seguinte sistema é uma realização de $G(s)$:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{13} \\ B_{21} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad (5.12)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2: Seja $G(s) = (G_{ij}(s))$ uma matriz de transferência estritamente própria. Suponha que em cada componente $G_{ij}(s) = N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ os polinômios $N_{ij}(s)$ e $D_{ij}(s)$ não possuem fatores em comum. Considere que (A, B, C) é uma realização de $G(s)$. Então, as seguintes afirmações são **equivalentes**:

- (A, B, C) é uma realização minimal de $G(s)$;
- (A, B) é controlável e (A, C) é observável;
- $\text{ordem}(A) = \text{grau}(G(s))$ (não vamos abordar a definição de $\text{grau}(G(s))$ em nosso curso: veja o livro do Chen para maiores detalhes).

Concluimos então pelo Teorema 2 acima e pela decomposição canônica de Kalman (Teorema 3 da Seção 5.11) que, para obtermos uma realização minimal da matriz de transferência $G(s)$ em (5.11), basta seguirmos o seguinte procedimento:

1. Encontre uma realização de $G(s)$ como em (5.12);
2. Determine o subsistema controlável e observável (5.10) da decomposição canônica de Kalman do sistema (5.12);
3. O subsistema controlável e observável $(\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co})$ é uma realização minimal de $G(s)$, pois $G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co}$.

Obs 2: No Matlab, o comando `minreal` (*minimal realization*) determina uma realização minimal da matriz de transferência $G(s)$ em (5.11).

Obs 3: Seja $G(s) = (G_{ij}(s))$ uma matriz de transferência estritamente própria. Suponha que em cada componente $G_{ij}(s) = N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ os polinômios $N_{ij}(s)$ e $D_{ij}(s)$ não possuem fatores em comum. Se (A, B, C) é uma realização minimal de $G(s)$, então dada qualquer matriz invertível T , temos que $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$ também é uma realização minimal de $G(s)$, pois (A, B, C) e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ possuem a mesma ordem, e (relembre os resultados da Seção 5.11)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}.$$

Pode-se mostrar que a recíproca também é verdadeira: se (A, B, C) e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ são realizações minimais de $G(s)$, então existe uma matriz invertível T tal que $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$.

5.13 Implementação Digital

Veremos nesta seção como implementar de maneira aproximada os controladores projetados nas seções anteriores através de um algoritmo computacional. Seja $T_s > 0$ o período de amostragem.

Implementação da realimentação de estado:

$$u = -Kx.$$

Algoritmo:

1. Leia $x_k = x(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
2. Calcule $u_k = -Kx_k$
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 1.

Obs 1: Seja $u_c(t)$ o controle constante por partes resultante do algoritmo computacional acima. Para $T_s \cong 0$, espera-se que $u_c(t) \cong u(t) = -Kx(t)$.

Obs 2: Suponha que a planta tem n estados e m entradas, ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$. Caso não há operações matriciais disponíveis no microcontrolador a ser utilizado, pode-se calcular cada variável de controle $u_i \in \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$u_{k,i} = -K_i x_k = \sum_{j=1}^n -K_{ij} x_{k,j}, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $u_k = (u_{k,1}, \dots, u_{k,m}) \in \mathbb{R}^m$ e $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ para $k \geq 0$, e $K_i = (K_{ij})$ é a i -ésima linha da matriz de ganho K .

Implementação da configuração controlador-observador:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly, \\ u &= -K\hat{x}. \end{aligned}$$

Neste caso, a ideia é aproximar o controlador em tempo contínuo projetado por um controlador em tempo discreto com $T_s \cong 0$. O **método de aproximação forward** fornece que, para $T_s \cong 0$:

$$\frac{\widehat{x}((k+1)T_s) - \widehat{x}(kT_s)}{T_s} \cong \dot{\widehat{x}}(kT_s) = (A - BK - LC)\widehat{x}(kT_s) + Ly(kT_s)$$

Assim, obtemos a seguinte equação recursiva para o estado estimado:

$$\widehat{x}((k+1)T_s) = T_s(A - BK - LC)\widehat{x}(kT_s) + T_sLy(kT_s) + \widehat{x}(kT_s), \quad T_s \cong 0.$$

Algoritmo:

1. $\widehat{x}_k = \widehat{x}(0)$ (inicialização – condição inicial do observador de estado);
2. Calcule $u_k = -K\widehat{x}_k$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Leia $y_k = y(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
5. Calcule $\widehat{x}_{k+1} = T_s(A - BK - LC)\widehat{x}_k + T_sLy_k + \widehat{x}_k$;
6. Atualize $\widehat{x}_k = \widehat{x}_{k+1}$;
7. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 2.

Obs 3: Seja $u_c(t)$ o controle constante por partes resultante do algoritmo computacional acima. Para $T_s \cong 0$, espera-se que $u_c(t) \cong u(t) = -K\widehat{x}(t)$.

Obs 4: Suponha que a planta tem em n estados, m entradas e p saídas, ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ e $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Caso não há operações matriciais disponíveis no microcontrolador a ser utilizado, pode-se calcular cada variável de controle $u_i \in \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$u_{k,i} = -K_i\widehat{x}_k = \sum_{j=1}^n -K_{ij}\widehat{x}_{k,j}, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $u_k = (u_{k,1}, \dots, u_{k,m}) \in \mathbb{R}^m$ e $\widehat{x}_k = (\widehat{x}_{k,1}, \dots, \widehat{x}_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ para $k \geq 0$, e $K_i = (K_{ij})$ é a i -ésima linha da matriz de ganho K , com

$$\widehat{x}_{k+1,j} = T_s(A - BK - LC)_j\widehat{x}_k + T_sL_jy_k + \widehat{x}_{k,j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde $(A - BK - LC)_j$ e L_j é a j -ésima linha da matriz $A - BK - LC$ e L , respectivamente.

6 Controle Linear de Sistemas Não-Lineares

Este capítulo trata de técnicas de controle linear para sistemas não-lineares. Veremos como os controladores vistos no capítulo anterior podem ser utilizados em sistemas não-lineares.

6.1 Estabilidade de Lyapunov

No decorrer de toda esta seção, consideremos sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Relembre do Lab 2 que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Relembramos também os próximos dois resultados do Lab 2:

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$ **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

Teorema: Considere o sistema $\dot{x} = f(x)$. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Definição (Estabilidade de Lyapunov): Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$. Então:

1. Dizemos que x^e é **estável** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0) - x^e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0;$$

2. Dizemos que x^e é **instável** quando x^e não é estável;
3. Dizemos que x^e é **(localmente) assintoticamente estável** quando x^e é estável e, além disso, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|x(0) - x^e\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e;$$

4. Dizemos que x^e é **globalmente assintoticamente estável** quando: (a) $D = \mathbb{R}^n$, (b) x^e é estável, e (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e$ para qualquer $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Obs: Para sistemas lineares da forma $\dot{y} = Ay$, com $y \in \mathbb{R}^n$, temos que a origem $y^e = 0$ é (localmente) assintoticamente estável **se e somente se** $y^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável. Assim, para sistema lineares, só faz sentido em se falar de estabilidade assintótica global. Relembre da Seção 5.2 que: (a) $y^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** todos os polos (autovalores) da matriz A estão no SPE; e (b) se a matriz A possui algum polo no SPD, então $y^e = 0$ é instável.

Definição: Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = f(x)$. A **região (ou domínio) de atração** de x^e é o conjunto $R_A(x^e)$ formado por todas as condições iniciais cujas soluções convergem assintoticamente para x^e , ou seja,

$$R_A(x^e) = \{x(0) \in D \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e\}.$$

Note que $x^e \in R_A(x^e)$. Pode-se mostrar que $R_A(x^e)$ é um conjunto aberto. Note também que, se x^e é globalmente assintoticamente estável, então $R_A(x^e) = \mathbb{R}^n$.

O próximo resultado estabelece condições que permitem concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio $x^e \in D$ de um sistema não-linear $\dot{x} = f(x)$ a partir da determinação da estabilidade da origem do sistema linearizado associado. Relembre do Lab 3 que o sistema linearizado associado é dado por

$$\dot{x}_\delta = \underbrace{\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right]}_{=A} x_\delta = Ax_\delta.$$

Teorema (Método Indireto de Lyapunov): Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$, e considere a matriz do sistema linearizado associado

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e}.$$

Então:

1. Se todos os polos (autovalores) da matriz A estão no SPE, então x^e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = f(x)$;
2. Se ao menos um polo da matriz A está no SPD, então x^e é um ponto de equilíbrio instável.

Obs 1: Para sistemas lineares ou não-lineares no plano ($n = 2$), esse resultado estabelece que: (a) um ponto de equilíbrio x^e do tipo nó estável ou foco estável é de fato assintoticamente estável; e (b) um ponto de equilíbrio x^e do tipo nó instável, foco instável ou sela é de fato instável. Isto justifica a nomenclatura utilizada nos Labs 2 e 3.

Obs 2: Caso a matriz A do sistema linearizado possua algum polo em cima do eixo imaginário, então nada podemos concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio x^e pelo Método Indireto de Lyapunov.

Exemplo: Considere o sistema não-linear de 3ª ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2x_3 + 1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1x_3 - x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3^2(1 - x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

O único ponto de equilíbrio é $x^e = (1, 1, 1)$, pois: (i) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3^2(1 - x_3) = 0$ implica que $x_3 = 0$ ou $x_3 = 1$; (ii) para termos $f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2x_3 + 1x_3 = 0$ é exigido que $x_3 = 1$ e, conseqüentemente $x_2 = 1$; (iii) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2 = 0$ implica que $x_1 = 1$.

Agora, linearizando em $x^e = (1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned}A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e) &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e}, \\ &= \left[\begin{array}{ccc} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 2x_3 - 3x_3^2 \end{array} \right] \Bigg|_{x=(1,1,1)} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Os autovalores da matriz A são: $-1, -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Logo, $x^e = (1, 1, 1)$ é (localmente) assintoticamente estável. Ressaltamos que a linearização por si só não permite concluir se a estabilidade assintótica é local ou global, nem determinar (ou estimar) a região de atração.

6.2 Ponto de Equilíbrio

Ao longo do restante deste capítulo, vamos considerar equações de estado da forma

$$dx/dt = f(x, u),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Dizemos que o par (x^e, u^e) é um **ponto de equilíbrio (ou ponto de operação)** do sistema se $x(t) = x^e, t \geq 0$, é a solução constante do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ e entrada constante $u(t) = u^e, t \geq 0$. De maneira análoga ao caso autônomo, temos:

Proposição: O par $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x, u)$ se e somente se $f(x^e, u^e) = 0$.

Teorema: Considere o sistema $\dot{x} = f(x, u)$. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$) e considere que escolhemos uma entrada contínua $u(t), t \geq 0$, tal que

$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u} \in \mathbb{R}^m$. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $(\bar{x}, \bar{u}) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x, u)$, ou seja, $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Exemplo: Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Para encontramos todos os pontos de equilíbrio $(x^e, u^e) = ((x_1^e, x_2^e), u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ deste sistema, resolvemos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^e, x_2^e, u^e) = x_2^e \Rightarrow x_2^e = 0, \\ 0 &= f_2(x_1^e, x_2^e, u^e) = -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1^e) - \frac{k}{m} x_2^e + \frac{1}{m\ell^2} u^e \Rightarrow u^e = mgl \text{sen}(x_1^e). \end{aligned}$$

Logo, os pontos de equilíbrio são (x^e, u^e) com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mgl \text{sen}(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Isto significa que, se aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = mgl \text{sen}(\delta)$, $t \geq 0$, e a condição inicial do pêndulo for $x(0) = x^e = (\delta, 0)$ (i.e. ângulo inicial δ e velocidade angular inicial nula), então o pêndulo permanecerá parado no ângulo $\delta \in [0, 2\pi)$, ou seja, $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\delta, 0)$, para todo $t \geq 0$.

6.3 Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

onde $h: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^1 . Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$. Definimos então a **saída de equilíbrio** $y^e = h(x^e) \in \mathbb{R}^p$.

A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio (x^e, u^e) é dada por

$$f(x, u) = \underbrace{f(x^e, u^e)}_{=0} + \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=x^e, u=u^e} (x - x^e) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=x^e, u=u^e} (u - u^e) + \text{TOS},$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x, u) \cong \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta} + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta},$$

para $x_\delta = x - x^e \cong 0$, $u_\delta = u - u^e \cong 0$.

Do mesmo modo, a expansão em série de Taylor de h em relação a x^e é dada por

$$h(x) = \underbrace{h(x^e)}_{=y^e} + \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS},$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$h(x) - y^e \cong \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta},$$

para $x_\delta = x - x^e \cong 0$.

Agora, fixe uma entrada contínua $u(t)$, $t \geq 0$, e seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução correspondente do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$. Considere: (a) o **desvio** $x_\delta(t) = x(t) - x^e$ do **estado** $x(t)$ em relação a x^e ; (b) o **desvio** $u_\delta(t) = u(t) - u^e$ da **entrada** $u(t)$ em relação a u^e ; e (c) o **desvio** $y_\delta(t) = y(t) - y^e$ da **saída** $y(t) = h(x(t))$ em relação a y^e . Assim, quando $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$, $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$ (pequenos desvios no estado e na entrada), temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) &\cong \underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=x^e, u=u^e}}_{=A} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)} + \underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=x^e, u=u^e}}_{=B} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta}, \\ &= Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t), \\ y_\delta(t) = h(x(t)) - y^e &\cong \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e}}_{=C} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)}, \\ &= Cx_\delta(t). \end{aligned}$$

Denominamos o sistema linear (estado $x_\delta \in \mathbb{R}^n$, entrada $u_\delta \in \mathbb{R}^m$ e saída $y_\delta \in \mathbb{R}^p$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e). \end{aligned}$$

de **sistema linearizado** associado ao ponto de equilíbrio (x^e, u^e) .

6.4 Estabilização via Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u),$$

e suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$. Vamos tratar nesta seção do **problema de estabilização por realimentação de estado**:

encontrar uma realimentação de estado $u = \alpha(x)$, onde $\alpha: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 com $\alpha(x^e) = u^e$, tal que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do **sistema em malha-fechada**

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, \alpha(x)).$$

Note que x^e é de fato um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada, pois $\tilde{f}(x^e) = f(x^e, \alpha(x^e)) = f(x^e, u^e) = 0$.

O próximo resultado mostra como solucionar este problema de controle através da estabilização da origem $x_\delta = 0$ do sistema linearizado por uma realimentação linear de estado da forma $u_\delta = -Kx_\delta$. **A ideia principal é: $u = \alpha(x) = -K(x - x^e) + u^e$ assegura que a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (SMFL=SLMF)**. Em particular, concluímos pelo Teorema de Hartman-Grobman do Lab 3 que, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , o retrato de fase do sistema não-linear em malha-fechada terá um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado em malha-fechada.

Teorema: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x, u)$, e considere a equação de estado do sistema linearizado associado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e).$$

Suponha que o par (A, B) é controlável/estabilizável, e escolha uma matriz de ganho K de forma que todos os polos de $A - BK$ estejam no SPE. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = -K(x - x^e) + u^e \quad (\text{ou seja, } u_\delta = u - u^e = -K(x - x^e) = -Kx_\delta),$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x - x^e) + u^e).$$

Prova: Considere o sistema linearizado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \partial f(x^e, u^e)/\partial x, \quad B = \partial f(x^e, u^e)/\partial u.$$

Por hipótese, o par (A, B) é controlável/estabilizável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho K na realimentação $u_\delta = -Kx_\delta$ para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de $A - BK$ estejam no SPE. Assim,

$$u_\delta = -Kx_\delta,$$

e o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta - BKx_\delta = (A - BK)x_\delta.$$

Como os polos de $A - BK$ estão no SPE, temos que $x_\delta = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Mostraremos que a realimentação linear de estado (inspirada na do sistema linearizado com $x_\delta = x - x^e$ e $u_\delta = u - u^e$)

$$u = \alpha(x) = -K(x - x^e) + u^e = -Kx + Kx^e + u^e,$$

resolve de fato o problema de estabilização para o sistema não-linear. Note que $\alpha(x^e) = u^e$. Logo, x^e é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x - x^e) + u^e).$$

Vamos aplicar agora o Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 3.2 no sistema em malha-fechada acima. Temos que

$$\tilde{A} = \left. \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x^e) = A - BK,$$

ou seja, **a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (SMFL=SLMF)**. Como todos os polos de $\tilde{A} = A - BK$ estão no SPE (pela escolha da matriz de ganho K), concluímos pelo Método Indireto de Lyapunov que x^e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto encerra a demonstração.

Exemplo: Considere novamente o pêndulo simples controlado da seção anterior

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u). \end{aligned}$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mgl \text{sen}(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \text{sen}(x_1^e) = \text{sen}(\delta)$. Supondo que $x_1^e = \delta = \pi/4$ ($= 45^\circ$), nosso objetivo é encontrar uma realimentação de estado $u = \alpha(x)$ que estabilize o ponto de equilíbrio $x^e = (\delta, 0)$ do pêndulo em malha-fechada. Ressaltamos que: (i) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (ii) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \text{sen}(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio $x^e = (\delta, 0)$).

Seja $f = (f_1, f_2)$. As matrizes A e B do sistema linearizado associado são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e}, \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -10 \cos(\delta) & -1 \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{array} \right], \\ B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1, x_2, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_1, x_2, u) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathcal{C} = [B \ AB]_{2 \times 2} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{array} \right] \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}) = 100).$$

Logo, o par (A, B) é controlável. Suponha que os pólos desejados para $A - BK$ são: $-4, -4$ (nó estável, em que um pólo em $s = -4$ corresponde a uma constante de tempo de 0.25 segundo). Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 5.7):

$$K = [k_1 \ k_2] = [0.8929 \ 0.7].$$

Portanto, a realimentação linear de estado

$$\begin{aligned} u &= -K(x - x^e) + u^e = -k_1(x_1 - x_1^e) - k_2(x_2 - x_2^e) + u^e, \\ &= -k_1(x_1 - \delta) - k_2 x_2 + \text{sen}(\delta), \\ &= -0.9(x_1 - \pi/4) - 0.7x_2 + \sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização.

Simulações: veja o arquivo `EstabilizacaoPenduloSimples.mdl` no Moodle

Pode-se mostrar que $x^e = (\delta, 0) = (\pi/4, 0)$ é o **único** ponto do equilíbrio do sistema não-linear em malha-fechada. Pelo retrato de fase mostrado abaixo na Figura 24, percebemos que x^e é **globalmente** assintoticamente estável.

No entanto, se o polo duplo desejado para $A - BK$ for $s = -0.1$ (lento), então temos que

$$K = [-0.7060 \ -0.0790],$$

e pode-se mostrar que há 3 pontos de equilíbrio distintos para o sistema em malha-fechada:

$$\begin{array}{ll} x^{e1} = (\delta, 0) = (0.7854, 0) & \text{nó estável,} \\ x^{e2} = (0.7885, 0) & \text{sela,} \\ x^{e3} = (-1.6301, 0) & \text{sela.} \end{array}$$

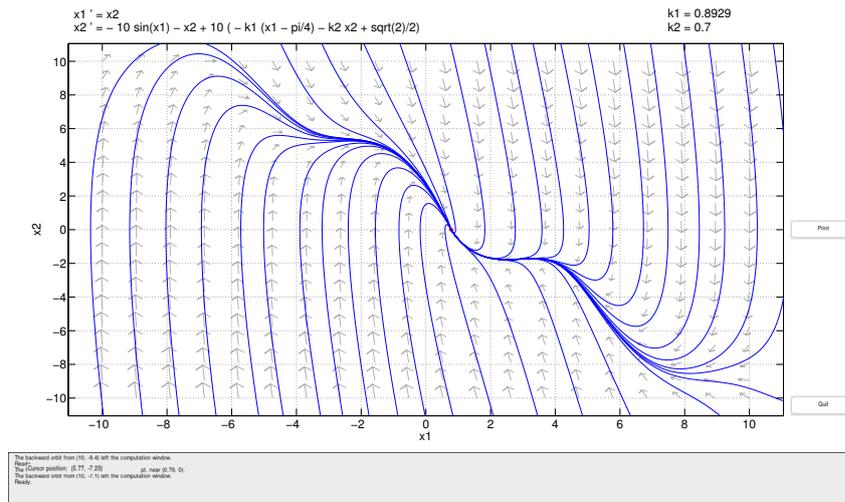


Figura 24 – Retrato de fase do pêndulo simples não-linear em malha-fechada com polo duplo em $s = -4$ (rápido).

De acordo com o retrato de fase mostrado na Figura 25, percebemos que $x^{e1} = (\delta, 0)$ é apenas **localmente** assintoticamente estável, e com uma região de atração relativamente pequena. Ressaltamos que apenas os dois primeiros pontos de equilíbrio são mostrados, a escala no eixo horizontal é de 0.76 a 0.80, e a escala do eixo vertical é de -5×10^{-3} a 5×10^{-3} .

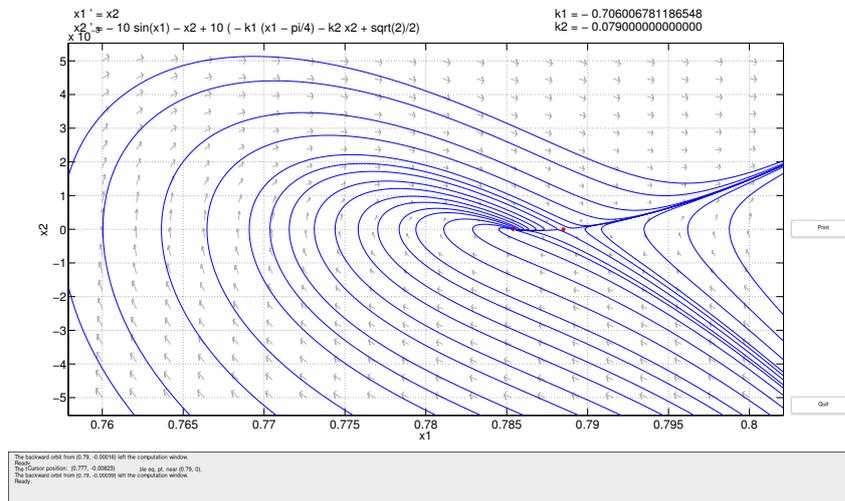


Figura 25 – Retrato de fase do pêndulo simples não-linear em malha-fechada com polo duplo em $s = -0.1$ (lento).

Conclusão: De maneira geral, o tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio de malha-fechada assintoticamente estável depende da escolha dos polos de $A - BK$! Além disso, se os polos forem muito lentos ou muito rápidos, então a região de atração pode se tornar muito pequena. **Portanto, a escolha dos polos de malha-fechada deve**

levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração!

Interpretação: O sistema linearizado aproxima relativamente bem a dinâmica de um sistema não-linear apenas enquanto $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ e $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$ (pequenos desvios). Assim, para polos muito lentos ($s = -0.1$), temos que os ganhos de realimentação podem ser insuficientemente grandes para que o esforço de controle $u(t)$ (torque) compense adequadamente as não-linearidades do sistema (a gravidade no caso do pêndulo simples). Consequentemente, tem-se que $|x_\delta(t)| = |x(t) - x^e| \gg 0$ e $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$, levando o estado do sistema em malha-fechada a divergir do ponto de equilíbrio $x^{e1} = (\delta, 0)$ quando a condição inicial $x(0)$ está relativamente longe de x^{e1} . Semelhantemente, pode acontecer que, ao escolhermos polos muito rápidos, certas condições iniciais também estejam fora de região de atração de x^{e1} . A explicação intuitiva é que os ganhos de realimentação se tornam elevados e, conseqüentemente, $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$ nos instantes iniciais.

O Teorema anterior soluciona o problema de estabilização quando todos os estados podem ser realimentados (medidos). No entanto, isto não sempre será possível em muitas situações práticas. O próximo resultado apresenta condições para que o problema de estabilização seja solucionado através da realimentação do estado estimado.

Teorema: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x),\end{aligned}$$

e considere o sistema linearizado associado

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e).\end{aligned}$$

Suponha que o par (A, B) é controlável/estabilizável e que o par (A, C) é observável/detectável. Escolha matrizes de ganho K e L de forma que todos os polos de $A - BK$ e $A - LC$ estejam no SPE, respectivamente. Então, a configuração controlador-observador **linear**

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)), \\ u &= \alpha(\hat{x}) = -K(\hat{x} - x^e) + u^e \quad (\text{ou seja, } u_\delta = u - u^e = -K(\hat{x} - x^e) = -K\hat{x} + Kx^e),\end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $\tilde{x}^e = (x^e, x^e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com vetor de estado $\bar{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u)|_{u=\alpha(\hat{x})} = f(x, -K(\hat{x} - x^e) + u^e), \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(h(x) - h(x^e)), \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Prova: Considere o sistema linearizado

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e). \end{aligned}$$

Por hipótese, (A, B) é controlável/estabilizável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho K na realimentação $u_\delta = -Kx_\delta$ para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de $A - BK$ estejam no SPE. Como (A, C) é observável/detectável, podemos encontrar uma matriz de ganho L de modo que todos os polos de $A - LC$ estejam no SPE.

Considere o seguinte **observador de estado** para o **sistema linearizado**

$$\dot{\hat{x}}_\delta = (A - LC)\hat{x}_\delta + Bu_\delta + Ly_\delta.$$

Ao realimentarmos o estado estimado \hat{x} por $u_\delta = -K\hat{x}$, temos o seguinte controlador-observador para o **sistema linearizado**:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_\delta &= (A - LC)\hat{x}_\delta + Bu_\delta + Ly_\delta = (A - BK - LC)\hat{x}_\delta + LCx_\delta, \\ u_\delta &= -K\hat{x}_\delta. \end{aligned}$$

Logo, o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\hat{x}}_\delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_\delta} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \hat{x}_\delta \end{bmatrix}.$$

Relembre da Seção 5.6 que os polos da matriz \tilde{A}_δ acima são a união (com repetição) dos polos de $A - BK$ com os polos de $A - LC$, pois (princípio da separação!):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{e}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ e_\delta \end{bmatrix},$$

com

$$\dot{e}_\delta = (A - LC)e_\delta,$$

onde $e_\delta = x_\delta - \hat{x}_\delta$. Portanto, $(x_\delta, \hat{x}_\delta) = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Em relação ao sistema linearizado, projetamos a configuração controlador-observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_\delta &= (A - LC)\hat{x}_\delta + Bu_\delta + Ly_\delta, \\ u_\delta &= -K\hat{x}_\delta. \end{aligned}$$

Com base no Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 6.2, vamos mostrar agora que a configuração controlador-observador linear (inspirado no do sistema linearizado com $\hat{x}_\delta = \hat{x} - x^e$, $\dot{\hat{x}} = \dot{\hat{x}}_\delta$, $u_\delta = u - u^e$ e $y_\delta = y - y^e = y - h(x^e)$!)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)) = (A - BK - LC)(\hat{x} - x^e) + L(h(x) - h(x^e)), \\ u &= \alpha(\hat{x}) = -K(\hat{x} - x^e) + u^e, \end{aligned}$$

resolve de fato o problema de estabilização do sistema não-linear. Note que $\alpha(x^e) = u^e$. Logo, $\bar{x}^e = (x^e, x^e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada com vetor de estado $\bar{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x, \hat{x}) = f(x, u)|_{u=\alpha(\hat{x})} = f(x, -K(\hat{x} - x^e) + u^e), \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{f}(x, \hat{x}) = (A - BK - LC)(\hat{x} - x^e) + L(h(x) - h(x^e)).\end{aligned}$$

Seja $\bar{f} = (\tilde{f}, \hat{f}): D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, a equação de estado do sistema em malha-fechada é dada por

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}),$$

com

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left. \frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^e} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, \tilde{x}) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \hat{x}}(x, \hat{x}) \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x, \tilde{x}) & \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}}(x, \hat{x}) \end{array} \right] \bigg|_{\bar{x}=\bar{x}^e} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) & \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{x}}(x^e) \\ L \frac{\partial h}{\partial x}(x^e) & A - BK - LC \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{array} \right] = \tilde{A}_\delta,\end{aligned}$$

ou seja, a **linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (SMFL=SLMF)**. Desse modo, mostramos que todos os polos de $\bar{A} = \tilde{A}_\delta$ estão no SPE. Pelo Método Indireto de Lyapunov, concluímos que $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto conclui a demonstração.

Obs 1: Ressaltamos que o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)) = (A - BK - LC)(\hat{x} - x^e) + L(h(x) - h(x^e)), \\ u &= \alpha(\hat{x}) = -K(\hat{x} - x^e) + u^e \quad (\text{ou seja, } u_\delta = u - u^e = -K(\hat{x} - x^e)),\end{aligned}$$

se comporta como uma configuração controlador-observador linear para o sistema não-linear em torno do ponto de equilíbrio $\bar{x}^e = (x^e, x^e) \in D \times \mathbb{R}^n$. De fato, em malha-fechada temos o sistema autônomo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -K(\hat{x} - x^e) + u^e) \\ &= f(x, -K(x - e - x^e) + u^e), \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x, -K(\hat{x} - x^e) + u^e) - (A - BK - LC)(\hat{x} - x^e) - L(h(x) - h(x^e)) \\ &= f(x, -K(x - e - x^e) + u^e) - (A - BK - LC)(x - e - x^e) - L(h(x) - h(x^e)),\end{aligned}$$

onde $z = (x, e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $e = x - \hat{x}$ é o erro de estimação, com $\hat{x} = x - e$. Portanto, $z^e = (x^e, 0) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio desse sistema, e a linearização associada é dada por (que, pela demonstração acima, coincide com o princípio

da separação do sistema linearizado com a configuração controlador-observador!)

$$\dot{z}_\delta = \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{e}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ e_\delta \end{bmatrix}}_{=z_\delta},$$

com $z_\delta = (x_\delta, e_\delta)$, $x_\delta = x - x^e$, $e_\delta = x_\delta - \hat{x}_\delta$. Logo, $z^e = (x^e, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando os polos de $A - BK$ e de $A - LC$ estão no SPE, com

$$\dot{e}_\delta = (A - LC)e_\delta,$$

o que coincide com a dinâmica do erro de estimação do sistema linearizado com a configuração controlador-observador!

Obs 2: Em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, então $\hat{x}(0) = x^e$ é uma escolha razoável, pois $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com vetor de estado $\bar{x} = (x, \hat{x})$. Além disso, mesmo quando $e(0) = 0$ (ou seja, $x(0) = \hat{x}(0)$), em geral não teremos que $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = 0$, para $t \geq 0$. Isto será válido caso $x(0) = \hat{x}(0) = x^e$, pois $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$ é um ponto de equilíbrio de malha-fechada, mas não é válido no caso geral.

Exemplo: Retomamos o pêndulo simples controlado do exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mgl \text{sen}(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere novamente que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$, $x_1^e = \delta = \pi/4$ ($= 45^\circ$). Desse modo, $u_e = \text{sen}(x_1^e) = \text{sen}(\delta)$. No entanto, agora vamos assumir que o estado x_2 (velocidade angular) não pode ser medido (realimentado). Vamos então aplicar o teorema acima.

Utilizaremos $u = -K(\hat{x} - x^e) + u^e$, com K como no exemplo anterior, e assim nos resta apenas determinar a matriz de ganho L do observador:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)).$$

Note que $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta$. A matriz C do sistema linearizado associado é dada por:

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e, u^e) = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] \Big|_{x=x^e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \quad (\det(\mathcal{O}) = 1).$$

Logo, o par (A, C) é observável. Suponha que os pólos desejados para $A - LC$ são: $-12, -12$. Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 5.7):

$$L = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a configuração controlador-observador projetada (relembre que $u^e = \text{sen}(\delta)$, $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta = \pi/4$ e $x_2^e = 0$)

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - \text{sen}(\delta)) + L(y - \delta), \\ u &= \alpha(\hat{x}) = -K(\hat{x} - x^e) + u^e = -0.9(\hat{x}_1 - \delta) - 0.7\hat{x}_2 + \text{sen}(\delta), \end{aligned}$$

assegura que $\bar{x}^e = (x^e, x^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com vetor de estado $\bar{x} = (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. No entanto, ressaltamos que $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$ não é globalmente assintoticamente estável. Por exemplo, $\bar{x}(0) = (x(0), \hat{x}(0)) = ((3.12 + \pi/4, 5), (\pi/4, 0))$ não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$, pois a solução correspondente $\bar{x}(t) = (x(t), \hat{x}(t))$, $t \geq 0$, converge para um outro ponto de equilíbrio (relembre o Teorema da Seção 6.2).

Simulações: veja o arquivo `EstabilizacaoPenduloSimples.mdl` no Moodle.

Obs: De maneira geral, o ponto de equilíbrio (x^e, u^e) e a saída de equilíbrio $y^e = h(x^e)$ dependerão dos parâmetros físicos do sistema não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Se este for o caso, então os controladores dos dois teoremas de estabilização acima (realimentação de estado e realimentação do estado estimado) poderão não ser robustos, pois note que tais controladores dependem de x^e, u^e, y^e . Nas próximas seções (Labs 7 e 8), veremos como eliminar essa dependência através do uso de controle integral.

6.5 Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado (Lab 7)

Objetivos: Vamos abordar o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares. Isto será atingido com base em controle integral via sistema linearizado. Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 5, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

6.5.1 Definição do Problema de Controle

Considere uma **planta** modelada por (n estados, m entradas, $p = m$ saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w), \\ y &= h(x, w), \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $\boxed{p = m}$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^1 . Assuma que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \bar{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \bar{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) = \bar{r} - y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastree assintoticamente o vetor de referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

6.5.2 Estrutura de Controle

Para resolvermos o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares, vamos considerar a mesma estrutura de controle em malha-fechada do Lab 5:

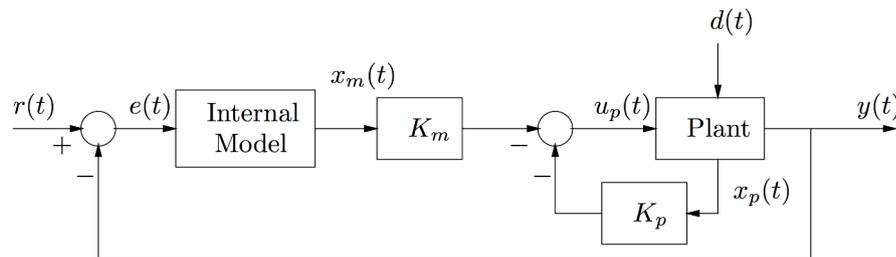


Figura 26 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amps.

Mostraremos na sequência que o rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ do tipo degrau será atingido através da estabilização de um ponto de equilíbrio em malha-fechada.

Como a referência $r(t)$ e a perturbação $w(t)$ são do tipo degrau, temos que $\beta(s) = s$. Assim, $A_m = 0$, $B_m = I$, e o modelo interno é dado por (veja o Lab 5):

$$\dot{x}_m = e,$$

ou seja, para $x_m(0) = 0$,

$$x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Fixe $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$, e considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $x_a = (x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$ (relembre que $e = \bar{r} - y$ e $y = h(x, \bar{w})$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ y &= h(x, \bar{w}), \end{aligned}$$

onde $r(t) = \bar{r}$ e $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$.

Suponha que $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio desse sistema. Desse modo, as componentes x^e, u^e de tal ponto de equilíbrio devem satisfazer:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}), \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w}), \end{aligned} \tag{6.2}$$

mas a componente $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrária**.

Obs: Note que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$, e

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

significa que $y^e = h(x^e, \bar{w}) = \bar{r}$, ou seja, a saída de equilíbrio da planta é igual a \bar{r} , com $r(t) = \bar{r}$, $t \geq 0$. Além disso, ressaltamos que os pares $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ que satisfazem (6.2) dependem das amplitudes \bar{r} e \bar{w} , ou seja, $x^e = x^e(\bar{r}, \bar{w}) \in D$ e $u^e = u^e(\bar{r}, \bar{w}) \in \mathbb{R}^m$ com

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^e(\bar{r}, \bar{w}), u^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w}), \\ \bar{r} &= h(x^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w}). \end{aligned}$$

Agora, considere a realimentação de estado linear¹

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m, \quad \text{com } u^e = -Kx - K_m x_m^e. \tag{6.3}$$

¹ Note que $u = -K(x - x^e) - K_m(x_m - x_m^e) + u^e = -Kx - K_m x_m + \overbrace{(Kx^e + K_m x_m^e + u^e)}{=0} = -Kx - K_m x_m$. Assim, não é necessário realizar um *off-set* dos equilíbrios na lei de controle!

Consequentemente, $\alpha(x^e, x_m^e) = u^e$ e, assim, (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio do **sistema aumentado malha-fechada** (veja (6.2)):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w})|_{u=-K\hat{x}-K_mx_m} = f(x, -Kx - K_mx_m, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ y &= h(x, \bar{w}).\end{aligned}\tag{6.4}$$

Assuma que (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do sistema acima. Portanto, para toda condição inicial dentro da região de atração de (x^e, x_m^e) , temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), x_m(t)) = (x^e, x_m^e)$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(x^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0.$$

Desse modo, mostramos que para se resolver **localmente** em torno de (x^e, x_m^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ do tipo degrau, basta estabilizarmos o ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e) do sistema em malha-fechada (6.4). Isto será alcançado através da estabilização da origem do sistema linearizado de (6.4) em (x^e, x_m^e) (relembre o Método Indireto de Lyapunov da Seção 6.2).

Obs: O sinal de controle aplicado em malha-fechada possui ação integral, pois para $x_m(0) = 0$:

$$u(t) = -Kx - K_mx_m, \quad \text{com } x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \Leftrightarrow \dot{x}_m(t) = e(t), \quad t \geq 0.$$

Explicaremos agora o motivo pelo qual a ação integral do controlador projetado garante robustez em relação a perturbações paramétricas na planta que não destroem a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio de malha-fechada associado. De maneira geral, perturbações paramétricas na planta irão alterar os pontos de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ do sistema aumentado em malha-fechada (6.4), ou seja, $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\rho), \tilde{x}_m^e(\rho))$, onde ρ é o vetor de parâmetros da planta. No entanto, desde que o ponto de equilíbrio de malha-fechada perturbado $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ seja assintoticamente estável e a condição inicial esteja dentro da região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$, temos que a ação integral do controlador projetado forçará o erro de rastreamento a convergir assintoticamente para zero! De fato:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(\tilde{x}^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0.$$

O **sistema aumentado linearizado** no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (veja (6.2)), onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $x_{a\delta} = (x_\delta, x_{m\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado do Lab 5

com $A_m = 0$, $B_m = I$, $E = F = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a\delta} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta, \\ y_{a\delta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}, & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)} \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}. \end{aligned}$$

Obs: Perceba que o sistema linearizado da planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w), \\ y &= h(x, w), \end{aligned}$$

no ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, \\ y_\delta &= Cx_\delta, \end{aligned}$$

considerando que $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$. Assim, as matrizes A_a e B_a acima do sistema aumentado linearizado são determinadas a partir da linearização da planta no ponto de equilíbrio (x^e, u^e) .

O **sistema aumentado linearizado em malha-fechada** com a realimentação $u_\delta = -K_a x_{a\delta} = -Kx_\delta - K_m x_{m\delta}$ como em (8.3), onde $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$, é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a\delta} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a - B_a K_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}, \\ y_{a\delta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

O próximo resultado estabelece condições para que o sistema aumentado em malha-fechada (6.4) apresente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. **A ideia central é: a linearização associada do sistema em malha-fechada (6.4) coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (6.6), ou seja, SMFL = SLMF, e assim basta estabilizarmos a origem de (6.6) (Método Indireto de Lyapunov).**

Teorema: Considere a planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w), \\ y &= h(x, w),\end{aligned}$$

e sejam $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente. Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ (**ponto de equilíbrio nominal** correspondente) é tal que

$$\begin{aligned}0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}), \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w}).\end{aligned}$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado (6.5) e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável/estabilizável. Escolha uma matriz de ganho $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = -Kx - K_m x_m,$$

é tal que:

1. A matriz de ganho $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é invertível;
2. Para $x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e)$, temos $u^e = -Kx^e - K_m x_m^e$ como em (8.3), e assim (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio de (6.4). Por construção, temos que **SMFL = SLMF**. Em particular, (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (6.4) (Método Indireto de Lyapunov);
3. Por continuidade (Teorema da Função Implícita + continuidade dos autovalores de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w})K_a$), temos que para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, existe em torno do equilíbrio nominal (x^e, x_m^e) um **único** ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -Kx - K_m x_m, \tilde{w}), \\ \dot{x}_m &= \tilde{r} - h(x, \tilde{w}), \\ y &= h(x, \tilde{w}), \quad r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r, \quad w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

com $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{u}^e)$ satisfazendo (6.2), onde $\tilde{u}^e = -K\tilde{x}^e - K_m \tilde{x}_m^e$.

Em particular, para tal ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ correspondente a $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitude

de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{r} - h(x(t), \tilde{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\tilde{r} - h(\tilde{x}^e, \tilde{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0,$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição da perturbação $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau.

Obs 1: Os resultados do teorema acima permanecem válidos se utilizarmos a seguinte lei de controle

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m + \bar{u},$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante, pois $\partial \alpha / \partial x = -K$, $\partial \alpha / \partial x_m = -K_m$, ou seja, a linearização do sistema aumentado em malha-fechada permanece a mesma! No entanto, em tal caso, teremos que

$$x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e - \bar{u}).$$

Obs 2: Note que projetamos um controlador integral linear (para $x_m(0) = 0$):

$$u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t) = -Kx(t) - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termo integral!}}, \quad t \geq 0.$$

Além disso, ressaltamos que, ao contrário dos controladores lineares de estabilização vistos na Seção 6.4, a expressão desta lei de controle não utiliza os valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e , que em geral dependem dos parâmetros da planta (**robustez!**). De maneira geral, perturbações no vetor de parâmetros $\rho \in \mathbb{R}^s$ da planta alteram o ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho))$ do sistema aumentado em malha-fechada e, conseqüentemente, afetam a matriz $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$. No entanto, a lei de controle do resultado acima é **robusta**, pois os resultados do teorema permanecem válidos para perturbações paramétricas na planta que mantenham os polos de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ no SPE. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. Aqui, estamos assumindo que a planta é modelada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, \rho), \\ y &= h(x, w, \rho), \end{aligned}$$

onde $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ são de classe C^1 .

Portanto, concluímos que o controlador integral linear projetado assegura **robustez** em malha-fechada para o problema de rastreamento de referências com rejeição de perturbações do tipo degrau, tanto para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, quanto para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor

nominal \bar{p} . Por fim, é importante se ter em mente que tal lei de controle não assegura que a região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m$.

Obs 3: O teorema acima não pode ser diretamente generalizado quando a referência e a perturbação não são do tipo degrau, no sentido de que se, por exemplo, a referência é exponencial e a perturbação é senoidal, não basta simplesmente utilizarmos o modelo interno correspondente e então projetar os ganhos K e K_m da realimentação com base nas matrizes A_a, B_a do sistema aumentado. Em tal caso, é preciso que condições adicionais sejam atendidas e que, de maneira geral, são difíceis de serem verificadas.

6.5.3 Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \text{sen}(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \text{sen}(x_1^e) = \text{sen}(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4$ ($= 45^\circ$). Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \text{sen}(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u, w), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u + \frac{1}{m\ell^2} w = f_2(x_1, x_2, u, w), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2, w). \end{aligned}$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\bar{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\bar{r} = y^e = h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}) = x_1^e = \delta$. Assim, o ponto de equilíbrio nominal $(x_1^e, x_2^e, u^e) = (\delta, 0, \text{sen}(\delta))$ satisfaz

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w}), \\ 0 &= f_2(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w}), \\ 0 &= \bar{r} - h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}). \end{aligned}$$

Determine as matrizes de ganho $K = [K_1 \ K_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$ de modo que o controlador linear integral

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_mx_m = -K_1x_1 - K_2x_2 - K_mx_m$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição de perturbações $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau, ao menos quando $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitudes da referência e da perturbação em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), considerando: (a) polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -1$ (lento), $s = -2$, $s = -4$ (moderado), $s = -40$ (rápido); (b) $\delta w = 0$, $\delta w = 0.5$ em $t = 15s$; (c) $\delta r = 0.1$, $\delta r = 3\pi/4$ em $t = 25s$; e (d) $x(0) = 0$, $x(0) = (\delta + \pi, 0)$. Note que, quando os polos de $A_a - B_a K_a$ estão em $s = -1$ (lentos) e $x(0) = (\delta + \pi, 0)$, então o erro de rastreamento não converge assintoticamente para zero, mas sim diverge!

Interpretação: O sistema linearizado aproxima relativamente bem a dinâmica de um sistema não-linear apenas enquanto $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ e $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$ (pequenos desvios). Assim, para polos lentos em $s = -1$ e com condição inicial $x(0) = (\delta + \pi, 0)$, temos que os ganhos de realimentação são insuficientemente grandes para que o esforço de controle $u(t)$ (torque) compense adequadamente a não-linearidade correspondente à gravidade. Consequentemente, tem-se que $|x_\delta(t)| = |x(t) - x^e| \gg 0$ e $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$, levando o estado do sistema em malha-fechada a divergir. Isto significa que a condição inicial $(x(0), x_m(0)) = ((\delta + \pi, 0), 0)$ está **fora da região de atração** do ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e) do sistema aumentado em malha-fechada. Observe que isto não ocorre quando $x(0) = 0$, ou seja, temos que $(x(0), x_m(0)) = (0, 0)$ está **dentro da região de atração!** No entanto, para polos moderados em $s = -4$, então $(x(0), x_m(0)) = ((\delta + \pi, 0), 0)$ está **dentro da região de atração!** Semelhantemente, pode acontecer que, ao escolhermos polos muito rápidos, certas condições iniciais também podem estar fora de região de atração. A explicação intuitiva é que os ganhos de realimentação se tornam elevados e, consequentemente, $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$ nos instantes iniciais.

Conclusão: De maneira geral, o tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio de malha-fechada assintoticamente estável depende da escolha dos polos! Além disso, se os polos forem muito lentos ou muito rápidos, então a região de atração pode se tornar muito pequena. **Portanto, a escolha dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração!**

Repita para pequenas e grandes variações δr e δw , e diversas outras condições iniciais.

3. Por fim, verifique por simulação que o controlador com ação integral projetado assegura robustez em relação a perturbações paramétricas, ao contrário dos estabilizadores lineares utilizados na Seção 3.4 da Teoria (relembre que as leis de controle estabilizantes dependem dos valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e). Para isto, assuma que há uma perturbação paramétrica

de 50% na massa do sistema: o valor nominal é o de projeto $m = 0.1$ ($u^e = \text{sen}(\delta)$), mas o valor real é $m = 0.15$ ($u^e = 1.5 \text{sen}(\delta)$).

Obs: Projetamos um controlador PID para o pêndulo, pois:

$$\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) - K_m x_m(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - K_m x_m(t) \\ &= -K_1 x_1(t) - K_2 \dot{x}_1(t) - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau (\pm K_1 \tilde{r}) \\ &= \underbrace{K_1 e(t) + K_2 \dot{e}(t) - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{PID!} - K_1 \tilde{r}, \end{aligned}$$

com $e(t) = r(t) - y(t) = \tilde{r} - x_1(t)$, $r(t) = \tilde{r}$ (degrau), $\dot{e}(t) = -\dot{x}_1(t)$. Assim, basta implementarmos o seguinte controlador PID (veja a Obs 1 acima):

$$u_{PID}(t) = u(t) + \underbrace{K_1 \tilde{r}}_{=\bar{u}} + K_1 \delta r = u(t) + K_1 \tilde{r} = \boxed{K_1 e(t) + K_2 \underbrace{\dot{x}_2(t)}_{=\dot{e}(t)} - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau},$$

com $\delta r = \tilde{r} - \bar{r}$, pois $K_1 \delta r$ pode ser visto como uma perturbação do tipo degrau na entrada $u(t) + K_1 \tilde{r}$ da planta. Por exemplo, para os polos de $A_a - B_a K_a$ em $-2, -3, -16$, temos um PID com ganhos $K_1 = 7.9$ (P), $K_2 = 2$ (D), $-K_m = 9.6$ (I).

6.6 Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares com Observador de Estado Linear: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado (Lab 8)

Objetivos: Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas não-lineares visto no Lab 7, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Isto será atingido com base em controle integral e estimação de estado lineares. Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 7, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

6.6.1 Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 7.2 do Lab 7 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas.

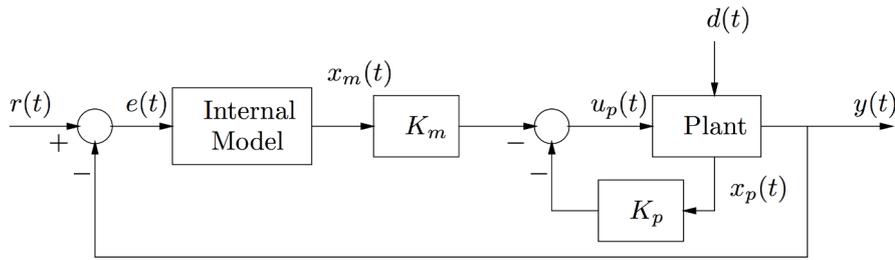


Figura 27 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_mx_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops.

Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\hat{x} - K_mx_m$.

Primeiramente, lembre do Lab 7 que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, $p = m$ saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w), \\ y &= h(x, w),\end{aligned}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $\boxed{p = m}$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^1 . Assumimos que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \bar{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \bar{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau.

Fixe $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ e considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $(x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ y &= h(x, \bar{w}),\end{aligned}\tag{6.7}$$

onde

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w}) = e$$

é o **modelo interno** ($A_m = 0$, $B_m = I$) e

$$e = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

é o **erro de rastreamento**, com $r(t) = \bar{r}$ e $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$.

Agora, considere o **observador de estado** linear (para a planta, e não para o sistema aumentado!)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.\tag{6.8}$$

Obtemos assim o **sistema aumentado com observador**, que tem como vetor de estado $(x, x_m, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + Bu + Lh(x, \bar{w}), \\ y &= h(x, \bar{w}).\end{aligned}\tag{6.9}$$

Suponha que $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio desse sistema. Desse modo, as componentes $x^e = x^e(\bar{r}, \bar{w}), \hat{x}^e = \hat{x}^e(\bar{r}, \bar{w}), u^e = u^e(\bar{r}, \bar{w})$ de tal ponto de equilíbrio devem satisfazer:

$$\begin{aligned}0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}), \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w}), \\ 0 &= (A - LC)\hat{x}^e + Bu^e + L\bar{r},\end{aligned}\tag{6.10}$$

mas a componente $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrária**.

Note que:

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \bar{w}, t \geq 0$, e

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

significa que $y^e = h(x^e, \bar{w}) = \bar{r}$, com $r(t) = \bar{r}, t \geq 0$.

Agora, considere a realimentação linear (do estado estimado \hat{x} e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\hat{x} - K_m x_m, \quad \text{com } u^e = -K\hat{x}^e - K_m x_m^e.\tag{6.11}$$

Consequentemente, temos que (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio do **sistema aumentado com observador em malha-fechada** (veja (6.10)):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w})|_{u=-K\hat{x}-K_mx_m} = f(x, -K\hat{x} - K_m x_m, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m + Lh(x, \bar{w}), \\ y &= h(x, \bar{w}).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Assuma que (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do sistema acima. Portanto, para toda condição inicial dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), x_m(t), \hat{x}(t)) = (x^e, x_m^e, \hat{x}^e)$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(x^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0.$$

Desse modo, mostramos que para se resolver **localmente** em torno de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ do tipo

degrau, basta estabilizarmos o ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) do sistema em malha-fechada (6.12). Isto será alcançado através da estabilização da origem do sistema linearizado de (6.12) em (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) (relembre o Método Indireto de Lyapunov da Seção 6.2).

Relembre o sistema aumentado (6.7). Vimos no Lab 7 que o **sistema aumentado linearizado** no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (relembre (6.10)), onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $(x_\delta, x_{m_\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta, \\ y_\delta &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{=C_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}, & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)} \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)} \end{aligned}$$

(note que as matrizes A_a e B_a acima são determinadas a partir da linearização da planta no ponto de equilíbrio (x^e, u^e)).

Agora, considere o **observador de estado** como em (6.8) para tal sistema linearizado

$$\hat{\dot{x}}_\delta = (A - LC)\hat{x}_\delta + Bu_\delta + Ly_\delta,$$

e a realimentação $u_\delta = -K\hat{x}_\delta - K_m x_{m_\delta}$ como em (6.11). Obtemos assim o **sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada** (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado com observador do Lab 6 com $A_m = 0$, $B_m = I$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \\ \dot{\hat{x}}_\delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -C & 0 & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \\ \hat{x}_\delta \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Mostramos no Lab 6 que o conjunto de polos da matriz A_e é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, onde $K_a = [K \ K_m]$ (**princípio da separação**).

O próximo resultado estabelece condições para que o sistema aumentado com observador em malha-fechada (6.12) apresente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. **A ideia central é: a linearização associada do sistema em malha-fechada (6.12) coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (6.14), ou seja, SMFL = SLMF, e assim basta estabilizarmos a origem de (6.14) (Método Indireto de Lyapunov).**

Teorema: Considere a planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w), \\ y &= h(x, w),\end{aligned}$$

e sejam $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente. Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ (**ponto de equilíbrio nominal** correspondente) é tal que

$$\begin{aligned}0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}), \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w}).\end{aligned}$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado (6.13) e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável/estabilizável e o par (A, C) é observável/detectável. Escolha as matrizes de ganho $K_a = [K \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, onde $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Então, o observador de estado (6.8) e a realimentação de estado linear $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ são tais que:

1. A matriz

$$\begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}$$

é invertível;

2. Para

$$\begin{bmatrix} x_m^e \\ \hat{x}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ -L\bar{r} \end{bmatrix},$$

temos que as condições em (6.10) são satisfeitas por $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u^e)$ com $u^e = -K\hat{x}^e - K_m x_m^e$ como em (6.11), e assim (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada (6.12). Por construção, temos **SMFL = SLMF**. Em particular, (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (6.12) (Método Indireto de Lyapunov);

3. Por continuidade (Teorema da Função Implícita + continuidade dos autovalores de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w})K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}) - LC(\tilde{r}, \tilde{w})$), temos que para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, existe em torno do equilíbrio nominal (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) um **único** ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{\hat{x}}^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -K\hat{x} - K_m x_m, \tilde{w}), \\ \dot{x}_m &= \tilde{r} - h(x, \tilde{w}), \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - K_m x_m + Lh(x, \tilde{w}), \\ y &= h(x, \tilde{w}), \quad r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r, \quad w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

com $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e, \tilde{u}^e)$ satisfazendo (6.10), onde $\tilde{u}^e = -K\tilde{x}^e - K_m\tilde{x}_m^e$. Em particular, para tal ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{\hat{x}}^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ correspondente a $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitude de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{r} - h(x(t), \tilde{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\tilde{r} - h(\tilde{x}^e, \tilde{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0,$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0), \hat{x}(0))$ pertencente à região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição da perturbação $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau.

Importante! O controlador projetado a ser implementado é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= e = r - y, \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \\ u &= -K\hat{x} - K_mx_m. \end{aligned}$$

Note que o observador de estado é referente somente à planta (não ao sistema aumentado!), já que sempre podemos realimentar o estado x_m pelo fato do modelo interno (integrador) ser implementado na prática.

Obs 1: Os resultados do teorema acima permanecem válidos se utilizarmos a seguinte lei de controle

$$u = \alpha(\hat{x}, x_m) = -K\hat{x} - K_mx_m + \bar{u},$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante, pois $\partial \alpha / \partial \hat{x} = -K$, $\partial \alpha / \partial x_m = -K_m$, ou seja, a linearização do sistema aumentado com observador em malha-fechada permanece a mesma! No entanto, em tal caso, teremos que

$$\begin{bmatrix} x_m^e \\ \hat{x}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^e - \bar{u} \\ -L\bar{r} \end{bmatrix}.$$

Obs 2: Temos um controlador integral linear (para $x_m(0) = 0$):

$$u(t) = -K\hat{x}(t) - K_mx_m(t) = -K\hat{x}(t) - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termo integral!}}, \quad t \geq 0.$$

Além disso, ao contrário dos controladores de estabilização vistos na Seção 6.4 da Teoria, as expressões do observador linear (6.8) e da realimentação acima não utilizam os valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e , que em geral dependem dos parâmetros da planta (**robustez!**). De maneira geral, perturbações no vetor de parâmetros $\rho \in \mathbb{R}^s$ da planta alteram o

ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{x}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho))$ do sistema aumentado em malha-fechada e, conseqüentemente, afetam as matrizes $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - LC(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)$. No entanto, a lei de controle do resultado acima é **robusta**, pois os resultados do teorema permanecem válidos para perturbações paramétricas na planta que mantenham os polos de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - LC(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)$ no SPE. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. Aqui, estamos assumindo que a planta é modelada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w, \rho), \\ y &= h(x, w, \rho),\end{aligned}$$

onde $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ são de classe C^1 .

Portanto, concluímos que o controlador integral linear projetado assegura **robustez** em malha-fechada para o problema de rastreamento de referências com rejeição de perturbações do tipo degrau, tanto para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, quanto para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. **Por fim, é importante se ter em mente que tal lei de controle não assegura que a região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{x}^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.**

Obs 3: O teorema acima não pode ser diretamente generalizado quando a referência e a perturbação não são do tipo degrau, no sentido de que se, por exemplo, a referência é exponencial e a perturbação é senoidal, não basta simplesmente utilizarmos o modelo interno correspondente e então projetar os ganhos K e K_m da realimentação com base nas matrizes A_a, B_a do sistema aumentado. Em tal caso, é preciso que condições adicionais sejam atendidas e que, de maneira geral, são difíceis de serem verificadas.

Obs 4: Considere que as hipóteses do teorema acima foram satisfeitas, de modo que $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u^e)$ satisfaz (6.10) com $u^e = -K\hat{x}^e - K_mx_m^e$ como em (6.11), e que os polos $A_a - B_aK_a$ e $A - LC$ estão no SPE. Assim, (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio (locamente) assintoticamente estável de (6.12). Vamos mostrar na sequência que para o controlador-observador

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_mx_m + Lh(x, \bar{w}), \\ u &= -K\hat{x} - K_mx_m,\end{aligned}$$

se a condição inicial do sistema em malha-fechada (6.12) está dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , então erro de estimação $x - \hat{x}$ converge assintoticamente para $x^e - \hat{x}^e$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) = x^e - \hat{x}^e. \quad (6.15)$$

Isto significa que \hat{x} é de fato uma estimação de x , a menos do off-set $x^e - \hat{x}^e$.

De fato, seja $\xi = x - \hat{x} - [x^e - \hat{x}^e]$. Nas novas coordenadas $z = (x, x_m, \xi)$, o sistema em malha-fechada (6.12) é descrito por (note que $\dot{\xi} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -K(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) - K_m x_m, \bar{w}), \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}), \\ \dot{\xi} &= f(x, -K(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) - K_m x_m, \bar{w}) \\ &\quad - (A - BK - LC)(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) + BK_m x_m - Lh(x, \bar{w}).\end{aligned}$$

Portanto, por (6.10) e (6.11) vemos que $z^e = (x^e, x_m^e, 0) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio desse sistema, e a linearização associada é dada por (a qual coincide com o princípio da separação do sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada (6.14)!)

$$\dot{z}_\delta = \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \\ \dot{\xi}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_m & -BK \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \\ \xi_\delta \end{bmatrix}}_{=z_\delta},$$

com $z_\delta = (x_\delta, x_{m_\delta}, \xi_\delta)$, $x_\delta = x - x^e$, $x_{m_\delta} = x_m - x_m^e$, $\xi_\delta = x - \hat{x} - [x^e - \hat{x}^e]$. Logo, $z^e = (x^e, x_m^e, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pois os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ estão no SPE, com

$$\dot{\xi}_\delta = (A - LC)\xi_\delta,$$

o que coincide com a dinâmica do erro de estimação do sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada (6.14)! Em particular, para toda condição inicial dentro da região de atração $z^e = (x^e, x_m^e, 0)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}_d(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) - [x^e - \hat{x}^e] = 0.$$

Logo, concluímos que, para o controlador-observador

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m + Lh(x, \bar{w}), \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m,\end{aligned}$$

se a condição inicial do sistema em malha-fechada (6.12) está dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , então o erro de estimação $x - \hat{x}$ converge assintoticamente para $x^e - \hat{x}^e$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) = x^e - \hat{x}^e.$$

Obs 5: Em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, então $\hat{x}(0) = \hat{x}^e$ é uma escolha razoável, pois (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (6.12). Podemos também escolher $x_m(0) = x_m^e$.

6.6.2 Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2),\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \text{sen}(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \text{sen}(x_1^e) = \text{sen}(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \text{sen}(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u, w), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u + \frac{1}{m\ell^2} w = f_2(x_1, x_2, u, w), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2, w).\end{aligned}$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\bar{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\bar{r} = y^e = h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}) = x_1^e = \delta$. Assim, o ponto de equilíbrio nominal $(x_1^e, x_2^e, u^e) = (\delta, 0, \text{sen}(\delta))$ satisfaz

$$\begin{aligned}0 &= f_1(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w}), \\ 0 &= f_2(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w}), \\ 0 &= \bar{r} - h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}).\end{aligned}$$

Determine as matrizes de ganho $K = [K_1 \ K_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $K_m \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ de modo que o controlador-observador com ação integral

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m = -K_1 \hat{x}_1 - K_2 \hat{x}_2 - K_m x_m,\end{aligned}$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição de perturbações $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau, ao menos quando $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitudes da referência e da perturbação

em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), verificando a validade de (6.15) na **Obs 4** e considerando:

- (a) Polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -1$ (lento), polos de $A - LC$ em $s = -3$ (3 vezes mais rápido), $\delta r = \delta w = 0$, $\hat{x}(0) = (0, 0)$, $x_m(0) = x_2(0) = 0$. Determine (por simulação) o maior valor do ângulo inicial $0^\circ \leq x_1(0) \leq 360^\circ$ de modo que $(x(0), x_m(0), \hat{x}(0))$ pertença à região de atração do ponto de equilíbrio nominal $(x^e, x_m^e, \tilde{x}^e)$
- (b) Repita o item (a), mas agora considerando que $\hat{x}(0) = (\delta, 0)$
- (c) Repita o item (a), mas agora considerando polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -4$ (moderado) e polos de $A - LC$ em $s = -12$ (3 vezes mais rápido). Assuma também que $\delta w = 0.5$ em $t = 15$ s. Determine o maior valor de $-45^\circ \leq \delta r \leq 315^\circ$ em $t = 25$ s tal que $(x(25), x_m(25), \hat{x}(25))$ pertença à região de atração do ponto de equilíbrio correspondente $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\tilde{x}}^e)$
- (d) Repita o item (c), mas agora considerando polos de $A - LC$ em $s = -20$ (5 vezes mais rápido). Observe que o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação diminui à medida que os polos de $A - LC$ se tornam mais rápidos. Isto era esperado? Justifique. **Dica:** princípio da separação.
- (e) Repita o item (d), mas agora considerando polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -40$ (rápido) e polos de $A - LC$ em $s = -120$ (3 vezes mais rápido).

Respostas:

- (a) $x_1(0)_{max} \cong 130^\circ$
- (b) $x_1(0)_{max} \cong 120^\circ$
- (c) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} \cong 110^\circ$ (mas com bastante sobressinal e oscilação na saída!)
- (d) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} = 315^\circ$ (mas com bastante sobressinal na saída!)
- (e) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} = 315^\circ$ (**sem sobressinal nem oscilação na saída, mas não consideramos saturação no controle!**)

Conclusão: De maneira geral, o tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio de malha-fechada assintoticamente estável depende da escolha dos polos! Além disso, se os polos forem muito lentos ou muito rápidos, então a região de atração pode se tornar muito pequena. **Portanto, a escolha dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração!**

Interpretação: O sistema linearizado aproxima relativamente bem a dinâmica de um sistema não-linear apenas enquanto $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ e $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$, $y_\delta(t) = y(t) - y^e \cong 0$ (pequenos desvios). Relembre a discussão realizada no Procedimento 2 do Lab 7.

3. Por fim, verifique por simulação que o controlador-observador com ação integral projetado assegura robustez em relação a perturbações paramétricas, ao contrário dos estabilizadores lineares utilizados na Seção 3.4 da Teoria (relembre que as leis de controle estabilizantes dependem dos valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e). Para isto, assumamos que há uma perturbação paramétrica de 50% na massa do sistema: o valor nominal é o de projeto $m = 0.1$ ($u^e = \text{sen}(\delta)$), mas o valor real é $m = 0.15$ ($u^e = 1.5 \text{sen}(\delta)$).

7 Introdução ao Problema de Rastreamento de Saída (Lab 9)

Objetivos: Vamos introduzir o problema de rastreamento de saída para um motor CC e projetar uma realimentação que soluciona tal problema de controle. Em seguida, veremos como implementar a realimentação projetada por diagrama de blocos. Por fim, iremos analisar os resultados de simulação obtidos para diversas saídas de referência.

7.1 Rastreamento de Saída de um Motor CC

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u, \\ y(t) &= x_1(t),\end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). O objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a **rastrear assintoticamente** uma saída de referência $\bar{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua) e **limitada**.

7.2 Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Temos que:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_2 + u.\end{aligned}$$

Note que foi necessário derivar 2 vezes a saída $y = x_1$ em relação ao tempo até que a entrada u aparecesse explicitamente. Considere então a **realimentação de estado**

$$u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v, \quad \text{com } \alpha(x_1, x_2) \triangleq x_2,$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada. Assim, em malha-fechada temos que

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v.$$

Escolhendo a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$v = \gamma(x_1, x_2, t) = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)],$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem ajustados, concluímos que em malha-fechada temos

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = v(t) &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada é dada pela seguinte **EDO linear homogênea**:

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0.$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2 s + k_1 = 0.$$

Agora, suponha que os pólos (estáveis!) de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (partes reais negativas!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2 s + k_1 = (s - p_1)(s - p_2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}_{\text{polinômio caract. de MF}},$$

ou seja, escolhemos $\boxed{k_2 = -(p_1 + p_2), k_1 = p_1 p_2}$.

Concluímos então que a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + \gamma(x_1, x_2, t) \\ &= x_2 + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)], \end{aligned}$$

com $k_2 = -(p_1 + p_2)$ e $k_1 = p_1 p_2$, garante que¹

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(0), x_2(0)$, resolvendo assim o problema de rastreamento de saída.

¹ Relembre que, se os polos p_1, p_2 são reais e distintos, então $e(t) = c_1 \exp(p_1 t) + c_2 \exp(p_2 t)$, para $t \geq 0$, onde os valores dos coeficientes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são determinados pelas condições iniciais $e(0), \dot{e}(0)$ do erro de rastreamento. Em particular, se $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, então $e(t) = 0$ para $t \geq 0$ (**rastreamento perfeito**)!

Note que o controle $u(t)$ a ser aplicado ao longo do tempo $t \geq 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) &= x_2(t) + \ddot{y}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{y}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{y}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}, \end{aligned}$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento da saída.

Ressaltamos que a ideia principal utilizada foi:

1. Escolher a realimentação $u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v$ de modo que $\ddot{y} = -x_2 + u = v$, onde v é a nova entrada;
2. Escolher $v = \ddot{y}(t) - k_1 e(t) - k_2 \dot{e}(t)$ de modo que $\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0$ (EDO linear homogênea para a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada).

Note que **não há modelo interno!** Ao longo do nosso curso, veremos como generalizar essa ideia para solucionar o problema de rastreamento de saída de sistemas não-lineares MIMO.

7.3 Procedimentos

1. Implemente no Matlab/Simulink a realimentação de estado dependente do tempo projetada para solucionar o problema de rastreamento de saída do motor CC considerado. Suponha que:

1. $\bar{y}(t) = 3, t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$;
2. $\bar{y}(t) = 3(1 - e^{-2t}), t \geq 0, x_1(0) = -3, x_2(0) = 6$;
3. $\bar{y}(t) = 3(1 - e^{-2t}), t \geq 0, x_1(0) = 0, x_2(0) = 6$;
4. $\bar{y}(t) = 3 \text{sen}(5t), t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Em cada um dos casos acima, analise os resultados de simulação obtidos (saída, referência, controle e erro) para uma escolha de pólos “lentos” ($p = -2$), “médios” ($p = -6$) e “rápidos” ($p = -20$) da dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada. Note que, nos dois primeiros casos acima, a dinâmica do erro de rastreamento é idêntica, e que, no terceiro caso, temos $e(t) = 0$ para $t \geq 0$ (**rastreamento perfeito**) com

$$u(t) = x_2(t) + \ddot{y}(t) = \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) = -6e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

Isto era esperado? Justifique.

2. Repita o item acima para: $\bar{y}(t) = 1, 0 \leq t < 10, \bar{y}(t) = 2, t \geq 10$, com $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Note que $\bar{y}(t)$ não é de classe C^2 devido ao salto de descontinuidade em $t = 10$, mas

é de classe C^2 por partes. Explique o comportamento qualitativo da dinâmica do erro rastreamento $e(t)$, $t \geq 0$. **Dica:** em $t = 10$, temos que $e(t) \neq 0$, ou seja, a condição inicial do erro é ressetada em $t = 10$.

3. Repita o Item 1 para: $\bar{y}(t) = \cos(t^2)$, $t \geq 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$. É possível implementar a lei de controle projetada neste caso? Isto era esperado? Justifique sua resposta.

8 Controle Não-Linear

Este capítulo trata de técnicas de controle não-linear. Primeiramente, vamos abordar o problema de desacoplamento. Em seguida, trataremos do problema de rastreamento de saída. Para resolvermos este problema, a ideia central é encontrarmos uma realimentação de estado não-linear de modo que a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada seja dada por uma EDO linear homogênea.

Na sequência, apresentaremos a noção de platitude (*flatness*) e sua relação com controlabilidade não-linear e com o problema de rastreamento de saída. Por fim, estudaremos brevemente o problema de linearização exata via mudança de coordenadas e realimentação de estado. Veremos que, para uma certa classe de sistemas não-lineares, existe uma realimentação de estado não-linear que permite o cancelamento exato das não-linearidades do sistema. Neste caso, o sistema em malha-fechada torna-se linear, pelo menos quando ele for descrito em um sistema de coordenadas adequado.

8.1 Motivação

Neste momento, vamos retomar o problema de rastreamento de saída para um motor CC visto no Lab 9, e abordaremos também uma questão filosófica. Esta questão reside no fato de que os sinais de referência do tipo degrau são adequados como sinais de teste de desempenho, mas são em geral inadequados para o controle de sistemas. De certo modo, isto contraria os paradigmas de controle clássico, que estabelece o degrau como um bom candidato a sinal de referência.

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). Suponha que o motor está em repouso em $t_0 = 0$, ou seja, $x_1(0) = \theta(0)$, $x_2(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Em controle clássico, geralmente se aborda o seguinte problema de controle: encontrar uma realimentação u de forma que o eixo do motor atinja um dado ângulo desejado de referência θ_r em regime permanente, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_r.$$

A maneira clássica de se resolver este problema é encontrando um controlador linear de forma que a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ rastreie assintoticamente uma referência $r(t) = \theta_r$, do tipo degrau de amplitude θ_r , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \theta_r.$$

No entanto, suponha que, além dos posicionamentos inicial $\theta(0)$ e final desejado θ_r , desejamos também controlar a saída $y(t)$ entre $\theta(0)$ e θ_r . Em outras palavras, dada uma **saída de referência** $\bar{y}(t)$, $t \geq 0$, gostaríamos que a saída real $y(t) = \theta(t)$ **rastreasse assintoticamente** $\bar{y}(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento.

Desse modo, nosso objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a rastrear assintoticamente uma saída de referência $\bar{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua) e **limitada**.

Temos que:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_2 + u. \end{aligned}$$

Note que foi necessário derivar 2 vezes a saída $y = x_1$ em relação ao tempo até que a entrada u aparecesse explicitamente. Considere então a **realimentação de estado**

$$u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v, \quad \text{com } \alpha(x_1, x_2) \triangleq x_2,$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada. Assim, em malha-fechada temos que

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v.$$

Escolhendo a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$v = \gamma(x_1, x_2, t) = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)],$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem ajustados, concluímos que em malha-fechada temos

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = v(t) &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}. \end{aligned}$$

Consequentemente, a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada é dada pela seguinte **EDO linear homogênea**:

$$\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1e = 0.$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2s + k_1 = 0.$$

Agora, suponha que os pólos (estáveis!) de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (partes reais negativas!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2s + k_1 = (s - p_1)(s - p_2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2}_{\text{polinômio caract. de MF}},$$

ou seja, escolhamos $k_2 = -(p_1 + p_2), k_1 = p_1p_2$.

Concluimos então que a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + \gamma(x_1, x_2, t) \\ &= x_2 + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)], \end{aligned}$$

com $k_2 = -(p_1 + p_2)$ e $k_1 = p_1p_2$, garante que¹

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(0), x_2(0)$, resolvendo assim o problema de rastreamento de saída.

Note que o controle $u(t)$ a ser aplicado ao longo do tempo $t \geq 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1e(t) + k_2\dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}, \end{aligned}$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento da saída.

Ressaltamos que a ideia principal utilizada foi:

1. Escolher a realimentação $u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v$ de modo que $\ddot{y} = -x_2 + u = v$, onde v é a nova entrada
2. Escolher $v = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1e(t) - k_2\dot{e}(t)$ de modo que $\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2e = 0$ (EDO linear homogênea para a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada)

Note que **não há modelo interno!** Neste capítulo, veremos como generalizar essa ideia para solucionar o problema de rastreamento de saída de sistemas não-lineares MIMO.

¹ Relembre que, se os polos p_1, p_2 são reais e distintos, então $e(t) = c_1 \exp(p_1 t) + c_2 \exp(p_2 t)$, para $t \geq 0$, onde os valores dos coeficientes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são determinados pelas condições iniciais $e(0), \dot{e}(0)$ do erro de rastreamento. Em particular, se $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, então $e(t) = 0$ para $t \geq 0$ (**rastreamento perfeito!**)

8.2 Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Nesta seção, veremos a conexão entre o problema de desacoplamento e o problema de rastreamento de saída. Vamos considerar sistemas da forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t), \quad (8.1)$$

$$y = h(x), \quad (8.2)$$

onde $x \in V$ é o vetor de estado, $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada (controle), $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ (infinitamente diferenciável), e $g(x)$ é uma matriz $n \times m$.

$$g(x) = (g_{ij}(x)) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \cdots & g_{nm}(x) \end{bmatrix},$$

onde todas as funções $g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, são de classe C^∞ . Do mesmo modo, $h = (h_1, \dots, h_m): V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ .

Observe que o número de componentes da saída $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ é igual ao número de componentes da entrada $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, ou seja, $m = p$, e que o sistema está definido em $V \subset \mathbb{R}^n$. Denotando por $g_j(x)$ a coluna j de $g(x)$, podemos considerar g_j como uma aplicação $g_j: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ e rescrever (8.1)–(8.2) como

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x),$$

$$y = h(x).$$

Ao longo de todo este capítulo, consideraremos leis de controle denominadas de **realimentação de estado estática localmente regular** (em um aberto $U \subset V$ de \mathbb{R}^n) e dadas por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (8.3)$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada, $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ e

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \cdots & \beta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times m$ em que todas as funções $\beta_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, são de classe C^∞ . Aqui, o termo **localmente regular** significa que a matriz β é invertível em U , ou seja, $\det(\beta(x)) \neq 0$, para todo $x \in U$.

Assim, o **sistema em malha-fechada**, o qual está definido em $U \subset V$, é dado por

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v, \quad (8.4)$$

$$y = h(x), \quad (8.5)$$

onde $x \in U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $v \in \mathbb{R}^m$ é vetor de controle, e

$$\tilde{f} = f + g\alpha, \quad \tilde{g} = g\beta.$$

8.2.1 O Problema de Desacoplamento

Considere um sistema da forma (8.1)–(8.2), o qual está definido em um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com entrada $u = (u_1, \dots, u_m)$ e saída $y = (y_1, \dots, y_m)$. Dizemos que o sistema é **desacoplado** quando **cada** componente $u_j(t)$ de **qualquer** entrada escolhida $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $t \geq 0$, atua de fato na componente $y_j(t) = h_j(x(t))$ da saída

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \dots, h_m(x(t))),$$

mas não influencia a componente $y_i(t) = h_i(x(t))$ quando $i \neq j$. O problema de desacoplamento consiste na construção de uma realimentação regular (8.3) de modo que o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) seja desacoplado. Relembre que a entrada do sistema em malha-fechada é $v = (v_1, \dots, v_m)$.

Problema de Desacoplamento: Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho² do sistema (8.1)–(8.2). Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em x_0 , se existir uma vizinhança aberta³ $U \subset V$ de x_0 e uma realimentação (8.3) localmente regular em U , tal que o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) seja desacoplado. Do mesmo modo, seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho, ou seja, U_0 é um aberto em \mathbb{R}^n . Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em U_0 , se existir uma realimentação localmente regular em U_0 tal que o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) seja desacoplado.

Ressaltamos que a primeira versão do problema de desacoplamento formulado acima não se preocupa com o tamanho da vizinhança aberta U do ponto de trabalho x_0 para o qual o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) se torna desacoplado. Assim, a princípio, não temos como garantir que $U = V$. Como (8.4)–(8.5) estará definido somente em $U \subset V$, o desacoplamento do sistema em malha-fechada ocorrerá somente dentro de U . Isto significa que apenas enquanto a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada não sair de U é que o sistema permanecerá desacoplado. É por este motivo que usamos o termo **localmente solúvel** na definição acima, pois garantimos apenas uma solução local em torno do ponto de trabalho x_0 para o problema de desacoplamento.

² Aqui, x_0 não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

³ Dizemos que um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma **vizinhança aberta** de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quando U é um aberto que contém x_0 .

Por outro lado, a segunda versão assegura a existência de uma realimentação localmente regular (8.3) que está definida em toda a região de trabalho $U_0 \subset V$ e que desacopla o sistema em malha-fechada, o qual está definido em U_0 . É claro que gostaríamos de escolher $U_0 = V$. No entanto, dependendo das não-linearidades do sistema (8.1)–(8.2), isto nem sempre é possível, e temos que nos contentar com uma solução local em determinado $U_0 \subset V$.

Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho do sistema (8.1)–(8.2) e considere que $U \subset V$ é uma vizinhança aberta de x_0 . Veremos que a derivação sucessiva das componentes y_i da saída $y = (y_1, \dots, y_m)$ com relação ao tempo nos leva a uma solução para o problema de desacoplamento. Para isto, suponha que fixamos uma condição inicial $x(0) \in V$ e uma entrada $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $t \geq 0$, e considere que tomamos uma componente $y_i(t) = h_i(x(t))$ da saída $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \dots, h_m(x(t)))$ e a derivamos no tempo. Como $y_i(t) = h_i(x(t)) = h_i \circ x(t)$ (função composta), pela regra da cadeia temos que

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t).$$

Substituindo (8.1) na equação acima, obtemos

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)].$$

Neste momento, é natural introduzirmos a **derivada de Lie** de duas aplicações $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ (real) e $q = (q_1, \dots, q_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (vetor coluna) de classe C^∞ :

$$\begin{aligned} L_q w(x) &\triangleq \frac{\partial w}{\partial x}(x)q(x) = [\partial w(x)/\partial x_1 \ \dots \ \partial w(x)/\partial x_m]q(x); \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)q_i(x) \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

para todo $x \in U$. Temos que $L_q w : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ . Portanto, podemos também considerar $L_q^2 w = L_q(L_q w)$. Note que⁴

$$L_q^2 w(x) \triangleq L_q L_q w(x) = \frac{\partial L_q w}{\partial x}(x)q(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para } x \in U.$$

Definimos, para todo $k \geq 1$ (inteiro),

$$L_q^k w = L_q(L_q^{k-1} w), \quad \text{onde } L_q^0 w = w.$$

Voltando então ao problema de desacoplamento, e tomando

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)f(x) = L_f h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g(x) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_1(x) \ \dots \ \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_m(x) \right), \\ &= (L_{g_1} h_i(x) \ \dots \ L_{g_m} h_i(x)) = (A_{i1}^1(x) \ \dots \ A_{im}^1(x)) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

⁴ Pode-se mostrar que $L_q^2 w(x) = q^T(x)H(x)q(x) + \frac{\partial w}{\partial x}(x)\frac{\partial q}{\partial x}(x)q(x)$, onde $H(x)$ é a matriz Hessiana da função real w e $\partial q(x)/\partial x$ é a matriz Jacobiana do vetor coluna q , no ponto $x \in U$.

para todo $x \in U$, encontramos que

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) + A_i^1(x(t))u(t) = L_f h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_i(x(t))u_j(t).$$

Assuma que $A_i^1(x)$ é identicamente nulo em U , isto é, $A_i^1(x) = 0$, para todo $x \in U$. Neste caso, dentro de U , $y_i^{(1)}(t)$ não será instantaneamente afetado por $u(t)$, pois teremos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) = L_f h_i(x(t)).$$

Repetindo o mesmo procedimento para $y_i^{(1)}(t)$, vamos obter

$$y_i^{(2)}(t) = h_i^2(x(t)) + A_i^2(x(t))u(t) = L_f^2 h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f h_i(x(t))u_j(t),$$

onde, para todo $x \in U$,

$$\begin{aligned} h_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)f(x) = L_f^2 h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g(x) = \left(\frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_1(x) \dots \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_m(x) \right), \\ &= (L_{g_1} L_f h_i(x) \dots L_{g_m} L_f h_i(x)) = (A_{i1}^2(x) \dots A_{im}^2(x)) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Assuma que $A_i^2(x)$ é identicamente nulo em U . Neste caso, dentro de U , $y_i^{(2)}(t)$ não será instantaneamente afetado por $u(t)$.

Definimos $\rho_i \geq 1$ como o menor inteiro tal que $A_i^{\rho_i}(x)$ não seja identicamente nulo em U . Mais precisamente, $\rho_i \geq 1$ é o inteiro tal que $A_i^{\rho_i}(x_0) \neq 0$ e existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 em que $A_i^k(x)$ é identicamente nulo em $U \subset V$, para todo $1 \leq k \leq \rho_i - 1$.

Observe que tal definição de ρ_i equivale a

$$\begin{aligned} A_i^{\rho_i}(x_0) &= [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0, \\ A_i^k(x) &= [L_{g_1} L_f^{k-1} h_i(x) \quad L_{g_2} L_f^{k-1} h_i(x) \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{k-1} h_i(x)] = 0, \\ &\text{para } 1 \leq k \leq \rho_i - 1, x \in U, \end{aligned}$$

que por sua vez é o mesmo que

$$\begin{aligned} [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad \dots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] &\neq 0, \\ L_{g_j} L_f^k h_i(x) &= 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 2, x \in U. \end{aligned}$$

Quando, para todo $k \geq 1$, temos que $A_i^k(x)$ é identicamente nulo em alguma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 , definimos $\rho_i = \infty$. No caso em que $\rho_i < \infty$ (finito), denominamos o inteiro $\rho_i = \rho_i(x_0) \geq 1$ de **grau relativo** da saída $y_i = h_i(x)$ no ponto de trabalho x_0 , o qual corresponde ao **número de derivações no tempo que temos que realizar para que a saída y_i dependa explicitamente de alguma componente u_j da entrada $u = (u_1, \dots, u_m)$.**

Assuma que todas as componentes y_i da saída $y = (y_1, \dots, y_m)$ admitem grau relativo em x_0 . Dizemos então que a saída $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ **admite grau relativo** em x_0 e, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= a_1(x) + A_1(x)u, \\ y_2^{(\rho_2)} &= a_2(x) + A_2(x)u, \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= a_m(x) + A_m(x)u, \end{aligned}$$

onde $a_i(x) = h_i^{\rho_i}(x) = L_f^{\rho_i} h_i(x)$, $A_i(x) = A_i^{\rho_i}(x)$, para $i = 1, \dots, m$, $x \in U$, onde U é alguma vizinhança aberta de x_0 .

Denotando-se $y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})'$, podemos escrever

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u, \quad (8.6)$$

onde, para cada $x \in U$,

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Note que $a_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e A_i é um vetor linha de m funções de classe C^∞ . Desta forma, $a : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um vetor coluna de m funções de classe C^∞ e $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz $m \times m$ de funções de classe C^∞ , denominada de **matriz de desacoplamento**.

Relembramos que a componente $y_i = h_i(x)$ da saída $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ admite grau relativo $\rho_i = \rho_i(x_0)$ em x_0 quando

$$A_i(x_0) = \left[L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ \cdots \ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \right] \neq 0,$$

e existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 tal que

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \text{ para todo } 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 2, x \in U.$$

Além disso,

$$y_i^{(k)}(t) = L_f^k h_i(x(t)), \text{ para } 0 \leq k \leq \rho_i - 1.$$

Ressaltamos que uma saída y nem sempre admite grau relativo em todos os pontos. De fato, considere o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_2 u_1; \\ \dot{x}_2 &= u_1; \\ y_1 &= x_1.\end{aligned}$$

Derivando-se y_1 , temos

$$y_1^{(1)} = x_2 + x_2 u_1,$$

com $A_1^1(x_1, x_2) = L_{g_1} h_1(x_1, x_2) = x_2$. Logo, o grau relativo de y_1 em $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ é $\rho_1 = 1$ quando $x_2^0 \neq 0$, pois $A_1^1(x_1^0, x_2^0) = x_2^0 \neq 0$. No entanto, y_1 não admite grau relativo em x_0 caso $x_2^0 = 0$, já que $A_1^1(x_1^0, 0) = 0$ e $A_1^1(x_1, x_2) = x_2$ não se anula em nenhuma vizinhança aberta U de $x_0 = (x_1^0, 0)$. De fato, dada qualquer vizinhança aberta U de $x_0 = (x_1^0, 0)$, sempre existe algum $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$ com $\bar{x}_2 \neq 0$. Portanto, $A_1^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \neq 0$.

Definição: Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho (aberto em \mathbb{R}^n) do sistema (8.1)–(8.2). Dizemos que a saída $y = h(x)$ do sistema (8.1)–(8.2) **admite grau relativo** em U_0 quando cada componente $y_i = h_i(x)$ da saída $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ admite grau relativo $\rho_i(x)$ em todo $x \in U_0$ e $\rho_i(x)$ permanece constante dentro da região U_0 , isto é, $\rho_i(x) = \bar{\rho}_i$, para qualquer $x \in U_0$.

Obs 1: Considere um sistema linear SISO ($m = p = 1$) da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assuma que o sistema é controlável e observável, e sejam n_p e n_z o número de polos e zeros, respectivamente, da função de transferência $G(s)$. Então, pode-se mostrar que o sistema admite grau relativo em $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ com $\rho = n_p - n_z$.

Obs 2: Ressaltamos que se a saída $y = h(x)$ admite grau relativo em x_0 , então existe uma vizinhança aberta U_0 de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U_0 . Isto é uma consequência do teorema apresentado na sequência.

Teorema: Seja $\gamma: W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $W \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Então, o conjunto

$$Z = \{x \in W \mid \gamma(x) \neq 0\}$$

é aberto.

Prova: Fixe $x \in Z \subset W$. Assim, $\gamma(x) \neq 0$. Por simplicidade, considere que $\gamma(x) > 0$. Como a função γ é contínua em x , sabemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ (a princípio, $\delta > 0$ depende de x e ε) tal que, para cada $y \in W$,

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow |\gamma(y) - \gamma(x)| < \varepsilon.$$

E, como W é aberto, sabemos que existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $B(x, \bar{\delta}) \subset W$. Escolha $\varepsilon = \gamma(x) > 0$ e seja $\tilde{\delta} = \min(\bar{\delta}, \delta) > 0$. Fixe $y \in B(x, \tilde{\delta}) \subset B(x, \bar{\delta}) \subset W$. Então, $y \in W$ com $\|y - x\| < \tilde{\delta} < \delta$. Desse modo,

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| < \gamma(x),$$

ou seja,

$$-\gamma(x) < \gamma(y) - \gamma(x) < \gamma(x).$$

Portanto, $0 < \gamma(y)$. Logo, $B(x, \bar{\delta}) \subset Z$. Mostramos assim que, para todo $x \in Z$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $B(x, \tilde{\delta}) \subset Z$, ou seja, provamos que Z é aberto.

Obs 3: Para $j = 1, \dots, n$, temos que a função projeção $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na j -ésima componente é contínua, onde

$$\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j.$$

Exemplo 1:[3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3. \end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x) &= [0 \ 0 \ 1], & L_g h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) = 0, & L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x) = x_2, \\ \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) &= [0 \ 1 \ 0], & L_g L_f h(x) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x)g(x) = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, a saída $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 2$ na região de trabalho $U_0 = V = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2:[3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_4. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1], & L_g h(x) &= 0, & L_f h(x) &= x_1^2 + x_2, \\ \frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) &= [2x_1 \ 1 \ 0 \ 0], & L_g L_f h(x) &= 2(1 + x_3). \end{aligned}$$

Assim, a saída $y = h(x) = x_4$ admite grau relativo $\rho = 2$ em todos os pontos (x_1, x_2, x_3, x_4) de \mathbb{R}^4 em que $x_3 \neq -1$. Como tal conjunto é um aberto $U_0 \subset V = \mathbb{R}^n$, concluímos que $y = h(x) = x_4$ admite grau relativo $\rho = 2$ na região de trabalho U_0 .

Podemos agora enunciar as soluções para as duas versões do problema de desacoplamento, cujas demonstrações são semelhantes.

Teorema 1: Suponha que a saída $y = h(x)$ do sistema (8.1)–(8.2) admite grau relativo no ponto de trabalho $x_0 \in V$. Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em x_0 **se e somente se** o determinante da matriz de desacoplamento não se anula em x_0 , ou seja, $\det A(x_0) \neq 0$.

Teorema 2: Suponha que a saída $y = h(x)$ do sistema (8.1)–(8.2) admite grau relativo na região de trabalho $U_0 \subset V$. Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em U_0 **se e somente se** $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Para esboçar a demonstração da suficiência (\Leftarrow) dos dois teoremas acima, lembre que (veja (8.6))

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u, \quad (8.7)$$

com $y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})'$,

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Com base nisto, veremos na sequência que a escolha de uma realimentação regular (8.3) que soluciona o problema de desacoplamento é natural e evidente.

Provaremos primeiro a suficiência do Teorema 2. Suponha então que $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$. Isto é equivalente a dizer que $A(x)^{-1}$ existe para todo $x \in U_0$. Desse modo, escolhendo a realimentação como

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (8.8)$$

onde $v = (v_1, \dots, v_m)$ é a nova entrada e

$$\alpha(x) = -A(x)^{-1}a(x), \quad (8.9)$$

$$\beta(x) = A(x)^{-1}, \quad (8.10)$$

obtemos que a saída $y = h(x)$ do sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v, \quad (8.11)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= v_1, \\ y_2^{(\rho_2)} &= v_2, \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= v_m. \end{aligned}$$

Note que cada equação $y_i^{(\rho_i)} = v_i$ é linear e completamente desacoplada de outra equação $y_j^{(\rho_j)} = v_j$ quando $i \neq j$. Além disso, $y_i(t)$ corresponde à saída de um banco de ρ_i integradores em série tendo como entrada $v_i(t)$, ou seja,

$$Y_i(s) = \frac{1}{s^{\rho_i}} V_i(s).$$

Desse modo, fica claro que a resposta entrada-saída é linear e que a evolução de $y_i(t)$ depende de fato de $v_i(t)$, mas não é de modo algum influenciada por $v_j(t)$ quando $i \neq j$.

Como (8.8)–(8.10) é uma realimentação de estado estática localmente regular em U_0 , concluímos que a mesma fornece uma solução para o problema de desacoplamento. Quando $x \notin U_0$, não temos garantia de que $A(x)^{-1}$ existe e, conseqüentemente, a realimentação (8.8)–(8.10) poderá apresentar uma singularidade em tal ponto. Portanto, tudo que podemos assegurar é que o sistema malha-fechada (8.4)–(8.5) fica desacoplado enquanto a solução $x(t)$ permanecer em U_0 para a entrada escolhida $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $t \geq 0$.

Provaremos agora a suficiência do Teorema 1. Suponha então que $\det A(x_0) \neq 0$. Denote o conjunto das matrizes $m \times m$ de números reais por \mathbb{R}^{m^2} . Observe que a aplicação $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m^2}$ definida por $x \mapsto A(x)$ é de classe C^∞ e, portanto, é contínua. Denote por $\det : \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $M \mapsto \det(M)$. Mostra-se que \det é uma função contínua (por ser a soma de produtos dos elementos da matriz M). Considere a função $\det A : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \det A(x)$. Esta função é contínua, pois ela é a composta de “ \det ” com “ A ”, e a composta de aplicações contínuas é contínua. Em particular, o conjunto

$$U_0 = \{x \in V \mid \det A(x) \neq 0\}$$

é uma vizinhança aberta de x_0 . Portanto, basta aplicarmos o Teorema 2 para demonstrarmos a suficiência do Teorema 1.

A demonstração da necessidade (\Rightarrow) dos dois teoremas pode ser encontrada em [3, 5, 2].

Obs 4: Quando $m = 1$, ou seja, o sistema (8.1)–(8.2) tem um única entrada $u \in \mathbb{R}$ e uma única saída $y = h(x) \in \mathbb{R}$, a realimentação regular (8.8)–(8.10) se reduz a

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \left[-L_f^\rho h(x) + v \right], \quad (8.12)$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada e

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}, \quad (8.13)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. \quad (8.14)$$

Portanto, a saída $y = h(x)$ do sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v,$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^\rho} V(s).$$

Exemplo 3: [3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0, & L_f h(x) &= x_1 - x_2, \\ L_g L_f h(x) &= 0, & L_f^2 h(x) &= -x_1 - x_2^2, \\ L_g L_f^2 h(x) &= -(1 + 2x_2) \exp(x_2), & L_f^3 h(x) &= -2x_2(x_1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Vemos que a saída $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 3$ em todos os pontos (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 em que $1 + 2x_2 \neq 0$. Como tal conjunto é um aberto $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$, concluímos que $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 3$ na região de trabalho U_0 .

A matriz de desacoplamento (nesse caso é um escalar)

$$A(x) = L_g L_f^2 h(x) = -(1 + 2x_2) \exp(x_2)$$

é tal que $A(x) \neq 0$ para todo $x \in U_0$. Desse modo, concluímos que a realimentação de estado estática localmente regular em U_0 dada por

$$u = \frac{-L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} v = -\frac{2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} v$$

para todo $x \in U_0$, desacopla o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5), o qual está definido em $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$. Além disso, a saída $y = h(x) = x_3$ de (8.4)–(8.5) é tal que

$$y^{(3)} = v.$$

Exemplo 4: [3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2,$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5,$$

$$y_2 = h_2(x) = x_4.$$

Temos

$$L_{g_1}h_1(x) = L_{g_2}h_1(x) = L_{g_1}L_fh_1(x) = L_{g_2}L_fh_1(x) = 0,$$

$$L_{g_1}h_2(x) = L_{g_2}h_2(x) = 0,$$

$$L_f^2h_1(x) = x_3 - x_1x_4 + x_4x_5,$$

$$L_fh_2(x) = x_5,$$

$$[L_{g_1}L_f^2h_1(x) \quad L_{g_2}L_f^2h_1(x)] = [\cos(x_1 - x_5) \quad 1] \neq 0,$$

$$[L_{g_1}L_fh_2(x) \quad L_{g_2}L_fh_2(x)] = [0 \quad 1] \neq 0.$$

Escolhemos a origem $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^5$ como ponto de trabalho. Assim, $\rho_1 = \rho_1(x_0) = 3$, $\rho_2 = \rho_2(x_0) = 2$, a saída $y = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ admite grau relativo em x_0 , e a matriz de desacoplamento é

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^2h_1(x) & L_{g_2}L_f^2h_1(x) \\ L_{g_1}L_fh_2(x) & L_{g_2}L_fh_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det A(x_0) \neq 0$, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U \subset V = \mathbb{R}^5$ de x_0 em que a realimentação de estado estática localmente regular em U dada por

$$u = -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v$$

para todo $x \in U$, está de fato bem definida, ou seja, $A(x)^{-1}$ existe para todo $x \in U$, onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada e

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^3h_1(x) \\ L_f^2h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, tal realimentação desacopla o sistema em malha-fechada (8.4)–(8.5), o qual está definido em $U \subset V = \mathbb{R}^3$. Por fim, a saída $y = (y_1, y_2) = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ de (8.4)–(8.5) é tal que

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1, \\ y_2^{(2)} &= v_2. \end{aligned}$$

8.2.2 O Problema de Rastreamento de Saída

Considere o sistema (8.1)–(8.2) com saída $y = h(x)$. Dada uma **saída de referência desejada** $\bar{y}(t)$ para a saída $y(t)$, onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^∞ , queremos encontrar uma realimentação u que force $y(t)$ a **rastrear assintoticamente** a saída desejada $\bar{y}(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o **erro de rastreamento**. Este problema é denominado de **problema de rastreamento** da saída $\bar{y}(t)$. Para resolver o problema de rastreamento, vamos projetar uma realimentação u que garanta que a dinâmica do erro $e(t)$ seja assintoticamente estável.

Na sequência, restringiremos nosso estudo à classe de sistemas (8.1)–(8.2) que podem ser desacoplados por realimentação estática regular da forma (8.3). Considere o sistema (8.1)–(8.2) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho. Suponha que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em U_0 , é de classe C^∞ e admite grau relativo em U_0 ;
- A matriz de desacoplamento é não singular em U_0 , ou seja, $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Derivando-se sucessivamente $e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t)$ com relação ao tempo, obtemos que

$$e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, \dots, m, k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k = \rho_i$ e usando (8.7), teremos

$$e^{(\rho)} = y^{(\rho)} - \bar{y}^{(\rho)} = a(x) + A(x)u - \bar{y}^{(\rho)},$$

com

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})', \\ \bar{y}^{(\rho)} &= (\bar{y}_1^{(\rho_1)}, \bar{y}_2^{(\rho_2)}, \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m)})', \\ e^{(\rho)} &= (e_1^{(\rho_1)}, e_2^{(\rho_2)}, \dots, e_m^{(\rho_m)})'. \end{aligned}$$

Note que a realimentação de estado dependente do tempo

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0, \quad (8.15)$$

onde $v = (v_1, \dots, v_m)' \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada, produz em malha-fechada a seguinte dinâmica linear para o erro de rastreamento:

$$e^{(\rho)} = v.$$

A lei de controle (8.15) é portanto uma realimentação linearizante para a dinâmica do erro. Podemos então construir uma realimentação estabilizante v para a dinâmica do erro. Fixe $i = 1, \dots, m$, e lembre que

$$e_i^{(\rho_i)} = v_i.$$

Sejam $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$ o conjunto de polos desejados (no SPE!) para a dinâmica do erro

$$e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t).$$

Assim, o polinômio característico desejado em malha-fechada é dado por

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i) = s^{\rho_i} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i s^j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_i = \gamma_i(x, t) &= - \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i e_i^{(j)}(t), \\ &= - \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i [y_i^{(j)}(t) - \bar{y}_i^{(j)}(t)], \\ &= - \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i [L_f^j h_i(x) - \bar{y}_i^{(j)}(t)], \end{aligned}$$

é a realimentação de estado dependente do tempo desejada, pois

$$e_i^{(\rho_i)} = v_i = - \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i e_i^{(j)},$$

ou seja, a dinâmica de $e_i(t)$ em malha-fechada é dada por

$$e_i^{(\rho_i)} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i e_i^{(j)} = 0, \quad (\text{EDO linear homogênea!}) \quad (8.16)$$

a qual tem $\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$ como polinômio característico.

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo a ser aplicada para o rastreamento da saída de referência desejada $\bar{y}(t)$ é

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1} \left[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)}(t) \underbrace{-K\varepsilon(x, t)}_{=v} \right], \quad x \in U_0, t \geq 0, \quad (8.17)$$

onde

$$\varepsilon(x, t) = (h_1(x), \dots, L_f^{(\rho_1-1)} h_1(x), \dots, h_m(x), \dots, L_f^{(\rho_m-1)} h_m(x))' - \bar{y}^{(\rho-1)}(t),$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_m \end{bmatrix},$$

$$K_i = [k_0^i \ k_1^i \ \dots \ k_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Obs 5: As realimentações definidas acima forçam $y(t)$ a rastrear assintoticamente $\bar{y}(t)$ desde que a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada permaneça em U_0 para todo $t \geq 0$ (perceba que a realimentação (8.15) poderá apresentar singularidades e que $y_i = h_i(x)$ poderá deixar de ter grau relativo ρ_i constante se $x(t)$ sair de U_0). Assuma que este é o caso. Logo, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i e_i^{(k)}(t) = 0$, independentemente da escolha dos polos no SPE para a dinâmica do erro e_i . Assim, em **regime permanente** ($t \rightarrow \infty$), temos que

$$u(t) = A(x(t))^{-1}[-a(x(t)) + \bar{y}^{(\rho)}(t)].$$

Além disso, a partir de (8.16), concluímos que se

$$e_i^{(\rho_i-1)}(0) = e_i^{(\rho_i-2)}(0) = \dots = e_i^{(1)}(0) = e_i(0) = 0,$$

então $e_i(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$y_i(t) = \bar{y}_i(t), \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ (rastreamento perfeito!)}$$

Em geral, podemos escolher a saída de referência $\bar{y}_i(t)$ de modo que $e_i^{(\rho_i-1)}(0) = e_i^{(\rho_i-2)}(0) = \dots = e_i^{(1)}(0) = e_i(0) = 0$. Na prática, no entanto, isto sempre será violado devido a erros/ruídos de medição. Ressaltamos, por fim, que **não há modelo interno** para a saída de referência $\bar{y}(t)$ incorporado ao controlador projetado!

Exemplo 5: No Exemplo 4 da Seção 13.2.1, estudamos o sistema definido em $V = \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\ y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\ y_2 &= h_2(x) = x_4. \end{aligned}$$

Escolhemos $x_0 = 0$. Note que $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, e que posto $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x)] = 2$, para todo $x \in V = \mathbb{R}^5$. Vimos anteriormente que $\det A(x_0) \neq 0$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$. Com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 13.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U_0 \subset V$ de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U_0 e $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Seja $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma saída de referência desejada de classe C^∞ . A realimentação de estado dependente do tempo em (8.15)

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0,$$

assegura a seguinte dinâmica linear para os erros de rastreamento

$$\begin{aligned} e_1^{(3)} &= v_1, \\ e_1^{(2)} &= v_2, \end{aligned}$$

com $e_1(t) = y_1(t) - \bar{y}_1(t)$, $e_2(t) = y_2(t) - \bar{y}_2(t)$.

Logo, os ganhos de realimentação $k_0^1, k_1^1, k_2^1, k_0^2, k_1^2 \in \mathbb{R}$ nas realimentações estabilizantes

$$\begin{aligned}
v_1 = \mathcal{Y}_1(x, t) &= - \sum_{j=0}^2 k_j^1 e_1^{(j)}(t) = - \sum_{j=0}^2 k_j^1 [y_1^{(j)}(t) - \bar{y}_1^{(j)}(t)] \\
&= - \sum_{j=0}^2 k_j^1 [L_f^j h_1(x) - \bar{y}_1^{(j)}(t)] \\
&= -k_0^1 [h_1(x) - \bar{y}_1(t)] - k_1^1 [L_f h_1(x) - \bar{y}_1^{(1)}(t)] - k_2^1 [L_f^2 h_1(x) - \bar{y}_1^{(2)}(t)] \\
&= -k_0^1 [x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] - k_1^1 [x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] - k_2^1 [x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)], \\
v_2 = \mathcal{Y}_2(x, t) &= - \sum_{j=0}^1 k_j^2 e_2^{(j)}(t) = - \sum_{j=0}^1 k_j^2 [y_2^{(j)}(t) - \bar{y}_2^{(j)}(t)] \\
&= - \sum_{j=0}^1 k_j^2 [L_f^j h_2(x) - \bar{y}_2^{(j)}(t)] \\
&= -k_0^2 [h_2(x) - \bar{y}_2(t)] - k_1^2 [L_f h_2(x) - \bar{y}_2^{(1)}(t)] \\
&= -k_0^2 [x_4 - \bar{y}_2(t)] - k_1^2 [x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)].
\end{aligned}$$

são escolhidos de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\begin{aligned}
\pi_1(s) &= s^3 + \sum_{j=0}^2 k_j^1 s^j = s^3 + k_2^1 s^2 + k_1^1 s + k_0^1, \\
\pi_2(s) &= s^2 + \sum_{j=0}^1 k_j^2 s^j = s^2 + k_1^2 s + k_0^2,
\end{aligned}$$

estejam no SPE, pois as dinâmicas malha-fechada dos erros são dadas por

$$\begin{aligned}
e_1^{(3)} + k_2^1 e_1^{(2)} + k_1^1 e_1^{(1)} + k_0^1 e_1 &= 0, \\
e_2^{(2)} + k_1^2 e_2^{(1)} + k_0^2 e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

A realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned}
u &= \delta(x, t) = A(x)^{-1} [-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v], \\
&= A(x)^{-1} \left(-a(x) + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(3)}(t) \\ \bar{y}_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1(x, t) \\ \mathcal{Y}_2(x, t) \end{bmatrix} \right), \quad x \in U_0, t \geq 0,
\end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência desejada $\bar{y}(t)$ (desde que a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada permaneça em U_0 para todo $t \geq 0$), onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_1(x, t) &= -k_0^1 [x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] - k_1^1 [x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] - k_2^1 [x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)], \\
\mathcal{Y}_2(x, t) &= -k_0^2 [x_4 - \bar{y}_2(t)] - k_1^2 [x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)],
\end{aligned}$$

com $v = (v_1, v_2)' = (\mathcal{Y}_1(x, t), \mathcal{Y}_2(x, t))' \in \mathbb{R}^2$.

Ressaltamos, uma vez mais, que as realimentações definidas acima forçam $y(t)$ a rastrear assintoticamente $\bar{y}(t)$ desde que a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada permaneça em U_0 para todo $t \geq 0$ (perceba que a realimentação (8.15) poderá apresentar singularidades e que $y_i = h_i(x)$ poderá deixar de ter grau relativo ρ_i constante se $x(t)$ sair de U_0). No entanto, as hipóteses que fizemos até agora sobre o sistema (8.1)–(8.2) não garantem, a princípio, que isto realmente ocorrerá. Além disso, tais hipóteses também não garantem que a solução $x(t)$, $t \geq 0$, e o controle aplicado $u(t)$, $t \geq 0$, serão limitados. O próximo resultado apresenta condições para que isto seja assegurado.

Teorema 3: Considere o sistema (8.1)–(8.2) com saída $y = h(x)$ e $V = \mathbb{R}^n$. Assuma que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Suponha que a saída $y = h(x)$ satisfaz:

- A saída $y = h(x)$ é de classe C^∞ e admite grau relativo em \mathbb{R}^n ;
- A matriz de desacoplamento é não singular em \mathbb{R}^n , ou seja, $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$;
- A aplicação $z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)) \end{aligned} \quad (8.18)$$

é **injetiva**.

Aplique a realimentação (8.17), e assuma que $\bar{y}: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a saída de referência desejada de classe C^∞ . Então, há **convergência assintótica global** do erro de rastreamento para zero, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i(t) - \bar{y}_i(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m,$$

independentemente da condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ do sistema em malha-fechada. Além disso, se a aplicação $z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **bijetiva** e, para cada $1 \leq i \leq m$, $0 \leq k \leq \rho_i$, temos que $\bar{y}_i^{(k)}(t)$, $t \geq 0$, é **limitada**, então a solução $x(t)$, $t \geq 0$, do sistema em malha-fechada e o controle aplicado $u(t)$, $t \geq 0$, são limitados, com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \bar{x}(t)] = 0,$$

para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\bar{x}(t) = z^{-1}(\bar{y}_1^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m-1)}(t)), \quad t \geq 0.$$

Prova: Consequência dos resultados que veremos na Seção 13.4.

Exemplo 6: A equação de movimento de um robô de n graus de liberdade e com atuação em todas as juntas é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = u \quad (8.19)$$

onde $M(q)$ é a matriz de massa $n \times n$, que é sempre simétrica e invertível, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos, $K(q) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade, $q \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de posições generalizadas, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades generalizadas, $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças generalizadas, e M, C, K são de classe C^∞ .

A equação (8.19) pode ser reescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (8.20)$$

onde

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\ f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assuma que a cinemática direta do robô é dada por

$$y(t) = h(q(t)),$$

onde $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e com Jacobiano $\Gamma(q) = \partial h(q) / \partial q$ invertível para todo q pertencente a um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ (onde não existem singularidades da cinemática direta).

Neste caso, pela regra da cadeia,

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = \Gamma(q) \dot{q}.$$

Vemos assim que a primeira derivada de todas as saídas $y_i = h_i(x)$ é função apenas do estado x e não é influenciada pela entrada u . Derivando outra vez, obtemos

$$y^{(2)} = \Gamma^{(1)}(q) \dot{q} + \Gamma(q) \ddot{q}.$$

Note que a componente ij da matriz $\Gamma(q)$ é dada por

$$\Gamma_{ij}(q) = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q),$$

e, portanto, a componente ij de $\Gamma^{(1)}(q)$ será

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k.$$

Logo, a i -ésima componente do vetor coluna $\Gamma^{(1)}(q)\dot{q}$ é

$$\left\{ \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} \right\}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j.$$

A matriz Hessiana H_i da aplicação h_i é definida elemento a elemento por

$$\{H_i(q)\}_{kj} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}(q).$$

Temos então que

$$\left\{ \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} \right\}_i = \sum_{i=1}^n \dot{q}^T H_i(q) \dot{q}.$$

Como H_i depende apenas de q , segue-se que

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u,$$

onde

$$a(x) = \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} - \Gamma(q)M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)], \quad A(x) = \Gamma(q)M^{-1}(q).$$

Mas,

$$\det A(x) = (\det \Gamma(q))(\det M^{-1}(q)) \neq 0, \quad \text{para } x = (q, \dot{q}) \in W \times \mathbb{R}^n.$$

Assim, concluímos que:

- Cada saída $y_i = h_i(x)$ admite grau relativo $W \times \mathbb{R}^n$ com $\rho_i = 2$;
- A matriz de desacoplamento é invertível em $W \times \mathbb{R}^n$ (o espaço de estado é $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$);
- $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$;
- A aplicação $z : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em (8.18) é injetiva, já que é dada por $z(q, \dot{q}) = (y^{(0)}, y^{(1)}) = (h(q), \Gamma(q)\dot{q})$.

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(2)}(t) + v], \quad x \in W \times \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (8.21)$$

lineariza a dinâmica do erro da seguinte maneira

$$e^{(2)} = v,$$

onde $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a saída de referência desejada.

Agora, seja $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^2$ definido por

$$\varepsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)})', \quad 1 \leq i \leq n.$$

A dinâmica de $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ é governada pela equação linear

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{A}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{B}_i v_i, \quad (8.22)$$

onde

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Devemos então determinar uma lei de controle estabilizante

$$v_i = -\mathbf{K}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i.$$

Para isto, tomamos dois polos de malha-fechada λ_i^1, λ_i^2 (SPE), calculamos $\pi_i(s) = (s - \lambda_i^1)(s - \lambda_i^2) = s^2 + k_1^i s + k_0^i$, e escolhemos

$$\mathbf{K}_i = [k_0^i \quad k_1^i].$$

Logo, a lei de controle estabilizante v possui a forma

$$v = -\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon},$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n)'$$

Note que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(0)}, e_n^{(1)})' = \mathbf{y}^{(1)} - \bar{\mathbf{y}}^{(1)},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(0)}, y_n^{(1)})', \\ \bar{\mathbf{y}}^{(1)} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}, \bar{y}_n^{(1)})'. \end{aligned}$$

8.3 Flatness

Nesta seção, faremos a conexão entre o problema de rastreamento de saída e o conceito de **flatness** (ou **platitude**, que segundo o dicionário Houaiss é a propriedade de ser plano). O conceito de flatness foi cunhado por Fliess e seus coautores em [1] a partir dos resultados que apresentamos neste capítulo sobre linearização exata. Existem várias maneiras equivalentes de enunciar a propriedade de flatness. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [6]. Os livros [7] e [4] apresentam a noção de flatness e suas diversas aplicações em problemas de controle.

Definição: Dizemos que um sistema da forma (8.1) é **plano** (ou **flat**) quando existe um conjunto $y = (y_1, \dots, y_m)$ de funções de classe C^∞ , denominada de saída⁵ **plana** (ou saída **flat**), com as seguintes propriedades:

- Cada $y_i = h_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, é função apenas⁶ do estado x , e **o número de componentes m de y é igual ao número de componentes da entrada $u = (u_1, \dots, u_m)$ do sistema;**
- O estado x pode ser determinado a partir de y e de um número finito de suas derivadas. Mais especificamente⁷, existe uma aplicação \mathcal{A} de classe C^∞ tal que

$$x = \mathcal{A}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\gamma)}), \quad (8.23)$$

onde $y^{(k)} \triangleq (y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)})$, para $k \geq 0$;

- A entrada u pode ser determinada a partir de y e de um número finito de suas derivadas. Em outras palavras, existe uma aplicação \mathcal{B} de classe C^∞ tal que

$$u = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)}). \quad (8.24)$$

Isto significa que

$$x(t) = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))$$

é a trajetória de (8.1) quando a aplicamos a entrada

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação arbitrária de classe C^∞ .

Exemplo 1: Temos que o motor CC apresentado na Seção 13.1 é um sistema flat com saída flat $y = x_1$, pois o estado deste sistema é determinado por

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, \dot{x}_1) = (y, \dot{y}) = \mathcal{A}(y, \dot{y}),$$

⁵ Essa não é necessariamente a saída real do sistema (8.1).

⁶ Para simplificar a exposição, consideraremos que y_i depende somente do estado x . Na verdade, o conceito de flatness é muito mais geral, de modo que y_i pode depender também da entrada $u = (u_1, \dots, u_m)$ e de suas derivadas até uma certa ordem finita.

⁷ Aqui, não estamos sendo precisos porque a definição de flatness é local, e as aplicações \mathcal{A} e \mathcal{B} acima podem estar definidas apenas localmente, e não globalmente.

e, como $\ddot{y} = -\dot{y} + u$, a entrada é dada por

$$u = \ddot{y} + \dot{y} = \mathcal{B}(y, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Note que, neste caso, a saída flat coincide com a saída real do sistema.

Exemplo 2: [7] Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u.\end{aligned}$$

Temos que $y = x_1$ é uma saída flat. De fato,

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = y^{(1)}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 + \sin(x_1) + x_1 = y^{(2)} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = y^{(3)} + y^{(1)} \cos(y) + y^{(1)}, \\ u &= \dot{x}_4 - x_1 + x_3 = y^{(4)} + y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y).\end{aligned}$$

Exemplo 3: Um sistema linear da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

é flat **se e somente** é controlável (veja [1]).

Exemplo 4: Todo robô com n graus de liberdade e atuação em todas as juntas é flat⁸. De fato, vimos no Exemplo 6 da Seção 13.2.2 que a equação de movimento de um robô de n graus de liberdade é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = u \quad (8.25)$$

onde $M(q)$ é a matriz de massa $n \times n$, que é sempre simétrica e invertível, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos, $K(q) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade, $q \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de posições generalizadas, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades generalizadas, $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças generalizadas, e M, C, K são de classe C^∞ .

A equação (8.25) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (8.26)$$

⁸ Para quem já fez algum curso de robótica, perceberá que a noção de flatness é análoga ao método do torque calculado.

onde

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\ f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Neste caso, fica claro que $y = q$ é uma saída flat, já que

$$\begin{aligned} x &= (q, \dot{q}) = (y, \dot{y}), \\ u &= M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = M(y)\ddot{y} + C(y, \dot{y}) + K(y). \end{aligned}$$

(método do torque calculado!)

se escrevem em função de y, \dot{y}, \ddot{y} .

Veremos agora que o conceito de flatness permite solucionar de maneira simples e direta o problema de controlabilidade de um sistema não-linear. De fato, imagine que desejamos levar o estado $x(t)$ do sistema (8.1) de uma condição inicial $x(0) = x_0$ em $t = 0$ até uma condição final desejada $x(T) = x_T$ em $t = T > 0$. Para isto, devemos encontrar uma entrada adequada $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tal problema de controle é denominado de **planejamento de trajetórias**. Quando $y = h(x)$ é uma saída flat de (8.1), a solução do problema de planejamento de trajetórias recai na construção de uma aplicação $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ que obedeça as seguintes restrições determinadas por (8.23):

$$(A) \quad x_0 = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t)) \Big|_{t=0};$$

$$(B) \quad x_T = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t)) \Big|_{t=T}.$$

Teorema: Assuma que o sistema (8.1) é flat. A aplicação da entrada dada por (8.24)

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad \text{para } t \in [0, T],$$

onde $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^∞ que obedece as restrições (A) e (B) anteriores⁹, leva o sistema de x_0 em $t = 0$ até x_T em $t = T$. Em particular, se um sistema é flat, ele possui garantidamente uma propriedade de controlabilidade¹⁰.

Obs: Ressaltamos que apesar de a lei de controle acima resolver o problema de planejamento de trajetórias de maneira trivial, essa é uma solução em **malha-aberta**. Uma estratégia de controle em malha-fechada deve ser capaz de corrigir erros de condição inicial, de modelagem, de influência de perturbações, etc.

⁹ Sempre podemos construir uma aplicação $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ que satisfaz tais restrições por interpolação polinomial. Para maiores detalhes, veja [4, pp. 182–184].

¹⁰ Para definições e resultados de controlabilidade para sistemas não-lineares, veja [5] e [4].

Note que, se $y = h(x)$ é uma saída flat do sistema (8.1), então (8.23) implica que ao forçarmos $y(t)$ a rastrear $\bar{y}(t)$, o estado $x(t)$ do sistema fica completamente determinado. Desse modo, para sistemas flat, o problema de rastreamento da saída se confunde com o problema de controlar o seu estado. Veremos agora que, quando a saída $y = h(x)$ do sistema (8.1) é flat, o problema de rastreamento de saída pode muitas vezes ser solucionado de maneira relativamente simples e direta. Isto é ilustrado a seguir.

Exemplo 5: [7] No Exemplo 2 acima, mostramos que $y = x_1$ é uma saída flat para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u,\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\ x_2 &= y^{(1)}, \\ x_3 &= y^{(2)} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= y^{(3)} + y^{(1)} \cos(y) + y^{(1)}, \\ u &= y^{(4)} + y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y).\end{aligned}$$

Para resolvermos o problema de rastreamento de saída, basta encontrarmos uma realimentação de estado $u = \delta(x, w)$, onde $w \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, que linearize a dinâmica de y . A ideia é escolher $u = \delta(x, w)$ de modo a impor que (note que $y^{(4)}$ é a maior derivada de y que aparece na expressão de u acima):

$$y^{(4)} = w.$$

A realimentação de estado

$$\begin{aligned}u &= w + y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y) \\ &= w + \underbrace{[x_3 - x_1 - \sin(x_1)]}_{=y^{(2)}=\dot{x}_2} \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1),\end{aligned}$$

onde $w \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, atinge o desejado, i.e. assegura que

$$y^{(4)} = w,$$

pois

$$\begin{aligned}u &= w + \cancel{y^{(2)} \cos(y)} - \cancel{(y^{(1)})^2 \sin(y)} + \cancel{2y^{(2)}} + \cancel{\sin(y)} \\ &= y^{(4)} + \cancel{y^{(2)} \cos(y)} - \cancel{(y^{(1)})^2 \sin(y)} + \cancel{2y^{(2)}} + \cancel{\sin(y)}\end{aligned}$$

(a segunda igualdade acima é pela propriedade de flatness).

Escolhendo a nova entrada w como

$$w = \bar{y}^{(4)} + v,$$

onde $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a saída de referência desejada de classe C^∞ e $v \in \mathbb{R}$ é uma nova entrada, obtemos que a dinâmica do erro $e = y - \bar{y}$ é linear e dada por

$$e^{(4)} = v.$$

Logo, tudo o que nos resta fazer é determinar uma realimentação estabilizante v como na Seção 4.2.2 acima. Escolhendo a realimentação estabilizante v como

$$v = a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e$$

implica que

$$e^{(4)} - a_3 e^{(3)} - a_2 e^{(2)} - a_1 e^{(1)} - a_0 e = 0,$$

e então especificamos os ganhos $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ de modo que as raízes da equação característica do erro estejam no SPE:

$$\pi(s) = s^4 - a_3 s^3 - a_2 s^2 - a_1 s - a_0.$$

Portanto, a realimentação estabilizante v projetada, rescrita em função do estado x e do tempo t , é dada por

$$\begin{aligned} v &= \gamma(x, t) = a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e \\ &= a_3 [y^{(3)} - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2 [y^{(2)} - \bar{y}^{(2)}(t)] + a_1 [y^{(1)} - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0 [y - \bar{y}(t)] \\ &= a_3 [x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2 [x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\ &\quad + a_1 [x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0 [x_1 - \bar{y}(t)], \end{aligned}$$

pois, a partir da propriedade de flatness apresentada anteriormente, encontraremos que

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ y^{(1)} &= x_2, \\ y^{(2)} &= \dot{x}_2 = x_3 - x_1 - \sin(x_1), \\ y^{(3)} &= x_4 - y^{(1)} \cos(y) - y^{(1)} = x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2. \end{aligned}$$

Por fim, a realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned} u &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + w \\ &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \\ &\quad + \underbrace{\bar{y}^{(4)}(t)}_{=w} + v \\ &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \bar{y}^{(4)}(t) + \\ &\quad + a_3 [x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2 [x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\ &\quad + a_1 [x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0 [x_1 - \bar{y}(t)], \end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência $\bar{y}(t)$.

8.4 O Problema de Linearização Exata

Começamos apresentando dois exemplos motivacionais.

Exemplo 1: Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e entrada $u \in \mathbb{R}$, da forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_1^2 + x_2^2)u.\end{aligned}$$

A realimentação de estado não-linear

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 + v),$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, permite cancelar perfeitamente as não-linearidades, resultando no seguinte sistema **linear** em **malha-fechada**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v.\end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{x} = Ax + Bv,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que tal sistema linear é controlável, pois $\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto}([B \ AB]) = 2$. Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma $v = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$ de modo a estabilizarmos a origem $z = 0$ do sistema acima (polos de $A - BK$ no SPE) e, desse modo, concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 - k_1x_1 - k_2x_2),$$

aplicada ao sistema original $\dot{x} = f(x, u)$, assegura que a origem $x = 0$ do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

Exemplo 2: Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ e entrada $u \in \mathbb{R}$, da forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{(1 + x_1^2)}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{(1 + x_1^2)^2} + (1 + x_1^2) \left(\frac{x_2^2}{(1 + x_1^2)^2} + (1 + x_1^2)u \right).\end{aligned}$$

Observe que \dot{x}_1 não pode ser linearizado diretamente por uma realimentação. Definimos então a mudança de coordenadas (**não-linear**) **global** $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$, onde $z_1 = x_1$ e $z_2 = x_2/(1+x_1^2)$. Note que a aplicação ϕ possui inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$, onde $x_1 = z_1$ e $x_2 = z_2(1+z_1^2)$. Portanto, ϕ é de fato uma mudança de coordenadas global. Assim, aplicando a regra da cadeia, teremos nas novas coordenadas z que

$$\dot{z}(t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} f(x(t), u(t)).$$

Substituindo $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$, obtemos

$$\dot{z} = \left(\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x, u) \right) \right|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} & \frac{1}{(1+x_1^2)} \end{array} \right] f(x, u) \right) \bigg|_{x=\phi^{-1}(z)},$$

com

$$f(x, u) = \left[\begin{array}{c} \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \\ \frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2) \left(\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2)u \right) \end{array} \right].$$

Note que a equação de estado acima é da forma

$$\dot{z} = g(z, u)$$

e corresponde à expressão do **mesmo sistema** nas novas coordenadas z . Fazendo os cálculos, vamos encontrar

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 + (1+z_1^2)u. \end{aligned}$$

Escolhendo a realimentação de estado **não-linear**

$$u = \delta(z, v) = \frac{1}{1+z_1^2}(-z_2^2 + v),$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, determinamos o sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v. \end{aligned}$$

Este sistema é **linear** e da forma

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vê-se que o sistema em **malha-fechada**, nas **novas coordenadas** z , é **linear e controlável**. Além disso, nas coordenadas originais x , a realimentação de estado **não-linear** é dada por

$$u = \delta(\phi(x), v) = \gamma(x, v) = \frac{1}{1+x_1^2} \left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + v \right).$$

Conclui-se então que uma mudança de coordenadas não-linear $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado não-linear¹¹ $u = \gamma(x, v)$, permitem cancelar de maneira exata as não-linearidades do sistema e obter um sistema em malha-fechada que é linear e controlável. Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma $v = -Kz = -k_1z_1 - k_2z_2$ de modo a estabilizarmos a origem $z = 0$ de

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

e, desse modo, como $z = (z_1, z_2) = z(x) = \phi(x_1, x_2)$ com $z(0) = \phi(0, 0) = 0$, concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+x_1^2} \left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1z_1 - k_2z_2 \right), \\ &= \frac{1}{1+x_1^2} \left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1x_1 - k_2\frac{x_2}{1+x_1^2} \right), \end{aligned}$$

aplicada ao sistema original $\dot{x} = f(x, u)$, assegura que a origem $x = 0$ do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

Obs: Seja $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Lembramos que F é **injetiva** quando F não **nunca** mapeia elementos **distintos** do **domínio** W ao **mesmo** elemento do **contradomínio** \mathbb{R}^n . Assim, $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva **se e somente se**

$$F(x) = F(y) \Rightarrow x = y, \quad \text{para todo } x, y \in W,$$

Equivalentemente, temos que $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva **se e somente se**

$$z = z(x) = F(x) \in F(W) \Rightarrow x = x(z) = F^{-1}(z), \quad \text{para todo } x \in W,$$

ou seja, podemos expressar $x \in W$ em função de $z = F(x)$ através da aplicação **inversa pela esquerda** $F^{-1} : F(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W$ ($F^{-1}(F(x)) = x$, para todo $x \in F(W)$, onde $F(W) \subset \mathbb{R}^n$ é o **conjunto image** de F). Lembramos também que $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **sobrejetiva** quando **todo** elemento do contradomínio \mathbb{R}^n é mapeado por **ao menos um** elemento do domínio W , ou seja, para **todo** $z \in \mathbb{R}^n$ existe **algum** $x \in W$ tal que $z = F(x)$ (note que isto é o mesmo que dizer que o conjunto imagem $F(W)$ é igual ao contradomínio \mathbb{R}^n : $F(W) = \mathbb{R}^n$). Ressaltamos que toda aplicação $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se torna sobrejetiva ao restringirmos o contradomínio ao conjunto imagem, isto é, ao considerarmos que $F : W \rightarrow F(W)$.

¹¹ Ou, equivalentemente, $u = \gamma(\phi^{-1}(z), v) = \delta(z, v)$.

Lembramos, ainda, que uma aplicação $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **bijetiva** quando F é injetiva e sobrejetiva, ou seja, para **todo** $z \in \mathbb{R}^n$, existe **um único** $x \in W$ tal que $z = F(x)$. Desse modo, temos que $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bijetiva **se e somente** a aplicação **inversa** $F^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow W$ existe, ou seja, F^{-1} satisfaz:

$$F(F^{-1}(z)) = z, \quad F^{-1}(F(x)) = x,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in W$.

Veremos agora como determinar se uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bijetiva (injetiva e sobrejetiva). Suponha que

$$z = z(x) = F(x) \in F(W) \Rightarrow x = x(z) = F^{-1}(z), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $F^{-1} : F(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou seja, $F^{-1}(F(x)) = x$, para todo $x \in W$ (inversa pela esquerda). Então, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva. Se $F^{-1}(z)$ está bem-definida para todo $z \in \mathbb{R}^n$ e, além disso,

$$x = x(z) = F^{-1}(z) \Rightarrow z = z(x) = F(x), \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, $F(F^{-1}(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, então $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é também sobrejetiva, e $F^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação inversa de F .

No Exemplo 2 acima, temos que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$, onde $z_1 = x_1$ e $z_2 = x_2/(1+x_1^2)$. Vamos mostrar que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de fato bijetiva e, portanto, possui inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Suponha que

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z(x) = \phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{1+x_1^2} \end{bmatrix},$$

para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então (inversa pela esquerda),

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x(z) = \phi^{-1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2(1+z_1^2) \end{bmatrix}.$$

Logo, ϕ é injetiva. Note que não há nenhuma restrição na escolha de $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ para se expressar $x = (x_1, x_2)$ função de $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$. Desse modo, $\phi^{-1}(z_1, z_2)$ está bem-definida para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Como

$$\phi(\phi^{-1}(z_1, z_2)) = \phi(z_1, z_2(1+z_1^2)) = (z_1, z_2),$$

para $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, concluímos que ϕ é bijetiva e que sua inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$, onde $x_1 = z_1$ e $x_2 = z_2(1+z_1^2)$.

Os resultados dos exemplos acima dão origem ao seguinte problema:

Problema de Linearização Exata: Encontrar uma realimentação de estado e uma mudança de coordenadas, tais que o sistema em malha-fechada, quando escrito nessas novas coordenadas, seja um sistema linear controlável.

Na próxima seção, veremos a conexão entre o problema de linearização exata, o problema de desacoplamento e o problema de estabilização de um ponto de equilíbrio.

8.4.1 Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Para tratarmos **mudanças de coordenadas não-lineares** de maneira precisa, precisamos primeiramente apresentar um teorema fundamental na teoria de sistemas dinâmicos, denominado de **Teorema da Função Inversa**. Sejam W e Z abertos de \mathbb{R}^n . Uma aplicação $\phi : W \rightarrow \phi(W) = Z$ de classe C^∞ que admite inversa $\phi^{-1} : Z \rightarrow \phi^{-1}(Z) = W$ de classe C^∞ é denominada de **mudança de coordenadas local** em W (quando $W = Z = \mathbb{R}^n$, dizemos que $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **mudança de coordenadas global**).

Teorema da Função Inversa: Considere que $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^∞ , onde W é um aberto em \mathbb{R}^n . Seja $J(x) = \partial F(x)/\partial x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz Jacobiana da aplicação F no ponto $x \in W$. Seja $x_0 \in W$ e $y_0 = F(x_0)$. Assuma que $\det(J(x_0)) \neq 0$ (ou, equivalentemente, $\text{posto}(J(x_0)) = n$). Então, existe uma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 e uma vizinhança aberta $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$ de $y_0 = F(x_0)$ tal que a aplicação $\phi : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0} = \phi(U_{x_0}) = F(U_{x_0})$ definida por $z = \phi(x) = F(x)$, para todo $x \in U_{x_0}$, é uma mudança de coordenadas **local** em $U_{x_0} \subset W$.

Ressaltamos que, no enunciado do teorema, dizer que ϕ é a mesma aplicação que F seria um abuso de linguagem. De fato, o domínio destas aplicações em geral não coincidem (nem o contradomínio), pois na maioria dos casos U_{x_0} é um subconjunto aberto próprio de W e V_{y_0} é um subconjunto aberto próprio de \mathbb{R}^n .

Obs 1: Suponha que uma aplicação $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ é tal que $\det(J(x)) \neq 0$, para todo $x \in W$, onde W é um aberto. O Teorema da Função Inversa implica que $F(W)$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n , mas não assegura que $F : W \rightarrow F(W)$ é uma mudança de coordenadas **local** em W . No entanto, $F : W \rightarrow F(W)$ é uma mudança de coordenadas **local** em W se e somente se F é uma aplicação **injetiva**.

Cuidado! A aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos(x_2), e^{x_1} \sin(x_2))$$

é de classe C^∞ com

$$\det(J(x_1, x_2)) = e^{x_1} \neq 0,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. No entanto, F não é injetiva! De fato: se $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2 + 2k\pi$, então $F(x_1, x_2) = F(y_1, y_2)$. **Conclusão:** para que $F : W \rightarrow F(W)$ de classe C^∞ seja uma mudança de coordenadas **local** no aberto $W \subset \mathbb{R}^n$, devemos verificar que: (a) F é injetiva, e (b) $\det(J(x)) \neq 0$, para todo $x \in W$.

Exemplo 3:[3] Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z = (z_1, z_2) = F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_2),$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Como $\det(J(0)) = 1 \neq 0$, concluímos que existe uma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^2$ de $x_0 = 0$ tal que $z = F(x)$ é uma mudança de coordenadas local em U_{x_0} . Logo, $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_2)$ determina uma mudança de coordenadas local em uma vizinhança aberta da origem $x_0 = 0$. Note que $\det(J(x_1, x_2)) = 0$ quando $x_2 = \pi/2 + k\pi$.

Exemplo 4:[3] Considere a aplicação $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{x_1 + 1} \end{bmatrix},$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq -1\}$. Temos que $W \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto,

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(x_1 + 1)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det(J(x)) = 1 \neq 0$, para todo $x = (x_1, x_2) \in W$. Vamos mostrar que $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva. Suponha que

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z(x) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{x_1 + 1} \end{bmatrix},$$

para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então (inversa pela esquerda),

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x(z) = F^{-1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 + \frac{1}{z_1 + 1} \end{bmatrix}.$$

Logo, F é injetiva, e concluímos assim que $F : W \rightarrow F(W)$ é uma mudança de coordenadas local em W .

Vamos agora tratar o problema de linearização exata que foi enunciado de maneira relativamente imprecisa no início deste capítulo.

Problema de Linearização Exata: Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho¹² do sistema (8.1). Dizemos que o **problema de linearização exata é localmente solúvel** em x_0 , se existir uma mudança de coordenadas local $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado localmente regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, ambas definidas em uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 , tais que, nas novas coordenadas $z = \phi(x)$, o sistema em malha-fechada (8.4) se expresse localmente em $\phi(U)$ por um sistema linear controlável da forma

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (8.27)$$

Do mesmo modo, seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho, ou seja, U_0 é um aberto em \mathbb{R}^n . Dizemos que o **problema de linearização é localmente solúvel** em U_0 , se existir uma mudança de coordenadas local $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado localmente regular

¹² Novamente, aqui, x_0 não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

$u = \alpha(x) + \beta(x)v$, ambas definidas em U_0 , tais que, nas novas coordenadas $z = \phi(x)$, o sistema em malha-fechada (8.4) se expresse localmente em $\phi(U)$ por (8.27).

Obs 2: Note que

$$\begin{aligned} Az &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{f}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \alpha(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}, \\ B &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{g}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \beta(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Lema: Considere o sistema (8.1)–(8.2) e seja $x_0 \in V$. Assuma que a saída $y = h(x)$ do sistema admite grau relativo em uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 e que $\det(A(x_0)) \neq 0$. Seja $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ a soma dos graus relativos ρ_i das saídas $y_i = h_i(x)$. Considere a aplicação $z : U \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ definida por¹³

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)), \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)), \\ &= (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \dots, z_{\rho_m}^m) \in \mathbb{R}^\rho, \end{aligned} \quad (8.28)$$

para $x \in U$. Seja $J(x) = \partial z(x) / \partial x$ a matriz Jacobiana de z no ponto $x \in U$ (note que $J(x)$ tem tamanho $\rho \times n$). Então, as ρ linhas de $J(x_0)$ são linearmente independentes ou, de maneira equivalente, $\text{posto}(J(x_0)) = \rho$ (posto completo). Em particular, $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \leq n$.

Uma demonstração geométrica deste resultado pode ser encontrada em[3].

Obs 2: Relembre que, pela Obs 1 da Seção 13.2.1, se $y = h(x)$ admite grau relativo em x_0 , então existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U . Além disso¹⁴, se $f(x_0) = 0$ e $h(x_0) = 0$, temos que a definição de derivada de Lie implica que $L_f^k h_i(x_0) = 0$, para todo $0 \leq k \leq \rho_i$, $1 \leq i \leq m$. Logo, $z(x_0) = 0$ em (8.28) e $\alpha(x_0) = 0$ em (8.8).

Teorema 1: Considere o sistema (8.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho. Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em x_0 **se e somente se** existir uma saída¹⁵ $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ (m componentes) tal que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em uma vizinhança aberta de x_0 , é de classe C^∞ e admite grau relativo em x_0 ;
- A matriz de desacoplamento é não singular em x_0 , ou seja, $\det(A(x_0)) \neq 0$;

¹³ Da definição de grau relativo, temos que $y_i^{(k)} = L_f^k h_i(x)$ depende apenas de x para $0 \leq k \leq \rho_i - 1$.

¹⁴ Note que assumir que $f(x_0) = 0$ é o mesmo que dizer que x_0 é um ponto de equilíbrio de (8.1)–(8.2) para $u = 0$. Observe também que, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir que $h(x_0) = 0$. De fato, se $h(x_0) \neq 0$, então ao escolhermos como nova saída $\bar{y} = \bar{h}(x) = h(x) - h(x_0)$, a qual corresponde a uma translação da origem do espaço de saída, teremos que $\bar{h}(x_0) = 0$ e $L_f^{k+1} h_i = L_f^{k+1} \bar{h}_i$, $L_{g_j}^k L_f^k h_i = L_{g_j}^k L_f^k \bar{h}_i$, para $k \geq 0$. Assim, $\bar{y}_i = \bar{h}_i(x)$ admite grau relativo $\bar{\rho}_i = \rho_i$ em x_0 .

¹⁵ Aqui, $y = h(x)$ não precisa ser a saída real de (8.1).

$$\bullet \rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n.$$

Prova: O fato de que tais condições são suficientes (\Leftarrow) é uma consequência do resultado acima. De fato, com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 13.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U e $\det(A(x)) \neq 0$, para todo $x \in U$. Pelo lema anterior, temos que a matriz quadrada $\rho \times n = n \times n$ dada por $Z(x_0) = \partial z(x_0)/\partial x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem determinante não-nulo. Defina a aplicação $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local em alguma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset U$ de x_0 . Por construção, temos que, nas novas coordenadas $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, o sistema (8.1) com a saída $y = h(x)$ é descrito por:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i = z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i = a_i(\phi^{-1}(z, \eta)) + A_i(\phi^{-1}(z, \eta))u \\ y_i = z_1^i \end{array} \right\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.29)$$

Logo, com a realimentação desacoplante (8.8), que é uma realimentação de estado estática localmente regular em U_{x_0} , e nas coordenadas locais $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, o sistema malha-fechada (8.4)–(8.5) se expressa localmente em $V_{z_0} = \phi(U_{x_0})$, onde $z_0 = \phi(x_0) = z(x_0)$, por:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i = z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i = v_i \\ y_i = z_1^i \end{array} \right\} \equiv (z_1^i)^{(\rho_i)} = y_i^{(\rho_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.30)$$

Agora, note que, para cada $1 \leq i \leq m$, (8.30) é um sistema linear controlável da forma

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A_i z^i + B_i v_i, \\ y_i &= C_i z^i, \end{aligned} \quad (8.31)$$

onde $z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)' \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ é o estado, $y_i = z_1^i \in \mathbb{R}$ é a saída, e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\rho_i \times \rho_i}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\rho_i \times 1}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times \rho_i}.$$

Tal sistema linear é essencialmente a conexão em cascata de ρ_i integradores, em que a entrada v_i e o estado z^i são obtidos derivando-se ρ_i vezes a saída $y_i^{(0)} = y_i = z_1^i$, obtendo-se sucessivamente $y_i^{(1)} = (z_1^i)^{(1)} = z_2^i, \dots, y_i^{(\rho_i-1)} = (z_1^i)^{(\rho_i-1)} = z_{\rho_i}^i$, até pararmos em $y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i$. Mostra-se que este sistema possui ρ_i polos em $s = 0$ (ou, equivalentemente, os autovalores de A_i são todos nulos com multiplicidade ρ_i).

Desse modo, mostramos que, nas coordenadas locais $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ e com a realimentação de estado estática localmente regular (8.8), as quais são definidas em uma vizinhança aberta U_{x_0} de x_0 , o sistema em malha-fechada é descrito pela **forma canônica de Brunowsky**:

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (8.32)$$

onde $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)' = ((z^1)', (z^2)', \dots, (z^m)')' \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Pode-se mostrar que a forma canônica de Brunowsky é controlável, o que finaliza a demonstração da suficiência (\Leftarrow) no teorema. Para uma prova da necessidade (\Rightarrow), consulte¹⁶ [3].

Teorema 2: Considere o sistema (8.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho. Suponha que existe uma saída¹⁷ $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ (m componentes) tal que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em U_0 , é de classe C^∞ e admite grau relativo em U_0 ;
- A matriz de desacoplamento é não singular em U_0 , ou seja, $\det(A(x)) \neq 0$, para todo $x \in U_0$;
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$;

¹⁶ Em [3], há um critério de existência de $y = h(x)$ através do cálculo dos *colchêtes de Lie* dos campos de vetores f, g_1, \dots, g_m que definem (8.1).

¹⁷ Novamente, aqui, $y = h(x)$ não precisa ser a saída real de (8.1).

- A aplicação $z : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$ em (8.28) é injetiva.

Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em U_0 através da mudança de coordenadas local $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$ e da realimentação desacoplante (8.8). Mais precisamente, a mudança de coordenadas local $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$ e a realimentação (8.8) estão definidas em U_0 , e são tais que, nas novas coordenadas z , o sistema em malha-fechada (8.4) se expressa localmente em $z(U_0)$ pela forma canônica de Brunowsky (8.32).

Prova: Este resultado é uma consequência do lema acima, da Obs 1 após o Teorema da Função Inversa, e da prova do Teorema 1 anterior.

Na sequência, vamos relacionar linearização exata com desacoplamento e com estabilização de um ponto de equilíbrio.

Para cada $i = 1, \dots, m$, a origem $z^i = 0$ do sistema (8.31) pode ser estabilizada por uma realimentação de estado

$$v_i = -K_i z^i \quad (8.33)$$

projetada como se segue. Seja $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$ o conjunto de polos desejados em malha-fechada (SPE). Assim,

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$$

é o polinômio característico desejado em malha-fechada. Escreva

$$\pi_i(s) = s^{\rho_i} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i s^j.$$

Prova-se que a realimentação (matriz linha)

$$K_i = [k_0^i \ k_1^i \ \dots \ k_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}$$

fornece¹⁸

$$\sigma(A_i - B_i K_i) = \Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}.$$

Agrupando todas as realimentações estabilizantes (8.33), para $i = 1, \dots, m$, obtemos

$$v = -Kz, \quad (8.34)$$

onde

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_m \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)' = ((z^1)')', ((z^2)')', \dots, ((z^m)')' \in \mathbb{R}^n.$$

¹⁸ Aqui, $\sigma(A)$ denota o conjunto de autovalores da matriz quadrada A .

Agora, suponha que

$$\begin{aligned}
z &= (z_1, z_2, \dots, z_n) = z(x), \\
&= \underbrace{(h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x))}_{=z^1}, \dots, \underbrace{(h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x))}_{=z^m}, \\
&= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)).
\end{aligned} \tag{8.35}$$

É claro que o procedimento descrito acima equivale a escolher

$$y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i = -K_i z^i = -\sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i z_j^i = -\sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i y_i^{(j)},$$

que por sua vez implica que

$$(z_1^i)^{(\rho_i)} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i (z_1^i)^{(j)} = y_i^{(\rho_i)} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} k_j^i y_i^{(j)} = 0$$

é uma EDO linear homogênea com polos estáveis $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i$.

O próximo resultado, o qual segue dos argumentos acima e da demonstração do Teorema 1, é uma condição suficiente para a solução do problema de desacoplamento com estabilidade em malha-fechada.

Teorema 3: [3] A forma canônica de Brunowsky (8.32) (sistema linear com vetor de estado $z \in \mathbb{R}^n$ e vetor de entrada $v \in \mathbb{R}^m$) é desacoplada e $z_0 = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente** assintoticamente estável de (8.32) com a realimentação (8.34). Em particular, se as hipóteses do Teorema 1 forem atendidas com $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, então¹⁹ x_0 é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema (8.1) com a realimentação desacoplante (8.8) seguida da realimentação estabilizante (8.34)–(8.35).

Obs 3: No resultado acima, note que a realimentação desacoplante (8.8) seguida da realimentação estabilizante (8.34)–(8.35) a ser aplicada na estabilização de x_0 nada mais é do que a realimentação (8.17) a ser aplicada para o rastreamento da saída $\bar{y} \equiv 0$ ao assumirmos que $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_m = n$.

Exemplo 5: No Exemplo 4 da Seção 13.2.1, estudamos o sistema definido em $V = \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\
y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\
y_2 &= h_2(x) = x_4.
\end{aligned}$$

¹⁹ Aqui, como $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, temos que $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (8.32) para $v = 0$. Veja a Obs 2 acima.

Escolhemos $x_0 = 0$. Note que $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, e que posto $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x)] = 2$, para todo $x \in V = \mathbb{R}^5$. Vimos anteriormente que $\det A(x_0) \neq 0$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$, e que a realimentação desacoplante (8.8) assegurou que

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1, \\ y_2^{(2)} &= v_2. \end{aligned}$$

Temos que $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 5$. Isto implica que

$$\begin{aligned} z &= (\underbrace{z_1, z_2, z_3}_{z^1}, \underbrace{z_4, z_5}_{z^2}) = (z^1, z^2) \\ &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), y_2^{(0)}(x), y_2^{(1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), L_f^2 h_1(x), h_2(x), L_f h_2(x)) \\ &= (\underbrace{x_1 - x_5, x_2, x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5}_{z^1 = \gamma_1(x)}, \underbrace{x_4, x_5}_{z^2 = \gamma_2(x)}), \end{aligned}$$

define uma mudança de coordenadas local $z = \phi(x) = z(x)$ em torno de x_0 com

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= z_1^{(3)} = v_1, \\ y_2^{(2)} &= z_4^{(2)} = v_2, \end{aligned}$$

ou seja, nas novas coordenadas $z = \phi(x) = z(x)$, o sistema em malha-fechada é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = y_1^{(1)} = z_2, \\ \dot{z}_2 = y_1^{(2)} = z_3, \\ \dot{z}_3 = y_1^{(3)} = v_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_4 = y_2^{(1)} = z_5, \\ \dot{z}_5 = y_2^{(2)} = v_2. \end{cases}$$

Logo, nas novas coordenadas $z = \phi(x) = z(x)$, o sistema em malha-fechada está na forma de canônica de Brunovsky:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_1, \\ \dot{z}_4 &= z_5, \\ \dot{z}_5 &= v_2, \end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v.$$

Além do mais, a realimentação desacoplante u determinada no Exemplo 4 da Seção 13.2.1, seguida a realimentação estabilizante v em (8.34)–(8.35)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v = -Kz = - \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 z^1 \\ -K_2 z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 \gamma_1(x) \\ -K_2 \gamma_2(x) \end{bmatrix},$$

estabiliza assintoticamente (localmente) a origem $x_0 = 0$ do sistema original acima.

A realimentação de estado resultante

$$\begin{aligned} u &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) - A(x)^{-1}Kz, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) - A(x)^{-1} \begin{bmatrix} K_1 \gamma_1(x) \\ K_2 \gamma_2(x) \end{bmatrix}, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) - A(x)^{-1} \begin{bmatrix} k_0(x_1 - x_5) + k_1x_2 + k_2(x_3 - x_1x_4 + x_4x_5) \\ k_3x_4 + k_4x_5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

está definida apenas em uma vizinhança aberta $U \subset V = \mathbb{R}^5$ de $x_0 = 0$, onde as matrizes de ganho

$$K_1 = [k_0 \ k_1 \ k_2] \in \mathbb{R}^3, \quad K_2 = [k_3 \ k_4] \in \mathbb{R}^2,$$

são escolhidas de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\pi_1(s) = s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0, \quad \pi_2(s) = s^2 + k_4s + k_3,$$

estejam no SPE. Note que a realimentação u acima nada mais é do que a realimentação u determinada no Exemplo 5 da Seção 13.2.2 com $\bar{y} \equiv 0$, conforme a Obs 3 anterior.

Relembramos, aqui, que a realimentação de estado u acima de fato estabiliza a origem $x_0 = 0$ do sistema em malha-fechada, pois, por construção:

$$\begin{aligned} z_1^{(3)} = y_1^{(3)} = v_1 = -K_1 z^1 &= -k_0z_1 - k_1z_2 - k_2z_3 = -k_0z_1 - k_1z_1^{(1)} - k_2z_1^{(2)}, \text{ com } K_1 = [k_0 \ k_1 \ k_2], \\ z_4^{(2)} = y_2^{(2)} = v_2 = -K_2 z^2 &= -k_3z_4 - k_4z_5 = -k_3z_4 - k_4z_4^{(1)}, \text{ com } K_2 = [k_3 \ k_4], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} z_1^{(3)} + k_2z_1^{(2)} + k_1z_1^{(1)} + k_0z_1 &= 0, \\ z_4^{(2)} + k_4z_4^{(1)} + k_3z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 4: [3] Considere as hipóteses do Teorema 2 e que $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$. Seja²⁰ $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Então, x_0 é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (8.1) com a realimentação desacoplante (8.8) seguida da realimentação estabilizante (8.34)–(8.35), e

$$ER_A(x_0) = \{x(0) \in U_0 \mid x(t) \in U_0 \text{ para todo } t \geq 0\}$$

²⁰ Aqui, como $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, temos que $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (8.32) para $v = 0$. Veja a Obs 2 acima.

é uma estimativa da região de atração²¹ $R_A(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , ou seja, $ER_A(x_0) \subset R_A(x_0)$. Em particular, se $U_0 = V = \mathbb{R}^n$, então x_0 é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema em malha-fechada.

Exemplo 6: Considere novamente um robô com n graus de liberdade e com atuação em todas as juntas. Pelo o que vimos anteriormente no Exemplo 6 da Seção 13.2.2, temos que cada componente $y_i = q_i$ da saída $y = h(q) = q$ (com $W = \mathbb{R}^n$) admite grau relativo em todo o espaço de estado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que os mesmos são todos iguais a dois, ou seja, $\rho_1 = \dots = \rho_n = 2$. Além disso, a matriz de desacoplamento $A(x)$ é dada por $A(x) = M^{-1}(q)$, pois $\Gamma(q) = I$. Em particular, concluímos pelo Teorema 2 que o problema de linearização exata para o robô é **globalmente** solúvel em todo o espaço de estado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, já que a dimensão do estado $x = (q, \dot{q})$ é $2n$, $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$, $\text{posto}(A(x)) = \text{posto}(g(x)) = n$ em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e a aplicação (identidade) $z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $z(x) = x = (q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n)$ é bijetiva. É importante ressaltar que as coordenadas generalizadas q nem sempre são as coordenadas $y = h(q)$ do efetuator (veja o Exemplo 6 da Seção 13.2.3).

Exemplo 7: Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u.\end{aligned}$$

Projete uma realimentação de estado para:

1. Solucionar o problema de linearização exata globalmente em \mathbb{R}^4 , apresentando a mudança de coordenadas e a forma canônica de Brunowsky correspondentes. **Dica:** utilize a **saída virtual** $y = x_1$, ou seja, $y = x_1$ não é necessariamente a **saída real** do sistema, mas é utilizada como um artifício para se realizar os cálculos e solucionar o problema de controle em questão.
2. Estabilizar a origem, considerando que os polos desejados em malha-fechada são todos iguais a -1 . A realimentação de estado projetada garante que origem é globalmente assintoticamente estável? Justifique sua resposta.
3. Rastrear a saída de referência $\bar{y}(t) = 1$, supondo que a saída (real) do sistema é $y = x_1$ e considerando os mesmos polos do item anterior para a dinâmica do erro em malha-fechada. A realimentação de estado projetada garante convergência assintótica global do erro para zero e que as variáveis de estado são limitadas? Justifique sua resposta.

²¹ De fato, $z = z(x) = \phi(x)$ é uma mudança de coordenadas local em U_0 , com $z_0 = z(x_0) = \phi(x_0) = 0$. Suponha que $x(0) \in ER_A(x_0)$. Então, $z(t) = z(x(t)) = \phi(x(t)) \in z(U_0)$, para $t \geq 0$, com $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{-1}(z(t)) = \phi^{-1}(0) = x_0$.

Solução:

a.

• **Determinação do grau relativo e da realimentação desacoplante**

Temos que:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sen}(x_2) - x_1 + x_3 \\ x_4 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h(x) = x_1.$$

Assim:

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0, \\ L_f h(x) &= x_2, \\ L_g L_f h(x) &= 0, \\ L_f^2 h(x) &= -\text{sen}(x_1) - x_1 + x_3, \\ L_g L_f^2 h(x) &= [-(\cos(x_1) + 1) \quad 0 \quad 1 \quad 0]g(x) = 0, \\ L_f^3 h(x) &= -(\cos(x_1) + 1)x_2 + x_4, \\ L_g L_f^3 h(x) &= [x_2 \text{sen}(x_1) \quad -(\cos(x_1) + 1) \quad 0 \quad 1]g(x) = 1. \end{aligned}$$

Logo, o sistema admite grau relativo $\rho = n = 4$ em $U_0 = \mathbb{R}^4$, com:

$$\begin{aligned} a(x) &= L_f^4 h(x) = x_2^2 \text{sen}(x_1) + (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) + \text{sen}(x_1) + 2x_1 - 2x_3, \\ A(x) &= L_g L_f^3 h(x) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a seguinte realimentação desacoplante

$$\begin{aligned} u &= A^{-1}(x)(-a(x) + v) = \frac{1}{L_g L_f^3 h(x)}(-L_f^3 h(x) + v) \\ &= -(x_2^2 + 1) \text{sen}(x_1) - (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) - 2x_1 + 2x_3 + v, \end{aligned}$$

a qual está definida em $U_0 = \mathbb{R}^4$, assegura que

$$\boxed{y^{(4)} = v}.$$

• **Mudança de coordenadas**

Considere

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1, \\ z_2 &= y^{(1)} = L_f h(x) = x_2, \\ z_3 &= y^{(2)} = L_f^2 h(x) = -\text{sen}x_1 - x_1 + x_3, \\ z_4 &= y^{(3)} = L_f^3 h(x) = -(\cos(x_1) + 1)x_2 + x_4. \end{aligned}$$

Temos que a aplicação $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = z(x) = \phi(x) \in \mathbb{R}^4$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^4$. Como $A(x) = 1 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^4$, concluímos (pelo Lema acima) que

$$\det\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x)\right) \neq 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^4.$$

Desse modo, para assegurarmos que $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é de fato uma mudança de coordenadas **global**, basta mostrarmos que $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é **bijetiva** (veja a **Obs 1** após o Teorema da Função Inversa acima).

– **Injetividade**

$$z_1 = x_1 \Rightarrow x_1 = z_1,$$

$$z_2 = x_2 \Rightarrow x_2 = z_2,$$

$$z_3 = -\text{sen}(x_1) - x_1 + x_3 \Rightarrow x_3 = z_3 + x_1 + \text{sen}(x_1) = z_3 + z_1 + \text{sen}(z_1),$$

$$z_4 = -(\cos(x_1) + 1)x_2 + x_4 \Rightarrow x_4 = z_4 + (\cos(x_1) + 1)x_2 = z_4 + (\cos(z_1) + 1)z_2.$$

Mostramos assim que a aplicação $z = \phi(x)$ é injetiva, com:

$$\phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 + z_1 + \text{sen}(z_1) \\ z_4 + (\cos(z_1) + 1)z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^4 \text{ (sem restrição!).}$$

– **Sobrejetividade**

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{-1}(z)) &= \phi\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 + z_1 + \text{sen}(z_1) \\ z_4 + (\cos(z_1) + 1)z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\text{sen}(z_1) - z_1 + z_3 + z_1 + \text{sen}(z_1) \\ -(\cos(z_1) + 1)z_2 + z_4 + (\cos(z_1) + 1)z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = z \end{aligned}$$

Logo, $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é bijetiva e, portanto, é de fato uma mudança de coordenadas **global**, com $z_0 = \phi(0) = 0$.

• **Forma canônica de Brunowsky**

Nas novas coordenadas globais $z = \phi(x)$, o sistema em malha-fechada com a realimentação desacoplante acima é dado pela forma canônica de Brunowsky:

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

$$\dot{z}_2 = z_3,$$

$$\dot{z}_3 = z_4,$$

$$\dot{z}_4 = v,$$

solucionando assim o problema de linearização exata globalmente em $U_0 = \mathbb{R}^4$, pois (veja o Teorema 2 acima): (i) a saída $y = h(x) = x_1$ admite grau relativo $\rho = n = 4$ em $U_0 = \mathbb{R}^4$; (ii) $A(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}^4$; e (iii) $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é injetiva com $z_0 = z(0) = \phi(0) = 0$.

b. Temos que

$$z_1^{(4)} = y^{(4)} = v.$$

Assim, a **realimentação estabilizante**

$$v = -k_3 z_1^{(3)} - k_2 z_1^{(2)} - k_1 z_1^{(1)} - k_0 z_1$$

assegura que

$$z_1^{(4)} + k_3 z_1^{(3)} + k_2 z_1^{(2)} + k_1 z_1^{(1)} + k_0 z_1 = 0 \quad (\text{EDO Linear Homogênea!}),$$

ou seja, o polinômio característico de malha-fechada é dado por:

$$\pi(s) = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \Rightarrow \boxed{k_3 = 4, k_2 = 6, k_1 = 4, k_0 = 1}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} v &= -4z_1^{(3)} - 6z_1^{(2)} - 4z_1^{(1)} - z_1 \\ &= -4z_4 - 6z_3 - 4z_2 - z_1 \\ &= -4[x_4 - (\cos(x_1) + 1)x_2] - 6[x_3 - x_1 - \text{sen}(x_1)] - 4x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Logo, a realimentação de estado (desacoplante e estabilizante)

$$\begin{aligned} u &= -(x_2^2 + 1) \text{sen}(x_1) - (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) - 2x_1 + 2x_3 + v \\ &= -(x_2^2 + 1) \text{sen}(x_1) - (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) - 2x_1 + 2x_3 \\ &\quad - 4[x_4 - (\cos(x_1) + 1)x_2] - 6[x_3 - x_1 - \text{sen}(x_1)] - 4x_2 - x_1, \quad x \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

assegura que a origem do sistema em malha-fechada é **globalmente** assintoticamente estável, pois (veja o Teorema 4 acima): (i) $f(0) = 0$ e $h(0) = 0$; (ii) a saída $y = h(x) = x_1$ admite grau relativo $\rho = n = 4$ em $U_0 = \mathbb{R}^4$; (iii) $A(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}^4$; e (iv) $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é injetiva com $z_0 = z(0) = \phi(0) = 0$.

c. Relembre que a realimentação desacoplante assegura que

$$y^{(4)} = v.$$

Considere o erro de rastreamento

$$e = y - \bar{y}.$$

Então, a seguinte realimentação estabilizante

$$v = \bar{y}^{(4)} - k_3 e^{(3)} - k_2 e^{(2)} - k_1 e^{(1)} - k_0 e, \quad \text{com } k_3 = 4, k_2 = 6, k_1 = 4, k_0 = 1,$$

garante que

$$e^{(4)} + k_3 e^{(3)} + k_2 e^{(2)} + k_1 e^{(1)} + k_0 e = 0 \quad (\text{EDO Linear Homogênea!}),$$

com

$$\pi(s) = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s + 1)^4.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= 1, \\ \bar{y}^{(1)}(t) &= \bar{y}^{(2)}(t) = \bar{y}^{(3)}(t) = \bar{y}^{(4)}(t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

e lembre que

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ y^{(1)} &= L_f h(x) = x_2, \\ y^{(2)} &= L_f^2 h(x) = -\text{sen } x_1 - x_1 + x_3, \\ y^{(3)} &= L_f^3 h(x) = -(\cos(x_1) + 1)x_2 + x_4, \end{aligned}$$

Obtemos então que:

$$\begin{aligned} v &= \bar{y}^{(4)} - k_3 e^{(3)} - k_2 e^{(2)} - k_1 e^{(1)} - k_0 e \\ &= \bar{y}^{(4)} - k_3 [y^{(3)} - \bar{y}^{(3)}] - k_2 [y^{(2)} - \bar{y}^{(2)}] - k_1 [y^{(1)} - \bar{y}^{(1)}] - k_0 [y - \bar{y}] \\ &= -4[x_4 - (\cos(x_1) + 1)x_2] - 6[x_3 - x_1 - \text{sen}(x_1)] - 4x_2 - [x_1 - 1]. \end{aligned}$$

Logo, a realimentação de estado (desacoplante + estabilizante)

$$\begin{aligned} u &= -(x_2^2 + 1) \text{sen}(x_1) - (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) - 2x_1 + 2x_3 + v \\ &= -(x_2^2 + 1) \text{sen}(x_1) - (\text{sen}(x_1) + x_1 - x_3) \cos(x_1) - 2x_1 + 2x_3 \\ &\quad - 4[x_4 - (\cos(x_1) + 1)x_2] - 6[x_3 - x_1 - \text{sen}(x_1)] - 4x_2 - [x_1 - 1], \quad x \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

assegura convergência assintótica **global** do erro de rastreamento para zero (ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$ para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^4$), pois (veja o Teorema 3 da Seção 8.2.2): (i) a saída $y = h(x) = x_1$ admite grau relativo $\rho = n = 4$ em $U_0 = \mathbb{R}^4$; (ii) $A(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}^4$; e (iii) $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é injetiva. Além disso, como $z: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é bijetiva e, para $t \geq 0$, $\bar{y}(t) = 1$, $\bar{y}^{(1)}(t) = \bar{y}^{(2)}(t) = \bar{y}^{(3)}(t) = \bar{y}^{(4)}(t) = 0$ são limitadas, concluimos que as variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, $t \geq 0$, são limitadas.

8.4.2 Linearização Exata e Flatness

O teorema abaixo estabelece que todo sistema linearizável por uma realimentação de estado estática regular é flat. No entanto, a recíproca é falsa: existem sistemas flat que

não são linearizáveis por realimentação estática regular da forma (8.3). É possível provar que todo sistema flat é linearizável por uma realimentação dinâmica da forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \alpha(x, \xi, v) \in \mathbb{R}^k, \\ u &= \beta(x, \xi, v) \in \mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é nova entrada [1], [6]. O problema de mostrar que todo sistema que é linearizável por realimentação dinâmica é flat ainda é um problema aberto na Teoria de Controle.

Teorema: Considere o sistema (8.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $x_0 \in V$. Se o problema de linearização exata é localmente solúvel em x_0 , então (8.1) é flat.

Prova: De acordo com a demonstração do Teorema 1, temos que a expressão de (8.1) nas coordenadas locais (8.28)

$$z = \phi(x) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \in \mathbb{R}^n \quad (8.36)$$

e com a realimentação desacoplante (8.8)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (8.37)$$

as quais são definidas em uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 , está na forma canônica de Brunowsky (8.32) com (8.31). Em particular,

$$x = \phi^{-1}(z) = \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \quad (8.38)$$

e

$$v = (y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_m^{(\rho_m)}). \quad (8.39)$$

Assim, x pode ser escrito como função de y e de suas derivadas até uma ordem finita $\gamma = \max\{\rho_1 - 1, \dots, \rho_m - 1\}$. E, a partir de (8.37)–(8.39), concluímos que

$$u = \alpha(\mathcal{A}(z)) + \beta(\mathcal{A}(z))v = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)}),$$

onde $\delta = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$.

9 Método Direto de Lyapunov

Neste capítulo, estudaremos o Método Direto de Lyapunov, que estabelece condições suficientes para determinarmos o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear: estável, assintoticamente estável e globalmente assintoticamente estável. Ao contrário do Método Indireto de Lyapunov visto no Capítulo 3, que se baseia no sistema linearizado (e tem a restrição de que todos os polos do sistema linearizado estejam fora do eixo imaginário), o Método Direto de Lyapunov leva em conta o sistema não-linear por completo através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia.

Começaremos este capítulo analisando como que a variação da energia total do pêndulo simples ao longo das soluções permite caracterizar o tipo de estabilidade da origem. Este exemplo motivará a apresentação do Método Direto de Lyapunov na sequência. Veremos também como esse método é aplicado no projeto de controladores.

Motivação: Considere novamente a equação de estado de um pêndulo simples (não-controlado):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2,\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado. Relembre que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do pêndulo. A energia total $E(x)$ do pêndulo no ponto $x = (x_1, x_2)$, com relação ao referencial $E(0) = 0$, é a soma da energia potencial com a energia cinética, ou seja:

$$E(x) = \int_0^{x_1} \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} x_2^2 = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2 \geq 0.$$

Então, ao longo das soluções $x(t)$ do sistema, temos que:

$$E(x(t)) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1(t))] + \frac{1}{2} x_2^2(t).$$

Primeiramente, considere que $k = 0$ (sem atrito). Então:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E(x(t)) &= \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t)) \dot{x}_1(t) + x_2(t) \dot{x}_2(t) \\ &= \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t)) x_2(t) - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t)) x_2(t) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$E(x(t)) = E(x(0)) = c, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Isto significa que a energia total é conservada ao longo das soluções do sistema. Logo, para $x(0) \cong 0$, temos que $x(t) \cong 0$ para $t \geq 0$ e, assim, chegamos novamente à conclusão de que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável na ausência de atrito.

Agora, considere que $k > 0$ (com atrito). Suponha que $x_2(0) \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t)) &= \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t))x_2(t) - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1(t))x_2(t) - \frac{k}{m}x_2^2(t) \\ &= -\frac{k}{m}x_2^2(t) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $E(x(t_2)) < E(x(t_1))$ sempre que $t_2 > t_1$. Isto significa que a energia total é dissipada ao longo das soluções do sistema. Logo, se $E(x(t))$ tender para zero à medida que $t \rightarrow \infty$, então $x(t)$ tenderá para a origem quando $t \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, concluiremos que a origem é assintoticamente estável. Portanto, percebemos que a análise da derivada de $E(x(t))$ (energia total ao longo das soluções do sistema) permite determinar o tipo de estabilidade da origem. Em 1892, Lyapunov mostrou como determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia. Isto é o que veremos na sequência.

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos considerar sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{9.1}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f = (f_1, \dots, f_n): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (continuamente diferenciável). Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, i.e. $f(x^e) = 0$. Sem perda de generalidade, sempre podemos considerar que $x^e = 0$ pois, fazendo a translação $z = x - x^e$ (mudança de coordenadas), temos que

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x^e) \triangleq g(z), \tag{9.2}$$

com $g(0) = f(x^e) = 0$, ou seja, a **origem** $z^e = 0$ é um ponto de equilíbrio de (9.2). Temos então que x^e um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (9.1) se e somente se $z^e = 0$ é um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (9.2).

Por simplicidade, de agora em diante vamos sempre supor que a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio de (9.1).

Exemplo: Considere o pêndulo simples com atrito (mas sem controle):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m}x_2 = f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$, $k > 0$, e o ponto de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\pi, 0)$ **fora da origem**. Para a translação

$$z = x - x^e,$$

temos que $x = z + x^e$ com

$$x_1 = z_1 + x_1^e = z_1 + \pi, \quad x_2 = z_2 + x_2^e = z_2,$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = z_2, \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(z_1 + \pi) - \frac{k}{m} z_2. \end{aligned}$$

Note que a **origem** $z^e = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio, em conformidade com a discussão acima.

Seja $V: D_v \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $V(0) = 0$, onde $D_v \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto contendo a origem $x = 0$. Considere $W \subset D_v$ com $x = 0 \in W$. Temos então a seguinte classificação da função V :

1. V é **definida positiva** em W se $V(x) > 0$ para todo $x \in W$ com $x \neq 0$;
2. V é **semidefinida positiva** em W se $V(x) \geq 0$ para todo $x \in W$;
3. V é **definida negativa** em W se $V(x) < 0$ para todo $x \in W$ com $x \neq 0$, ou seja, se $-V$ é definida positiva em W ;
4. V é **semidefinida negativa** em W se $V(x) \leq 0$ para todo $x \in W$, ou seja, se $-V$ é semidefinida positiva em W .

Obs: Considere que $W = D_v = \mathbb{R}^n$ e $V(x) = x'Px$, para $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$, onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz **simétrica**. Concluimos então pelos resultados apresentados no Lab 10 que:

1. V é definida positiva $\Leftrightarrow P > 0 \Leftrightarrow$ todos os autovalores de P são positivos;
2. V é semidefinida positiva $\Leftrightarrow P \geq 0 \Leftrightarrow$ todos os autovalores de P são não-negativos;
3. V é definida negativa $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow$ todos os autovalores de P são negativos;
4. V é semidefinida negativa $\Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow$ todos os autovalores de P são não-positivos.

Agora, seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (9.1). Considere que $V: D_v \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável, onde $D_v \subset D$ é uma vizinhança aberta de $x^e = 0$. Definimos a **derivada** $\dot{V}: D_v \rightarrow \mathbb{R}$ de V (**ao longo das soluções de (9.1)**) por

$$\dot{V}(x) \triangleq L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x), \quad x \in D_v.$$

Note que $\dot{V}(0) = 0$ pois $f(0) = 0$. Pela regra da cadeia, temos que:

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t, x)) \right|_{t=0}, \quad x \in D_v,$$

onde $\phi(t, x)$ denota a solução do sistema (9.1) no instante t para a condição inicial x em $t_0 = 0$.

Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (9.1). Considere que $V: D_v \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, onde $D_v \subset D$ é uma vizinhança aberta de $x^e = 0$. Temos que:

1. Se V é **definida positiva** em D_v (i.e. $V(x) > 0$ para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$) e \dot{V} é **semidefinida negativa** em D_v (i.e. $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in D_v$), então $x^e = 0$ é **estável**.
2. Se V é **definida positiva** em D_v (i.e. $V(x) > 0$ para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$) e \dot{V} é **definida negativa** em D_v (i.e. $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$), então $x^e = 0$ é **(localmente) assintoticamente estável**.

Dizemos que V é uma **função de Lyapunov** para o sistema (9.1) quando V satisfaz as condições de um dos 2 casos acima.

Ideia da demonstração da estabilidade assintótica: Seja $x(0) \neq 0$. Então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

pois $x^e = 0$ é ponto de equilíbrio e, assim, $x(t)$ nunca poderá atingir $x^e = 0$. Mas, $V(x(t)) \geq 0$, $t \geq 0$. Logo, $V(x(t))$ é uma função decrescente e limitada inferiormente por zero. Desse modo, $V(x(t)) < V(x(0))$ e:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a \geq 0.$$

Pode-se então mostrar que, para $x(0)$ próximo o suficiente de $x^e = 0$, o limite acima implica que¹

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0,$$

que por sua vez assegura que (pois $\dot{V}(0) = 0$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Exemplo 1: Voltamos ao pêndulo simples **sem atrito** (e sem controle) visto no início deste capítulo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) = f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

¹ Cuidado! Isto em geral não é verdade. Por exemplo, para $f(t) = e^{-t} \text{sen}(e^t)$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ mas $\dot{f}(t)$ é **ilimitada!**

Note que $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ e que V é definida positiva no conjunto aberto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. Temos:

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) x_2 - \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) x_2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, como V é definida positiva e \dot{V} é semidefinida negativa em D_v , concluímos pelo Teorema de Lyapunov que $x^e = 0$ é estável. No entanto, a origem não é assintoticamente estável. De fato, para qualquer condição inicial $x(0)$, temos que a solução $x(t)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

ou seja, $V(x(t)) = V(x(0))$ para $t \geq 0$. Assim, caso $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ para alguma condição inicial $x(0)$ com $x_2(0) \neq 0$, então teríamos pela continuidade de V que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V(0) = 0,$$

o que contradiz $V(x(t)) = V(x(0))$ para todo $t \geq 0$.

Exemplo 2: Agora, considere o pêndulo simples **com atrito** (mas sem controle):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$, $k > 0$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) x_2 - \frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) x_2 - \frac{k}{m} x_2^2 \\ &= -\frac{k}{m} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Temos então que $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ e V é definida positiva no aberto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. No entanto, \dot{V} é semidefinida negativa em D_v : $\dot{V}(x) = 0$ para $x_2 = 0$ e qualquer $-\pi < x_1 < \pi$. Portanto, o Teorema de Lyapunov nos permite apenas concluir que $x^e = 0$ é estável. Entretanto, sabemos que $x^e = 0$ é assintoticamente estável na presença de atrito: a função da energia total escolhida não conseguiu mostrar esse fato. No entanto, ao escolhermos

$$\tilde{V}(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x' P x = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x' \underbrace{\begin{bmatrix} k^2/2m^2 & k/2m \\ k/2m & 1 \end{bmatrix}}_{=P>0} x,$$

obtemos que

$$\dot{\tilde{V}}(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{\ell} \frac{k}{m} x_1 \text{sen}(x_1) - \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_2^2.$$

Logo, \tilde{V} é definida positiva e $\dot{\tilde{V}}$ é definida negativa em $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$ e, assim, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que $x^e = 0$ é de fato assintoticamente estável.

Obs: Não há nenhum método sistemático para se encontrar funções de Lyapunov para um sistema. No caso de sistemas elétricos e mecânicos, energia total do sistema é a primeira escolha mais natural como função de Lyapunov. Mas, no caso geral, a escolha se dá por tentativa e erro. Pelo exemplo cima, percebemos que o Teorema de Lyapunov fornece apenas condições **suficientes** de estabilidade. A origem $x^e = 0$ pode ainda ser estável ou assintoticamente estável apesar da função $V(x)$ escolhida não satisfazer as condições do teorema. Em tal caso, devemos procurar por outra função $\tilde{V}(x)$ mais adequada ou utilizar outras técnicas de análise de estabilidade.

Exemplo 3: Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. A linearização na origem é dada por:

$$A = \left[\begin{array}{cc} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{array} \right] \Big|_{x=0} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Big|_{x=0} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j.$$

Logo, nada podemos concluir sobre a estabilidade da origem pelo Método Indireto de Lyapunov. Vamos mostrar que a origem é assintoticamente estável pelo Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov). Escolhemos:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(note que $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$). Logo:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Desse modo, vemos que V é definida positiva e \dot{V} é definida negativa em \mathbb{R}^2 . Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável (mostraremos mais adiante que a estabilidade assintótica é na verdade global).

Proposição (Estimativa da Região de Atração): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (9.1) com $D = \mathbb{R}^n$. Considere que $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, e que D_v é uma vizinhança aberta da origem $x^e = 0$ tal que:

1. V é definida positiva em D_v e \dot{V} é definida negativa em D_v , ou seja: $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$;
2. O conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < c\}$$

é limitado e está contido em D_v , onde $c > 0$.

Então, $x^e = 0$ é assintoticamente estável e

$$\Omega_c \subset R_A(0),$$

onde $R_A(0)$ é a região de atração do ponto de equilíbrio $x^e = 0$.

Exemplo 4: Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2),\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(note que $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$). Logo:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Desse modo, vemos que V é definida positiva e \dot{V} é definida negativa em $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável. Além disso, para $c = 2$, temos que

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2\} = D_v$$

é limitado, pois $\|x\| = \sqrt{V(x)} < \sqrt{2}$ para todo $x \in \Omega_c = D_v$. Logo, a proposição anterior determina que $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\} \subset R_A(0)$ é uma estimativa da região de atração da origem.

Teorema de Lyapunov (Estabilidade Assintótica Global): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (9.1) com $D = \mathbb{R}^n$. Considere que $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ tal que:

- V é definida positiva em \mathbb{R}^n e \dot{V} é definida negativa em \mathbb{R}^n , ou seja: $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$;
- V é **radialmente ilimitada**, ou seja:²

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

Então, a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável**.

Prova: Seja $x(0) \in \mathbb{R}^n$ uma condição inicial arbitrária com $x(0) \neq 0$. Tome $c = V(x(0)) > 0$. Portanto, existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \leq c \Rightarrow \|x\| \leq r$. Desse modo,

² Temos que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ significa que: para todo $c > 0$ existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow V(x) > c$.

$\Omega_c \subset B_r(0)$, ou seja, Ω_c é um conjunto limitado. Logo, utilizando a proposição acima com $D_v = \mathbb{R}^n$, concluímos que $x(0) \in \Omega_c \subset R_A(0)$.

Exemplo 5: Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3.\end{aligned}$$

No Exemplo 3, mostramos que $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ é tal que V é definida positiva e \dot{V} é definida negativa em \mathbb{R}^2 . Como V é radialmente ilimitada, ou seja, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, concluímos que a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema.

Exemplo 6 (Projeto de Controladores Estabilizantes): Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_1, x_2) + u,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle, e $\phi, \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 com $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$. Note que $x^e = (0, 0)$, $u^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema. O objetivo é projetar uma realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1, x_2),$$

onde $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $\alpha(0, 0) = 0$, de modo que $x^e = 0$ seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_1, x_2) + \alpha(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Escolhendo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

temos que $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, V é definida positiva em \mathbb{R}^2 e V é radialmente ilimitada. Logo, devemos tentar encontrar $u = \alpha(x_1, x_2)$ de modo a impor que \dot{V} seja definida negativa em \mathbb{R}^2 , ou seja:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1[-x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2)] + x_2[\psi(x_1, x_2) + u] \\ &= -x_1^4 + x_1x_2\phi(x_1, x_2) + x_2\psi(x_1, x_2) + x_2\alpha(x_1, x_2) < 0, \quad x \neq 0.\end{aligned}$$

A escolha de

$$u = \alpha(x_1, x_2) = -x_2 - x_1\phi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)$$

assegura que $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $\alpha(0, 0) = 0$ e que

$$\dot{V}(x) = -x_1^4 - x_2^2 < 0, \quad x \neq 0,$$

ou seja, \dot{V} é definida negativa para o **sistema em malha-fechada**. Concluimos assim que a realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1, x_2) = -x_2 - x_1 \phi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)$$

garante que a origem $x^e = 0$ do sistema em malha-fechada é **globalmente assintoticamente estável**.

Obs: Seja $V(x) = x'Px$, para $x \in \mathbb{R}^n$, onde $P > 0$. Pode-se mostrar que:

$$\|x\|^2 \lambda_{\min}(P) \leq x'Px \leq \|x\|^2 \lambda_{\max}(P),$$

onde $\lambda_{\min}(P) > 0$ e $\lambda_{\max}(P) > 0$ são os autovalores mínimo e máximo de P , respectivamente. Portanto, V é definida positiva em \mathbb{R}^n e radialmente ilimitada. Para o sistema $\dot{x} = f(x)$, temos que

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = f(x)'Px + x'Pf(x).$$

Em particular, quando $\dot{x} = f(x) = Ax$ (sistema linear), $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\dot{V}(x) = (Ax)'Px + x'PAx = x'A'Px + x'PAx = x'(A'P + PA)x.$$

Desse modo, se $Q = A'P + PA < 0$, então $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável (e logo A possui todos os polos no SPE!).

Relembre que, no Exemplo 2 acima do pêndulo simples **com** atrito, ao utilizarmos a energia total

$$V(x) = \frac{g}{\ell}[1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

obtivemos que

$$\dot{V}(x) = -\frac{k}{m}x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

com V definida positiva e \dot{V} **semidefinida** negativa no conjunto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. Logo, o Teorema de Lyapunov permite concluir apenas que a origem $x = 0$ é estável, quando na verdade sabemos que a mesma é **assintoticamente** estável. O próximo resultado estabelece condições que asseguram estabilidade assintótica quando \dot{V} é semidefinida negativa.

Teorema de LaSalle: Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (9.1). Considere que $V: D_v \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, onde $D_v \subset D$ é uma vizinhança aberta de $x^e = 0$. Suponha que V é definida positiva e \dot{V} é semidefinida negativa em D_v . Seja $S = \{x \in D_v \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Temos que:

1. Se

$$x(t) \in S \text{ para } t \geq 0 \Rightarrow x(t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \quad (9.3)$$

onde $x(t)$, $t \geq 0$, é uma dada solução de (9.1), então $x^e = 0$ é assintoticamente estável. Além disso, se a condição (9.3) acima é satisfeita e o conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < c\}$$

é limitado e está contido em S , onde $c > 0$, então

$$\Omega_c \subset R_A(0).$$

($R_A(0)$ é a região de atração do ponto de equilíbrio $x^e = 0$).

2. Se $D = D_v = \mathbb{R}^n$, V é radialmente ilimitada e

$$x(t) \in S \text{ para } t \geq 0 \Rightarrow x(t) = 0 \text{ para } t \geq 0,$$

então $x^e = 0$ é **globalmente** assintoticamente estável.

Exemplo 7: Considere novamente o pêndulo simples **com** atrito ($k > 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

No Exemplo 2, utilizamos a energia total

$$V(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

e obtivemos que

$$\dot{V}(x) = -\frac{k}{m} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

com V definida positiva e \dot{V} **semidefinida** negativa no conjunto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. Vamos agora aplicar o Teorema de LaSalle para mostrar que a energia total $V(x)$ permite de fato concluir que $x^e = 0$ é assintoticamente estável. Seja $S = \{x \in D_v \mid \dot{V}(x) = 0\}$, e suponha que $x(t) \in S$, para $t \geq 0$, onde $x(t)$ é uma solução arbitrária do sistema. Logo, $x(t) \in D_v$ para $t \geq 0$ e $\dot{V}(x(t)) \equiv 0$ (i.e. $\dot{V}(x(t)) = 0$ para $t \geq 0$). Portanto:

$$\dot{V}(x(t)) = -\frac{k}{m} x_2^2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \text{sen}(x_1(t)) \equiv 0.$$

Mas, $x(t) \in D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$ e, assim, $-\pi < x_1(t) < \pi$, para $t \geq 0$. Desse modo,

$$\text{sen}(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0.$$

Mostramos assim que:

$$x(t) \in S \text{ para } t \geq 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

Concluimos então pelo Teorema de LaSalle que $x^e = 0$ é de fato assintoticamente estável (e utilizamos a energia total $V(x)$ para esse fim!).

10 Controle Ótimo: Regulador Quadrático Linear – LQR (Lab 10)

Objetivos: Vamos tratar do problema de como escolher os polos desejados de malha-fechada de um sistema linear a fim de se obter um bom compromisso entre desempenho de malha-fechada e esforço de controle. Veremos que tal problema pode ser abordado por controle ótimo, o qual consiste em minimizar uma função custo quadrática no estado e no controle. Em seguida, mostraremos que o controlador ótimo é de fato linear em relação ao estado e resulta da solução da equação algébrica Riccati. Esse controlador é denominado de regulador quadrático linear.

10.1 Formas Quadráticas

Dizemos que uma função real $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma quadrática** quando $V(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio homogêneo de segundo grau em n variáveis reais com coeficientes reais, ou seja:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j = p_{11} x_1 + \dots + p_{nn} x_n + \sum_{i < j} (p_{ij} + p_{ji}) x_i x_j,$$

onde $p_{ij} \in \mathbb{R}$. Note que, definindo a matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos escrever

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j = x' P x$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}}_{=x'} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x \in \mathbb{R}^n},$$

ou seja, a forma quadrática $V(x_1, \dots, x_n)$ fica completamente determinada pela matriz $P = (p_{ij})$.

Reciprocamente, toda matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina a seguinte forma quadrática

$$V(x_1, \dots, x_n) = x' P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j.$$

Sempre podemos considerar que uma forma quadrática $V(x_1, \dots, x_n)$ é determinada por uma matriz **simétrica** \bar{P} , ou seja, $V(x_1, \dots, x_n) = x' \bar{P} x$ com $\bar{P} = \bar{P}'$. De fato, note que podemos escrever $V(x_1, \dots, x_n)$ como

$$V(x_1, \dots, x_n) = p_{11} x_1 + \dots + p_{nn} x_n + \sum_{i < j} \underbrace{2\bar{p}_{ij}}_{=p_{ij}+p_{ji}} x_i x_j.$$

Logo, definindo a matriz simétrica

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \bar{p}_{12} & \cdots & \bar{p}_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & \bar{p}_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

temos que $V(x_1, \dots, x_n) = x' \bar{P} x$.

Obs: Quando $P = \text{diag}(p_{11}, \dots, p_{nn})$ é uma matriz diagonal, então temos $V(x) = x' P x = p_{11}x_1^2 + \cdots + p_{nn}x_n^2$. Em particular, se $P = I$, então $V(x) = x' P x = x' x = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|^2$.

Exemplo: Considere a seguinte forma quadrática em 2 variáveis

$$V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2.$$

Note que

$$V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 = 3x_1^2 + 5x_2^2 + \underbrace{2 \times 4x_1x_2}_{=8}.$$

Assim, definindo a matriz simétrica

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} x' P x &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \\ &= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 = V(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, i.e. $P = P'$, e considere a forma quadrática associada

$$V(x) = x' P x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Note que $V(0) = 0$. Temos então a seguinte classificação:

- Dizemos que P é **semidefinida positiva** quando $V(x) = x' P x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, escrevemos $P \geq 0$.
- Dizemos que P é **definida positiva** quando $V(x) = x' P x > 0$, para todo $x \neq 0$. Neste caso, escrevemos $P > 0$.
- Dizemos que P é **semidefinida negativa** quando $V(x) = x' P x \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, escrevemos $P \leq 0$.
- Dizemos que P é **definida negativa** quando $V(x) = x' P x < 0$, para todo $x \neq 0$. Neste caso, escrevemos $P < 0$.

- Dizemos que P é **indefinida** se existirem $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $V(x) > 0$ e $V(y) < 0$.

O próximo resultado estabelece um critério simples para classificarmos uma matriz simétrica.

Proposição 1: Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então, os autovalores de P são números reais. Além disso:

- $P \geq 0$ se e somente se todos os autovalores de P são não-negativos;
- $P > 0$ se e somente se todos os autovalores de P são positivos;
- $P \leq 0$ se e somente se todos os autovalores de P são não-positivos;
- $P < 0$ se e somente se todos os autovalores de P são negativos.

Relembramos as seguintes propriedades da matriz transposta:

- $(M')' = M$;
- $(M + N)' = M' + N'$;
- $(MN)' = N'M'$;
- $(M^{-1})' = (M')^{-1}$, onde M é invertível.

Proposição 2 (Teorema da Decomposição Espectral): Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz invertível $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$P = V' \Delta V,$$

onde $V' = V^{-1}$ e $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal em que os elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de sua diagonal principal são os autovalores (reais) de P .

Obs: Seja $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então, $P = D'D \geq 0$. De fato, P é simétrica, pois $P' = (D'D)' = D'(D')' = D'D = P$. Além disso, $P \geq 0$, pois

$$V(x) = x'Px = x'D'Dx = (Dx)' \underbrace{Dx}_{=y} = y'y = \|y\|^2 \geq 0.$$

Assim, $P = D'D \geq 0$, para qualquer matriz $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O próximo resultado estabelece que a recíproca é verdadeira.

Proposição 3: Seja $P \geq 0$ uma matriz (simétrica) em $\mathbb{R}^{n \times n}$ com $\text{posto}(P) = q \leq n$. Então, existe uma matriz $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$ que decompõe P da seguinte forma:

$$P = D'D.$$

Prova: Suponha que $P \geq 0$. Pela proposição acima, temos que existe uma matriz invertível V tal que

$$P = V' \Delta V,$$

onde $V' = V^{-1}$, $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ são os autovalores de P . Como $\text{posto}(P) = q \leq n$, temos que $\lambda_1, \dots, \lambda_q > 0$ e $\lambda_{q+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Assim, basta tomarmos

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_q} \end{bmatrix}_{q \times n} V.$$

10.2 Regulador Quadrático Linear

Motivação: Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

e suponha que (A, B) é controlável. Podemos então posicionar arbitrariamente no SPE os polos de $A - BK$ (malha-fechada) pela escolha adequada da matriz de ganho na realimentação de estado $u = -Kx$. Relembre que se os polos de $A - BK$ forem relativamente rápidos, maior será a velocidade de convergência do estado para a origem $x = 0$. No entanto, teremos um custo de controle associado para pagar: maior será o esforço de controle exigido. Além disso, quando a ordem n da planta é relativamente grande, em geral não é uma tarefa fácil especificar os polos desejados de malha-fechada de modo a se obter um bom compromisso entre o desempenho do estado do sistema em malha-fechada e o esforço de controle resultante.

Seja $z: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ um sinal real. Relembre da disciplina "Sinais e Sistemas Lineares) que a energia deste sinal é dada por

$$E = \int_0^{\infty} z^2(t) dt.$$

Logo, a ideia intuitiva é que o quanto menor for a energia E , menor será o desvio de $z(t)$ em relação a zero no decorrer do tempo.

Agora, seja $u = -Kx$ uma dada realimentação para a planta acima, e considere o seguinte custo

$$J = \int_0^{\infty} \underbrace{q_1 x_1^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t)}_{=x'(t)\text{diag}(q_1, \dots, q_n)x(t)} + \underbrace{r_1 u_1^2(t) + \cdots + r_m u_m^2(t)}_{=u'(t)\text{diag}(r_1, \dots, r_m)u(t)} dt \geq 0,$$

onde $x(t)$, $t \geq 0$, é a solução do sistema em malha-fechada para uma dada condição inicial $x(0) = x_0$ e $u(t) = -Kx(t)$, $t \geq 0$, é o sinal de controle resultante. Note que J pode ser visto como uma soma ponderada entre as energias das variáveis de estado (desvios em relação a zero) com pesos $q_i \geq 0$, e as energias das variáveis de controle (esforço de controle exigido) com pesos $r_j > 0$.

Suponha que determinamos uma matriz de ganho $K = K^*$ de modo a minimizar a função custo J . Desse modo, quando os pesos q_i são relativamente grandes em relação

aos pesos r_j , estaremos penalizando mais o desvio do estado (em relação à origem $x = 0$) em comparação à penalização do esforço de controle exigido, e assim esperamos obter em malha-fechada uma dinâmica relativamente rápida para os estados, mas pagando-se por isso um maior esforço de controle. Por outro lado, quando os pesos q_i são relativamente pequenos em relação aos pesos r_j , estaremos penalizando mais o esforço de controle em comparação à penalização do desvio do estado, e então esperamos obter em malha-fechada uma dinâmica relativamente lenta para os estados, mas com um menor esforço de controle.

Na sequência, vamos formalizar as ideias acima e considerar que o custo possui a seguinte forma geral

$$J = \int_0^{\infty} x'(t)Qx(t) + u(t)'Ru(t) dt \geq 0,$$

onde $Q \geq 0$ ($Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$) e $R > 0$ ($R \in \mathbb{R}^{m \times m}$) são as matrizes de peso para o desvio do estado e para o esforço de controle, respectivamente. **Ressaltamos que as matrizes Q e R são parâmetros de projeto do controlador!** Nosso objetivo é responder as seguintes perguntas:

- A realimentação de estado $u = \phi(x)$ que minimiza J é necessariamente linear da forma $u = \phi(x) = -Kx$? Ou pode ser não-linear?
- Caso a realimentação de estado que minimiza J é linear da forma $u = -Kx$, é possível determinarmos a matriz de ganho K ? Em caso afirmativo, como? Com tal K , os polos de $A - BK$ (malha-fechada) estarão garantidamente no SPE?

Seja uma planta linear modelada por (n estados, m entradas)

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{10.1}$$

Considere o seguinte problema de estabilização: encontrar uma realimentação de estado (possivelmente não-linear) $u = \phi(x)$ de modo a estabilizar a origem $x = 0$ do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = Ax + B\phi(x).$$

Dizemos que uma realimentação de estado $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (i.e. $u = \phi(x) \in \mathbb{R}^m$, para $x \in \mathbb{R}^n$) é **admissível** quando:

- A aplicação $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua com $\phi(0) = 0$;
- Para toda condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos que o sistema em malha-fechada acima possui uma única solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Note que, se $A - BK$ possui todos os polos no SPE, então a realimentação de estado linear $u = \phi(x) = -Kx$ é admissível. Seja Φ o conjunto de todas as realimentações admissíveis ϕ .

Agora, introduzimos o **funcional custo** $J: \mathbb{R}^n \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ definido por

$$\begin{aligned} J(x_0, \phi) &= \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + \phi(x(t))' R \phi(x(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \phi \in \Phi, \end{aligned} \quad (10.2)$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, $x(t)$, $t \geq 0$, é a única solução do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado admissível $u = \phi(x)$ e condição inicial $x(0) = x_0$, e $u(t) = \phi(x(t))$, $t \geq 0$, é o sinal de controle correspondente. Dizemos que uma realimentação de estado admissível $\phi^* \in \Phi$ é **ótima** em relação ao funcional custo (10.2) quando ϕ^* minimiza (10.2) no seguinte sentido:

- $J(x_0, \phi^*) < \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- $J(x_0, \phi^*) \leq J(x_0, \phi)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \Phi$.

Teorema 1: Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então, a **equação algébrica de Riccati**

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

possui uma única solução semidefinida positiva $P^* \geq 0$, e todos os polos da matriz

$$A - BR^{-1}B'P^*$$

estão no SPE.

Obs: Suponha que $Q = D'D = E'E$, onde $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pode-se mostrar que (A, D) é detectável **se e somente se** (A, E) é detectável. Isto significa que a hipótese no teorema acima de que (A, D) é detectável independe da decomposição escolhida de Q (relembre a Proposição 3 acima).

Teorema 2 (LQR): Considere a planta (10.1) e o funcional custo (10.2). Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati acima. Então, a realimentação de estado **linear**

$$u^* = -K^*x = -\underbrace{R^{-1}B'P^*}_{=K^*}x$$

é a **única realimentação ótima** de (10.2), e os polos da matriz (sistema em malha-fechada)

$$A - BK^* = A - BR^{-1}B'P^*$$

estão no SPE. Denominamos $u^* = -K^*x$ de **regulador quadrático linear** (LQR – Linear Quadratic Regulator).

Prova: Seja $P = P^* \geq 0$ a solução da equação algébrica de Riccati do Teorema 1 acima, e considere a forma quadrática associada

$$V(x) = x'Px \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = (Ax + Bu)'Px + x'P(Ax + Bu) \\ &= u'B'Px + x'A'Px + x'PAx + x'PBu \\ &= x'(A'P + PA)x + x'PBu + u'B'Px. \end{aligned}$$

Completando o quadrado com $\pm u'Ru$ e utilizando a equação algébrica de Riccati, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'(A'P + PA)x + x'PBu + u'B'Px \pm u'Ru \\ &= x'(PBR^{-1}B'P - Q)x + x'PBu + u'B'Px + u'Ru - u'Ru \\ &= -x'Qx - u'Ru + x'PBR^{-1}B'Px + x'PBu + u'B'Px + u'Ru. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (R^{-1}B'Px + u)'R(R^{-1}B'Px + u) &= (u' + x'PBR^{-1})R(R^{-1}B'Px + u) \\ &= u'Ru + u'B'Px + x'PBR^{-1}B'Px + x'PBu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{V}(x) = -(x'Qx + u'Ru) + (R^{-1}B'Px + u)'R(R^{-1}B'Px + u).$$

Fixe uma condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma realimentação admissível $u = \phi(x) \in \Phi$, e seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução corresponde do sistema em malha-fechada. Então, $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} = \dot{V}(x(t)) &= -[x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] \\ &\quad + [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)], \end{aligned}$$

com $u(t) = \phi(x(t))$. Integrando ambos os lados da equação acima no intervalo de tempo $[0, T]$, temos:

$$\begin{aligned} V(x(T)) - V(x_0) &= \int_0^T \dot{V}(x(t))dt \\ &= - \int_0^T (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt \\ &\quad + \int_0^T [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)]dt. \end{aligned}$$

Agora, tomando o limite $T \rightarrow \infty$ em ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$\underbrace{V(x_\infty) - V(x_0)}_{=0} = -J(x_0, \phi) + \int_0^\infty [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)]dt,$$

ou seja (relembre que $R \geq 0$),

$$J(x_0, \phi) = V(x_0) + \underbrace{\int_0^\infty [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)]dt}_{\geq 0}.$$

Portanto, concluímos que a realimentação linear de estado

$$u^* = \phi^*(x) = -K^*x = -R^{-1}B'Px$$

é a única realimentação ótima de (10.2), com

$$J(x_0, \phi^*) = V(x_0) = x_0'Px_0$$

e os polos de $A - BK^*$ (sistema em malha-fechada) estão no SPE pelo Teorema 1 acima.

Obs 1: No Matlab, o comando `lqr` determina a matriz de ganho K^* do LQR.

Obs 2: Assuma que $Q = q\bar{Q} \geq 0$ e $R = r\bar{R} > 0$, onde $\bar{Q} \geq 0$ e $\bar{R} > 0$ são as matrizes nominais, e $q, r > 0$ são parâmetros (reais) a serem variados no projeto da realimentação LQR $u = -K^*x$. É imediato que $u = \phi^*(x)$ é uma realimentação ótima de (10.2) **se e somente se** $u = \phi^*(x)$ é uma realimentação ótima de

$$\bar{J}(x_0, \phi) = \frac{1}{q}J(x_0, \phi) = \int_0^\infty x(t)'\bar{Q}x(t) + \phi(x(t))'(r/q)\bar{R}\phi(x(t)) dt.$$

Desse modo, sempre podemos considerar que $q = 1$, ou seja, $Q = \bar{Q}$ e $R = r\bar{R}$, e assim ficamos com um único parâmetro $r > 0$ para variar no projeto da realimentação LQR $u = -K^*x$. Ressaltamos que o ganho ótimo K^* depende de \bar{Q}, \bar{R}, r , ou seja, $K^* = K^*(\bar{Q}, \bar{R}, r)$.

Obs 3: Não há na literatura uma metodologia geral para se escolher as matrizes de peso $Q \geq 0$ e $R > 0$ no LQR (parâmetros de projeto!). Apresentamos abaixo alguns métodos usuais:

1. Escolha $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$, e então varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre o desempenho do estado do sistema em malha-fechada e o esforço de controle: $x'(t)Qx(t) = \|x(t)\|^2$ e $u'(t)Ru(t) = r\|u(t)\|^2$ são os **custos instantâneos** de estado e controle, respectivamente.
2. Escolha $Q = \bar{Q} = \text{diag}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) > 0$ e $R = r\bar{R} = r \cdot \text{diag}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m) > 0$ da seguinte maneira. Suponha que $|x_i|$ não deve ultrapassar o valor $\bar{x}_i > 0$ e que $|u_j|$ não deve ultrapassar o valor $\bar{u}_j > 0$. Escolha então

$$\bar{q}_i = 1/\bar{x}_i^2, \quad \bar{r}_j = 1/\bar{u}_j^2.$$

Justificativa: no instante t em que $|x_i(t)| = \bar{x}_i$, teremos o custo instantâneo de estado $\bar{q}_i x_i(t)^2 = 1$ no funcional custo (10.2), e $r_j u_j(t)^2 = 1$ quando $|u_j(t)| = \bar{u}_j$. Em seguida, varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre desempenho e esforço de controle.

3. Escolha $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n) \geq 0$ e $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_m) > 0$ por tentativa e erro.
4. Seja $z = Dx$ uma saída (real do sistema ou virtual de desempenho) que se deseja levar para zero, onde $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Escolha $Q = D'D \geq 0$, $R = rI > 0$, e então varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre o desempenho da saída $z = Dx$ do sistema em malha-fechada ($x'Qx = \|z\|^2$) e o esforço de controle ($u'Ru = r\|u\|^2$).
5. Escolha $Q \geq 0$ e $R > 0$ como matrizes não-diagonais por tentativa e erro.

O segundo método acima é importante quando certas variáveis de estado do sistemas são de grandezas/unidades físicas distintas. Por exemplo, podemos ter que x_1 é uma distância em metros com $\bar{x}_1 = 0.05$ (5 cm), x_2 uma velocidade em rad/s com $\bar{x}_2 = 100$ e x_3 uma corrente elétrica em amperes com $\bar{x}_3 = 2$.

Obs 4: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos que $Q = \bar{Q} \geq 0$ e $R = r\bar{R}$, onde $\bar{Q} \geq 0$ e $\bar{R} > 0$ são as matrizes nominais, e $r > 0$ é um escalar real (parâmetro de projeto do LQR). Então, os polos de malha-fechada do LQR possuem o seguinte comportamento assintótico:

- Quando $r \rightarrow \infty$ (maior peso sobre o esforço de controle), temos que os polos de $A - BK^*$ (malha-fechada) se aproximam dos polos de A (malha-aberta) que estão no SPE e da reflexão em relação ao eixo imaginário dos polos de A que estão no SPD (se $s = a + jb$ com $a > 0$ é um polo de malha-aberta no SPD, então o polo de malha-fechada correspondente no SPE é $s = -a + jb$).
- Quando $r \rightarrow 0$ (maior peso sobre o desvio dos estados), temos que ρ polos de $A - BK^*$ se aproximam de localizações **finitas** no SPE (pode-se ter polos de malha-fechada relativamente lentos dependendo do sistema!), enquanto que os $n - \rho$ polos restantes tendem assintoticamente ao **infinito** formando diversas configurações Butterworth de diferentes ordens e raios.

Portanto, quando as matrizes A e B do sistema (10.1) correspondem à linearização de um sistema não-linear num ponto de equilíbrio, deve-se variar $r > 0$ (por tentativa e erro!) de modo a se buscar obter um bom compromisso entre desempenho dinâmico do sistema não-linear em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração! Ressaltamos que tal compromisso é determinado pelo polos de $A - BK^*$.

Obs 5: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos que $Q > 0$ e $R > 0$ com R diagonal. Em relação à realimentação LQR

$$u = -K^*x,$$

temos as seguintes propriedades de robustez do sistema em malha-fechada:

- Os polos de $A - BK^*$ permanecem no SPE mesmo que o ganho no laço de realimentação de cada uma das variáveis de controle u_j , $j = 1, \dots, m$, seja reduzido em até 50% ou aumentado indefinidamente (margem de ganho infinita!);
- Os polos de $A - BK^*$ permanecem no SPE mesmo que o laço de realimentação de cada uma das variáveis de controle u_j , $j = 1, \dots, m$, sofra um deslocamento de fase de até $\pm 60^\circ$ (margem de fase de pelo menos 60° !).

10.3 Procedimentos

1. Considere o sistema massa-mola do Lab 5, e repita novamente as simulações do Item 2 nos Procedimentos do Lab 5 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação.

2. Agora, encontre a matriz de ganho K_a^* (sistema aumentado) pelo LQR. Para isso, considere que $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$ (veja o primeiro método da Obs 3 acima), variando $r > 0$ como: $r = 0.001$, $r = 0.01$, $r = 0.1$, $r = 0.4$ (corresponde à matriz de ganho K_a apresentada no Item 3 dos Procedimentos do Lab 5), $r = 1$, $r = 4$, $r = 40$, $r = 400$, $r = 4000$, $r = 40000$. Verifique se as simulações estão de acordo com o esperado, comparando com o Item 1 acima e analisando o compromisso entre esforço de controle e desempenho de malha-fechada no rastreamento da referência com rejeição da perturbação. Verifique também a validade da Obs 4. Note que, para $r = 0.4$, obtivemos um melhor desempenho e um menor esforço de controle com o LQR do que com o posicionamento de polos do Item 1 acima (polos repetidos em $s = -1$)!

Conclusão: Relembre da **Obs** do Procedimento 3 do Lab 5 que a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ possui ação PID para o sistema massa-mola. Desse modo, sintonizamos um controlador com ação PID para um sistema multivariável através da variação de um único parâmetro escalar $r > 0$ do LQR!

3. Para $r = 0.4$, verifique a propriedade de robustez da margem de ganho da **Obs 5** acima.

11 Estimação Ótima e Princípio da Separação Estocástica: Filtro de Kalman e Controlador Gaussiano Quadrático Linear (LQG) (Lab 11)

Objetivos: Vamos tratar do problema de como escolher a matriz de ganho do estimador de estado de um sistema linear na presença de ruídos do processo e de medição. Veremos que tal problema pode ser abordado por estimação ótima, a qual consiste em minimizar o erro de estimação médio quadrático assintoticamente. Mostraremos que o estimador ótimo, denominado de Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente, resulta da solução da equação algébrica Riccati. Por fim, apresentaremos o princípio da separação estocástica e o controlador gaussiano quadrático linear.

11.1 Processos Estocásticos

Um **espaço de probabilidade** é uma tripla (Ω, \mathcal{F}, P) onde:

1. Ω é um conjunto, denominado de **espaço amostral**;
2. Os elementos de \mathcal{F} , denominados de **eventos**, são subconjuntos de Ω que satisfazem:
 - $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - Se $A \in \mathcal{F}$, então o complementar $A^c = (\Omega - A) \in \mathcal{F}$;
 - Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \dots \in \mathcal{F}$;
3. A **função probabilidade** $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz:
 - $P(\Omega) = 1$;
 - Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots \in \mathcal{F}$ são mutuamente disjuntos, então

$$P(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \dots) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) + \dots$$

Dizemos que uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **variável aleatória** quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{X \leq x\} \triangleq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F},$$

ou seja, o conjunto $\{X \leq x\}$ é um evento.

Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Então, a função $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é denominada de **função distribuição** de X . Dizemos que uma função $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função densidade de probabilidade** de X quando

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A **média (ou valor esperado, ou esperança)** $E[X]$ de X é o número real definido por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \in \mathbb{R}$$

(assumindo que $E[X] < \infty$). A **variância** R_X de X é o número real definido por (assumindo que $E[X^2] < \infty$)

$$R_X \triangleq E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Agora, considere que $X = (X_1, \dots, X_n)': \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **vetor aleatório**, ou seja, $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são variáveis aleatórias. Por simplicidade, escrevemos $X = (X_1, \dots, X_n)' \in \mathbb{R}^n$. A função $F_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &\triangleq P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x_1 \text{ e } X_2(\omega) \leq x_2 \text{ e } \dots \text{ e } X_n(\omega) \leq x_n\}) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, é denominada de **função distribuição** do vetor aleatório $X \in \mathbb{R}^n$. A **média** $E[X]$ de $X \in \mathbb{R}^n$ é o vetor definido como

$$E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])' \in \mathbb{R}^n$$

e a **variância** R_X de $X \in \mathbb{R}^n$ é a matriz definida por

$$R_X = ([R_X]_{ij}) = E[(X - E[X])(X - E[X])'] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Temos que $R_X \geq 0$ e

$$[R_X]_{ij} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])].$$

Sejam $X = (X_1, \dots, X_n)': \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_m)': \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ vetores aleatórios. A função $F_{X,Y}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &\triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, é denominada de **função distribuição conjunta** de X, Y . Dizemos que os vetores aleatórios $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$ são **independentes** quando

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Dizemos que $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))' \in \mathbb{R}^n$ é um **processo estocástico vetorial** quando $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório para cada $t \geq 0$. Definimos a **média** $E[X(t)]$ no instante $t \geq 0$ do processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por

$$E[X(t)] = (E[X_1(t)], \dots, E[X_n(t)])' \in \mathbb{R}^n,$$

e, para cada $t, s \geq 0$, definimos a **covariância** $R_X(t, s)$ de $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por

$$R_X(t, s) = E[(X(t) - E[X(t)])(X(s) - E[X(s)])'] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Temos que $R_X(t, s) = R_X(s, t)'$ para $t, s \geq 0$, e definimos a **variância** $Q(t)$ no instante $t \geq 0$ de $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por $Q(t) = R_X(t, t) \geq 0$.

Quando $E[X(t)] = 0$ (média nula) para todo $t \geq 0$, e

$$R_X(t, s) = V_X(s)\delta(t - s), \quad t, s \geq 0,$$

onde $V_X(s) \geq 0$ (matriz semi-definida positiva) para $s \geq 0$ e $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac, dizemos que o processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é um **ruído branco** com **intensidade** $V_X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dizemos que os processos estocásticos vetoriais $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são **independentes** quando, para cada $p, q \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_q \geq 0$, os vetores aleatórios $(X(t_1)', \dots, X(t_p)')' \in \mathbb{R}^{np}$ e $(Y(s_1)', \dots, Y(s_q)')' \in \mathbb{R}^{mq}$ são independentes.

Considere que $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são ruídos brancos com intensidades $V_X(\cdot)$ e $V_Y(\cdot)$, respectivamente. Quando

$$E[X(t)Y(s)'] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad t, s \geq 0,$$

dizemos que os ruídos brancos $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são **não-correlacionados**. Em tal caso, temos que o processo estocástico vetorial $W(\cdot) = (X(\cdot), Y(\cdot)) = (X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot), Y_1(\cdot), \dots, Y_m(\cdot))' \in \mathbb{R}^{n+m}$ é um ruído branco com intensidade $V_W(\cdot)$ dada por

$$V_W(t) = \begin{Bmatrix} V_X(t) & 0 \\ 0 & V_Y(t) \end{Bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Dizemos que o processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é **Gaussiano** quando, para cada $p \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_p \geq 0$, temos que a função distribuição conjunta dos vetores aleatórios $X(t_1), \dots, X(t_p) \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\begin{aligned} F_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(x_1, \dots, x_p) &\triangleq P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_p) \leq x_p) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_p} f_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(\xi_1, \dots, \xi_p) d\xi_1 \dots d\xi_p, \end{aligned}$$

para $x_1, \dots, x_p, \xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\int_{-\infty}^{x_i} d\xi_i \triangleq \int_{-\infty}^{x_{i,1}} \dots \int_{-\infty}^{x_{i,n}} d\xi_{i,1} \dots d\xi_{i,n}, \quad x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})', \quad \xi_i = (\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n})' \in \mathbb{R}^n,$$

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{np} \det(R)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [\xi_i - E\{X(t_i)\}]' \Lambda_{ij} [\xi_j - E\{X(t_j)\}] \right\},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_1) & R_X(t_1, t_2) & \dots & R_X(t_1, t_p) \\ R_X(t_2, t_1) & R_X(t_2, t_2) & \dots & R_X(t_2, t_p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_X(t_p, t_1) & R_X(t_p, t_2) & \dots & R_X(t_p, t_p) \end{bmatrix}_{np \times np}, \quad \Lambda = R^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1p} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{p1} & \Lambda_{p2} & \dots & \Lambda_{pp} \end{bmatrix}_{np \times np},$$

com $\Lambda_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11.2 Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Motivação: Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t), \\ y(t) &= Cx(t) + w_2(t), \end{aligned} \quad (11.1)$$

onde $w_1(t) \in \mathbb{R}^n$ é o **ruído do processo**, $w_2(t) \in \mathbb{R}^p$ é o **ruído de medição**, $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são processos estocásticos vetoriais ($t \geq 0$), e a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório. Suponha que (A, C) é observável, e considere o seguinte observador de estado linear

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t). \quad (11.2)$$

A dinâmica do erro de estimação $e = x - \hat{x}$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - LC)e(t) + w_1(t) - Lw_2(t). \end{aligned}$$

Percebemos então que a matriz de ganho L do observador afeta a dinâmica do erro de estimação $e(t)$ de 2 maneiras distintas e conflitantes:

1. Quanto mais afastados da origem estiverem os polos de $A - LC$ no SPE, mais rápida será a convergência da **resposta entrada nula** $e_{en}(t)$ para $e = 0$, ou seja, a estimação do estado será mais rápida. Em geral, quanto mais rápidos os polos de $A - LC$, maior o valor das componentes de L ;
2. A matriz de ganho L influencia diretamente na dinâmica de $e(t)$, pois L multiplica o ruído $w_2(t)$ na equação acima. Logo, L desempenha o papel de um amplificador de ruído na dinâmica de $e(t)$ e, assim, as componentes da matriz de ganho L devem ser relativamente pequenas, ou seja, os polos de $A - LC$ não devem ser rápidos demais.

Portanto, concluímos que a matriz de ganho L do observador de estado deve ser escolhida de modo a se obter um bom compromisso entre rapidez de estimação (rapidez dos polos de $A - LC$) e atenuação do ruído $w_2(t)$.

Dizemos que uma matriz de ganho L é **admissível** para o observador de estado linear (11.2) quando todos os polos de $A - LC$ estão no SPE e o **erro médio quadrático**

$$\begin{aligned} E\{e'(t)e(t)\} &= E\{[x(t) - \hat{x}(t)]'[x(t) - \hat{x}(t)]\} \\ &= E\{[x_1(t) - \hat{x}_1(t)]^2 + \dots + [x_n(t) - \hat{x}_n(t)]^2\} \\ &= E\{\|e(t)\|^2\} \end{aligned}$$

converge assintoticamente para um valor constante finito que independe de $e(0)$ (mas depende de $L!$), ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{e'(t)e(t)\} \triangleq E_L \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que uma matriz de ganho admissível L^* é **ótima** quando

$$E_{L^*} \leq E_L < \infty,$$

para toda matriz de ganho admissível L . Neste caso, denominamos (11.2) com $L = L^*$ de **estimador (ou observador) de estado linear ótimo**.

Teorema 1: Sejam A, C, V_1, V_2 matrizes dadas. Suponha que $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$, (A, C) é detectável e (A, D) é estabilizável, onde $V_1 = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então, a **equação algébrica de Riccati**

$$AP + PA' - PC'V_2^{-1}CP + V_1 = 0$$

possui uma única solução semidefinida positiva $P^* \geq 0$, e todos os polos da matriz

$$A - P^*C'V_2^{-1}C$$

estão no SPE. Além disso, se P e L são matrizes dadas tais que P é simétrica, $A - LC$ possui todos os polos no SPE e

$$(A - LC)P + P(A - LC)' + LV_2L' + V_1 = 0,$$

então $P \geq P^*$ (i.e. $P - P^* \geq 0$).

Teorema 2 (Filtro de Kalman): Considere a planta (11.1) com uma dada entrada **determinística** $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. Suponha que $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1(t)$ e $w_2(t)$, para todo $t \geq 0$. Assuma que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati acima. Então,

$$L^* = P^*C'V_2^{-1}$$

é uma matriz de ganho **ótima** para o estimador de estado linear (11.2) e os polos de

$$A - L^*C = A - P^*C'V_2^{-1}C$$

estão no SPE, com

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - L^*C)\bar{e}(t), \quad \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0),$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ a média do erro de estimação no instante $t \geq 0$. Além disso¹, $E_L^* = \text{tr}[P^*]$ (traço). Denominamos o **estimador de estado linear ótimo** (11.2) com $L = L^* = P^*C'V_2^{-1}$ de **Filtro de Kalman Preditivo em regime permanente**. Vamos, por enquanto, denomina-lo simplesmente de Filtro de Kalman.

Prova: Considere que as hipóteses do teorema foram atendidas. Seja L uma matriz de ganho arbitrária para o observador de estado linear (11.2) tal que os polos de $A - LC$ estejam no SPE. Logo,

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + w_1(t) - Lw_2(t), \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0),$$

onde $e = x - \hat{x}$ é o erro de estimação. Sejam $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ e $Q(t) = E\{[e(t) - \bar{e}(t)][e(t) - \bar{e}(t)]'\}$ a média e a variância de $e(\cdot)$ no instante $t \geq 0$, respectivamente. Desse modo,

$$E\{e(t)'e(t)\} = \bar{e}(t)'\bar{e}(t) + \text{tr}[Q(t)], \quad t \geq 0$$

Pode-se mostrar que:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - LC)\bar{e}(t), \quad \text{com } \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = P,$$

onde \bar{x}_0 é a média de $x(0)$ e $P \geq 0$ é a única solução de

$$(A - LC)P + P(A - LC)' + LV_2L' + V_1 = 0. \quad (11.3)$$

Em particular,

$$E_L \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e(t)'e(t)\} = \overbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t)'\bar{e}(t)}^{=0} + \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}[Q(t)] = \text{tr}[P].$$

Agora, seja $P^* \geq 0$ a única solução da equação algébrica de Riccati do Teorema 1 acima, e defina

$$L^* = P^*C'V_2^{-1}.$$

Temos que os polos de

$$A - L^*C = A - P^*C'V_2^{-1}C$$

estão no SPE. Como

$$(L^*)' = (V_2^{-1})'(C')'(P^*)' = (V_2')^{-1}CP^* = V_2^{-1}CP^*,$$

¹ Relembre que $\text{tr}(M)$ é igual à soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada M .

obtemos pela equação algébrica de Riccati que:

$$\begin{aligned}
 & (A - L^*C)P^* + P^*(A - L^*C)' + L^*V_2(L^*)' + V_1 \\
 & = AP^* - L^*CP^* + P^*A' - P^*C'(L^*)' + L^*V_2(L^*)' + V_1 \\
 & = AP^* + P^*A' - P^*C'V_2^{-1}CP^* - P^*C'V_2^{-1}CP^* + P^*C'V_2^{-1}V_2V_2^{-1}CP^* + V_1 \\
 & = AP^* + P^*A' - P^*C'V_2^{-1}CP^* + V_1 = 0
 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que (11.3) é satisfeita para $L = L^*$ e $P = P^*$.

Portanto, quando $L = L^*$, concluímos que

$$E_{L^*} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e'(t)e(t)\} = \text{tr}[P^*].$$

O Teorema 1 estabelece ainda que

$$P^* \leq P.$$

Desse modo,

$$E_{L^*} = \text{tr}[P^*] \leq \text{tr}[P] = E_L.$$

Isto significa que L^* é uma matriz de ganho **ótimo** para estimador de estado linear (11.2), o que encerra a demonstração.

Obs 1: No Matlab, o comando `kalman` determina a matriz de ganho L^* do Filtro de Kalman. Alternativamente, pode-se utilizar dualidade e o comando `lqr`, ou seja, `Lfk = lqr(A', C', V1, V2)'`.

Obs 2: Nas hipóteses do Teorema 2 acima, assuma adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Então, pode-se mostrar que o Filtro de Kalman é um estimador de estado **ótimo** mesmo dentre estimadores **não-lineares** que determinam uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ a partir de $y(\tau), u(\tau)$, para $0 \leq \tau \leq t$.

Obs 3: Na prática, sempre haverá incertezas no modelo (11.1) da planta. Assim, em (11.1), o ruído do processo w_1 procura incorporar também incertezas na equação de estado da planta, e o ruído de medição w_2 tem como objetivo capturar também incertezas no sensor de saída. Consequentemente, é comum em situações práticas não conhecermos as matrizes de intensidade constantes nominais $V_1^{nominal} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V_2^{nominal} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ de $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$, respectivamente. Em tal caso, devemos buscar sintonizar o ganho $L = PC'V_2^{-1}$ do Filtro de Kalman de modo a se alcançar um compromisso razoável entre rapidez de estimação (rapidez dos polos de $A - LC$) e atenuação dos ruídos através da variação de $V_1 \geq 0, V_2 > 0$ na equação algébrica de Riccati acima. Ressaltamos, no entanto, que apesar de tal L ser admissível, L **não é ótimo!** De fato, não estamos utilizando as intensidades nominais $V_1^{nominal} \geq 0, V_2^{nominal} > 0$ dos ruídos na equação algébrica de Riccati e, conseqüentemente, L é **subótimo**, ou seja, $E_{L^*} \leq E_L$, onde $L^* = P^*C'(V_2^{nominal})^{-1}$ é o ganho ótimo. Uma prática usual é consideramos que $V_1 = \bar{V}_1$ e $V_2 = r\bar{V}_2$ na equação algébrica de Riccati, onde $\bar{V}_1 \geq 0, \bar{V}_2 > 0$ estão fixadas e $r > 0$ é o parâmetro de projeto a ser variado com o objetivo de se atingir um bom compromisso. Por simplicidade, é

comum se escolher \bar{V}_1, \bar{V}_2 como matrizes diagonais. Como primeira tentativa, é natural escolhermos $\bar{V}_1 = 0$ ou $\bar{V}_1 = I$, e $\bar{V}_2 = I$. Com base em dualidade (operação transposta de matrizes) e nas propriedades do controlador LQR vistas no capítulo anterior (veja a **Obs 4** da Seção 10.2), concluímos que polos do Filtro de Kalman possuem o seguinte comportamento assintótico²:

- Quando $r \rightarrow \infty$ (maior intensidade do ruído de medição em relação a do processo, ou seja, maior confiança na equação de estado da planta do que no sensor de saída), temos que os polos de $A - LC$ se aproximam dos polos de A (malha-aberta) que estão no SPE e da reflexão em relação ao eixo imaginário dos polos de A que estão no SPD (se $s = a + jb$ com $a > 0$ é um polo de malha-aberta no SPD, então o polo de $A - LC$ correspondente no SPE é $s = -a + jb$).
- Quando $r \rightarrow 0$ (menor intensidade do ruído de medição em relação a do processo, ou seja, maior confiança no sensor de saída do que na equação de estado da planta), temos que ρ polos de $A - LC$ se aproximam de localizações **finitas** no SPE (pode-se ter polos de $A - LC$ relativamente lentos dependendo do sistema!), enquanto que os $n - \rho$ polos restantes tendem assintoticamente ao **infinito** formando diversas configurações Butterworth de diferentes ordens e raios.

Portanto, quando as matrizes A, B, C do sistema (11.1) correspondem à linearização de um sistema não-linear num ponto de equilíbrio, deve-se variar $r > 0$ (por tentativa e erro!) de modo a se buscar obter um bom compromisso entre rapidez de estimação, atenuação dos ruídos e tamanho da região de atração do sistema não-linear em malha-fechada! Ressaltamos que tal compromisso é determinado pelo polos de $A - LC$.

Obs 4: Relembre do Teorema 2 acima que:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - L^*C)\bar{e}(t), \quad \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0),$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ a média do erro de estimação no instante $t \geq 0$. Portanto, os polos de $A - L^*C$ determinam a velocidade convergência de $\bar{e}(t)$ para zero. Além disso, se \bar{x}_0 for conhecido e escolhermos $\hat{x}(0) = \bar{x}_0$, teremos que $\bar{e}(0) = 0$ e, conseqüentemente,

$$\bar{e}(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

² Suponha que $V_1 = r_1 \bar{V}_1$ e $V_2 = r_2 \bar{V}_2$, com $r_1, r_2 > 0$. Pode-se mostrar que os polos de $A - LC$ só dependem do quociente $r = r_2/r_1$. Desse modo, sempre podemos considerar que $r_1 = 1$.

11.3 Princípio da Separação Estocástica

Considere novamente a planta (11.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t), \\ y(t) &= Cx(t) + w_2(t), \end{aligned} \tag{11.4}$$

onde $w_1(t) \in \mathbb{R}^n$ é o **ruído do processo**, $w_2(t) \in \mathbb{R}^p$ é o **ruído de medição**, $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são processos estocásticos vetoriais ($t \geq 0$), e a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório.

Dizemos que um controlador da forma

$$u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$$

é **admissível** para o sistema (11.4) quando f for linear em relação à saída y e, para qualquer condição inicial $x(0)$, a solução correspondente $x(t)$ do sistema em malha-fechada é única e está definida para $t \geq 0$. O conjunto dos controladores admissíveis f é denotado por \mathcal{F} .

Agora, introduzimos o **funcional custo** $J: \mathbb{R}^n \times F \rightarrow [0, \infty]$ definido por

$$J(x_0, f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{F}, \tag{11.5}$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, e $x(t)$, $t \geq 0$, é a única solução do sistema em malha-fechada com o controlador admissível $u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$ e a condição inicial $x(0) = x_0$. Dizemos que um controlador admissível $f^* \in \mathcal{F}$ é **ótimo** em relação ao funcional custo (11.5) quando f^* minimiza (11.5) no seguinte sentido:

- $J(x_0, f^*) < \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- $J(x_0, f^*) \leq J(x_0, f)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 3 (LQG): Considere a planta (11.4) e o funcional custo (11.5). Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Assuma que $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constant**es $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1(t)$ e $w_2(t)$, para todo $t \geq 0$. Suponha que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Então, a configuração controlador-observador

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - L^*C)\hat{x}(t) + Bu(t) + L^*y(t), \\ u(t) &= -K^*\hat{x}(t), \end{aligned} \tag{11.6}$$

é o **único controlador ótimo** de (11.5) quando a matriz de ganho K^* (realimentação) é projetada independentemente de L^* (observador) e dos ruídos $w_1(t), w_2(t)$ da seguinte maneira (**princípio da separação estocástica**):

1. Encontre K^* pelo LQR (veja o Lab 10) como se o estado x pudesse ser medido na realimentação $u = K^*x$, o funcional custo fosse $J(x_0, \phi) = \int_0^\infty x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t) dt$, e a planta (11.4) fosse determinística, ou seja, $w_1(t) = w_2(t) = 0, t \geq 0$. Mais precisamente, determine a única solução semidefinida positiva $P_r^* \geq 0$ da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0,$$

e tome

$$K^* = R^{-1}B'P_r^*.$$

2. Encontre L^* pelo Filtro de Kalman (veja o Teorema 2 acima). Mais precisamente, determine a única solução semidefinida positiva $P_o^* \geq 0$ da equação algébrica de Riccati

$$AP + PA' - PC'V_2^{-1}CP + V_1 = 0,$$

e tome

$$L^* = P_o^*C'V_2^{-1}.$$

Obs 1: Nas hipóteses do teorema acima, assuma adicionalmente que $w_1(\cdot), w_2(\cdot), x_0$ são processos estocásticos Gaussianos. Em tal caso, denominamos o controlador ótimo (11.6) de **controlador quadrático linear Gaussiano (LQG – Linear Quadratic Gaussian)**. Pode-se mostrar que o controlador LQG é o **único controlador ótimo** do funcional custo (11.5) mesmo dentre controladores **não-lineares** em relação a y da forma $u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$.

Obs 2: No Matlab, o comando `lqg` determina as matrizes de ganho K^* e L^* do controlador LQG.

Obs 3: O controlador LQG **não** possui propriedades de robustez em malha-fechada similares às do LQR.

Obs 4: **A sintonia do ganho K de realimentação pelo LQR e do Filtro de Kalman deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e atenuação de ruído!**

Obs 5: Em situações práticas, há sempre a presença de ruídos. Suponha que todos os estados da planta podem ser medidos, ou seja, $y = x + w_2(t)$ ($C = I$). Teremos então a presença de ruídos no sinal de controle $u(t) = -Kx(t)$ e, dependendo de suas intensidades, poderão resultar numa deterioração do atuador e da planta, além de degradar o desempenho do sistema em malha-fechada. Portanto, mesmo quando todos os estados podem ser medidos, ainda assim a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman poderá exercer um papel crucial no desempenho do sistema em malha-fechada e na preservação do atuador e da planta, devido à atenuação dos ruídos presentes no sinal de controle $u(t) = -K\hat{x}(t)$.

11.4 Procedimentos

1. Considere o sistema massa-mola da Seção 5.5 do Lab 5. Assuma que as variáveis de estado não podem ser realimentadas e que os ruídos do processo $w_1(t)$ e de medição $w_2(t)$ possuem matrizes de intensidade $V_1 = 0.0005I$ e $V_2 = 0.001I$. Repita novamente as simulações do Item 2 nos Procedimentos do Lab 6 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação, comparando em cada caso o desempenho do sistema em malha-fechada (rastreamento, rejeição, controle, erro de estimação, estado estimado) com o obtido pela utilização do ganho L^* do Filtro de Kalman no estimador de estado. **Dica:** para que $w_1(\cdot)$ e $w_2(\cdot)$ sejam não-correlacionados, utilize valores diferentes no campo **Seed** do bloco **Random Number** no Simulink.

Conclusão: Há menos ruído no sinal de controle $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ com o Filtro de Kalman do que com o estimador de estado por alocação de polos! No entanto, o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação é maior com o Filtro de Kalman. Isto era esperado? Justifique sua resposta. **Dica:** determine os polos de $A - L^*C$.

2. Agora, considere o controlador LQG. Para isto, escolha $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$ (veja o primeiro método da **Obs 3** do Lab 10) com: $r = 0.01$, $r = 0.4$, $r = 40$. Compare o desempenho obtido em malha-fechada (rastreamento, rejeição, controle, erro de estimação) pelo LQG com o encontrado por imposição de polos no item anterior, assumindo que: $x(0) = \hat{x}(0) = 0$, polos de $A_a - B_aK_a$ em $s = -1$, e polos de $A - LC$ em $s = -2$ (duas vezes mais rápido).

Conclusão: Para $r = 0.4$, obtivemos um melhor desempenho no rastreamento da referência com rejeição de perturbação e um menor esforço de controle com o LQG do que por imposição de polos! E isto ainda foi alcançado com menos ruído no estado estimado \hat{x} e no sinal de controle $u = -K\hat{x} - K_mx_m$!

3. Por fim, considere novamente o controlador LQG com $r = 0.4$ como acima, mas assumindo que as intensidades **nominais** de V_1 e V_2 são **desconhecidas**. Sintonize o Filtro de Kalman de modo que o sobressinal máximo da saída y_1 devido à perturbação não ultrapasse a amplitude de 4.35. **Dica:** escolha $V_1 = \bar{V}_1 = I > 0$ e $V_2 = r_{fk}\bar{V}_2 = r_{fk}I > 0$, e varie $r_{fk} > 0$ por tentativa e erro, mas não se esquecendo de levar em conta o ruído resultante no estado estimado e no sinal de controle (veja a **Obs 3** da Seção 11.2 acima).

Conclusão: Sintonizamos uma configuração controlador-observador para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação de um sistema multivariável na presença de ruídos através da variação de 2 parâmetros reais: r (LQR) e r_{fk} (Filtro de Kalman)!

12 Controle Linear em Tempo Discreto (Lab 12)

Objetivos: Vamos estudar sistemas em tempo discreto e o sistema digital equivalente de uma planta linear em tempo contínuo. Veremos que basicamente todos conceitos e resultados já abordados para sistemas lineares em tempo contínuo permanecem válidos em tempo discreto (com as adaptações óbvias): estabilidade, controlabilidade, observabilidade, realimentação de estado, estimador de estado, LQR, Filtro de Kalman, LQG, etc.

12.1 Sistema Discreto Equivalente

Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{12.1}$$

Suponha que a planta será controlada por um computador. Seja $T_s > 0$ o período de amostragem. A cada instante de amostragem $t = kT_s$, $k \in \mathbb{N}$, um algoritmo programado no computador determina o controle $u[k] = u(kT_s)$, e então $u[k]$ é enviado ao conversor D/A (ZOH). Desse modo, o controle aplicado na planta é constante por partes e dado por

$$u(t) = u[k], \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s,$$

para $k \in \mathbb{N}$. Vamos determinar na sequência o sistema efetivamente “visto” pelo computador a partir do conversor D/A nos instantes de amostragem $t = kT_s$ (conversor A/D).

Relembre que:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau.$$

Logo, para $t = kT_s$, temos:

$$x[k] \triangleq x(kT_s) = e^{AkT_s}x(0) + \int_0^{kT_s} e^{A(kT_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau.$$

Em particular, para $t = (k+1)T_s$:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= e^{A(k+1)T_s}x(0) + \int_0^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{AT_s} \underbrace{\left[e^{AkT_s}x(0) + \int_0^{kT_s} e^{A(kT_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau \right]}_{=x[k]} \\ &\quad + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Desse modo, fazendo a mudança de variável $\alpha = (k+1)T_s - \tau$ na segunda integral acima e utilizando o fato de que $u(t) = u[k]$ para $kT_s \leq t < (k+1)T_s$, obtemos:

$$x[k+1] = \underbrace{e^{AT_s}}_{=A_d} x[k] + \underbrace{\left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B u[k]}_{=B_d} = A_d x[k] + B_d u[k],$$

$$y[k] \triangleq y(kT_s) = Cx(kT_s) = Cx[k].$$

Concluimos assim que, ao aplicarmos uma entrada constante por partes $u(t)$ via computador na planta, então, nos instantes de amostragem $t = kT_s$, o estado $x[k] = x(kT_s)$ evolui de acordo com a **equação a diferenças**

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k],$$

e a saída $y[k] = y(kT_s)$ é determinada pela equação algébrica

$$y[k] = Cx[k].$$

Denominamos

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k], \\ y[k] &= Cx[k], \end{aligned} \tag{12.2}$$

onde

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B,$$

de **sistema discreto equivalente** da planta (12.1).

Obs 1: No Matlab, o comando `c2d` determina as matrizes A_d e B_d do sistema discreto equivalente.

Obs 2: Pode-se mostrar que, se os polos (autovalores) da matriz A são $s = p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$, então os polos de A_d são $z = e^{p_1 T_s}, \dots, e^{p_n T_s} \in \mathbb{C}$.

Obs 3: Não há na literatura uma metodologia geral para a especificação do período de amostragem $T_s > 0$. Um dos métodos é tomar (como primeira escolha!):

$$T_s = \frac{3\tau_\ell}{20} = \frac{3}{20|p_\ell|},$$

onde $\tau_\ell = -1/p_\ell$ é a constante de tempo do polo desejado p_ℓ **mais lento** de **malha fechada** (no SPE!).

Na sequência, vamos tratar de sistemas em tempo discreto da forma

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \\ y[k] &= Cx[k]. \end{aligned}$$

12.2 Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Considere uma sistema linear em tempo discreto modelado por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \\y[k] &= Cx[k].\end{aligned}\tag{12.3}$$

Fixada uma condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ e uma entrada $u[k] \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, pode-se mostrar a que solução correspondente $x[k]$ e a saída associada $y[k]$, $k \in \mathbb{N}$, são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}x[k] &= A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu[j], \\y[k] &= \underbrace{CA^k x[0]}_{y_0[k]} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \overbrace{CA^{k-1-j} Bu[j]}^{=\mathcal{G}[k-j]}}_{y_{esn}[k]=\mathcal{G}[k]*u[k]}.\end{aligned}$$

Logo, (12.3) é de fato um sistema **linear** (i.e. satisfaz o **princípio da superposição**)! Note que a **propriedade de decomposição** também é válida: $y[k] = y_0[k] + y_{esn}[k]$. Denominamos $\mathcal{G}[k] = CA^k B$, $k \in \mathbb{N}$, de **matriz resposta ao impulso** do sistema.

Agora, aplicando a transformada \mathcal{L} em ambos os lados de

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k], \\y[k] &= Cx[k],\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}zX[z] - zx[0] &= AX[z] + BU[z], \\Y[z] &= CX[z],\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}X[z] &= (X_1[z], \dots, X_n[z])' = \mathcal{L}\{x[k]\} = (\mathcal{L}\{x_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{x_n[k]\})', \\U[z] &= (U_1[z], \dots, U_m[z])' = \mathcal{L}\{u[k]\} = (\mathcal{L}\{u_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{u_m[k]\})', \\Y[z] &= (Y_1[z], \dots, Y_p[z])' = \mathcal{L}\{y[k]\} = (\mathcal{L}\{y_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{y_p[k]\})'.\end{aligned}$$

Portanto, $(zI - A)X[z] = zx[0] + BU[z]$ e, assim,

$$\begin{aligned}X[z] &= z(zI - A)^{-1}x[0] + (zI - A)^{-1}BU[z], \\Y[z] &= Cz(zI - A)^{-1}x[0] + C(zI - A)^{-1}BU[z].\end{aligned}$$

Mas, para $k \in \mathbb{N}$,

$$x[k] = A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u[j],$$

$$y[k] = \underbrace{CA^k x[0]}_{y_0[k]} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \overbrace{CA^{k-1-j} B u[j]}^{=\mathcal{G}[k-j]}}_{y_{esn}[k]=\mathcal{G}[k]*u[k], \text{ com } \mathcal{G}[0]=0} .$$

Concluimos então que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\} = A^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$Y[z] = \underbrace{Cz(zI - A)^{-1}x[0]}_{=Y_0[z]} + \underbrace{C(zI - A)^{-1}B U[z]}_{=Y_{esn}[k] = G[z]U[z]},$$

$$= G[z] = \mathcal{Z}\{\mathcal{G}[z]\}$$

onde

$$\boxed{G[z] = \mathcal{Z}\{\mathcal{G}[k]\} \in \mathbb{R}^{p \times m} = C(zI - A)^{-1}B}$$

é denominada de **matriz de transferência** do sistema. Logo, para $x[0] = 0$ (condições iniciais nulas), temos

$$\boxed{Y[z] = Y_{esn}[z] = G[z]U[z]}.$$

Dizemos que $\gamma \in \mathbb{C}$ é um **polo** da matriz da transferência $G[z]$ quando γ é um polo de **algum** elemento de $G[z]$. Assim, cada polo de cada elemento de $G[z]$ é um polo da matriz de transferência $G[z]$. Como os autovalores da matriz A são as raízes de $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$, concluimos que **todo polo** da matriz de transferência $G[z]$ é um **autovalor** da matriz A . No entanto, nem todo autovalor de A é um polo de $G[z]$ devido a possíveis cancelamentos polo-zero nos elementos de $G[z]$.

Na sequência, vamos abordar estabilidade, controlabilidade, observabilidade, estabilização por realimentação de estado, observadores de estado, configuração controlador-observador, controlador LQR, Filtro de Kalman e controlador LQG para sistemas lineares em tempo discreto. Veremos que os resultados são análogos aos de sistema lineares em tempo contínuo.

Definição (Estabilidade Interna): Assuma que $u[k] = 0, k \in \mathbb{N}$ (entrada nula). Dizemos que a origem $x^e = 0$ do sistema (12.3) é **estável** quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x[0]\| < \delta \Rightarrow \|x[k]\| < \varepsilon, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

Quando $x^e = 0$ não é estável, dizemos que $x^e = 0$ é **instável**. Dizemos que $x^e = 0$ é **globalmente assintoticamente estável** do sistema quando $x^e = 0$ é estável e, além disso, dada qualquer condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x[0] = 0$.

Definição (Estabilidade Externa): Assuma que $x[0] = 0$ (condição inicial nula). Dizemos que o sistema (12.3) é **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) estável** quando, para qualquer entrada limitada $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, temos que a **resposta estado nulo** $y[k] = y_{esn}[k] = \mathcal{G}[k] * u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, é limitada. Quando o sistema não é BIBO estável, dizemos que o mesmo é **BIBO instável**. Isto significa que existe ao menos uma entrada **limitada** $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, para a qual a resposta estado nulo $y[k] = y_{esn}[k] = \mathcal{G}[k] * u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, **não é limitada**.

Teorema 1: Considere um sistema da forma (12.3). Então:

1. A origem $x^e = 0$ é instável caso a matriz A possua **algum** polo (autovalor) **fora** do círculo unitário (i.e. módulo maior que 1);
2. A origem $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** a matriz A possui **todos** os polos (autovalores) **dentro** do círculo unitário (i.e. módulo menor que 1);
3. O sistema é BIBO estável **se e somente se** cada elemento $G_{ij}[z]$ da matriz de transferência $G[z]$ é BIBO estável, ou seja, todos os polos de $G[z]$ estão dentro do círculo unitário.

Obs 1: Relembre que todo polo de $G[z]$ é um polo (autovalor) da matriz A . Portanto: (a) se $G[z]$ possui algum polo fora do círculo unitário, então o sistema é BIBO instável e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio instável; e (b) se todos os polos da matriz A estão dentro do círculo unitário, então o $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, além disso, o sistema é BIBO estável. No entanto, um sistema pode ser BIBO estável mas $x^e = 0$ não ser globalmente assintoticamente estável (devido a cancelamentos polo-zero instáveis nos elementos de $G[z]$).

Obs 2: Relembre que a solução de $x[k+1] = Ax[k]$ para a condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$x[k] = A^k x[0], \quad k \in \mathbb{N},$$

com

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z(z-A)^{-1}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z \text{Adj}(zI-A)/\det(zI-A)\} = A^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, quanto mais afastados de $z = \pm 1$ estiverem os polos da matriz A dentro do círculo unitário, mais rápida será a convergência da solução $x[k]$ para $x^e = 0$.

Definição: Dizemos que o sistema (12.3) é **controlável** quando, para cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada estado final $x_N \in \mathbb{R}^n$, existe uma entrada $u: \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que a solução $x: \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema para a condição inicial $x[0] = x_0$ satisfaz $x[N] = x_N$, para algum inteiro positivo N . Isto significa que sempre podemos levar o sistema de todo estado inicial para qualquer estado final desejado em tempo finito através de uma entrada adequada. Dizemos que o sistema é **não-controlável** quando ele não for controlável.

Definição: Dizemos que o sistema é **observável** quando, para todo estado inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ desconhecido, existe um inteiro positivo N tal que o conhecimento de **qualquer** entrada aplicada $u[k] \in \mathbb{R}^m$ e da saída correspondente $y[k] \in \mathbb{R}^p$ no intervalo de tempo $\{0, \dots, N\}$ é suficiente para determinar de maneira única o estado inicial $x[0]$. Dizemos que o sistema é **não-observável** quando ele não for observável.

Teorema 2: Considere um sistema da forma (12.3). Então:

1. O sistema é controlável **se e somente se** o par (A, B) é controlável;
2. O sistema é observável **se e somente se** o par (A, C) é observável.

Em particular, quando o sistema (12.3) é controlável, sempre podemos encontrar uma realimentação de estado da forma $u[k] = -Kx[k]$ (assumindo que todas as variáveis de estado podem ser realimentadas/medidas) de modo que todos os polos do sistema em malha-fechada

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] = (A - BK)x[k]$$

sejam posicionados (arbitrariamente) dentro círculo unitário (e a origem $x^e = 0$ do sistema em malha-fechada é globalmente assintoticamente estável). E, quando o sistema (12.3) é observável, sempre podemos determinar a matriz de ganho L do observador de estado¹

$$\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + L(y[k] - C\hat{x}[k]) = (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k],$$

de modo que todos os polos de $A - LC$ sejam posicionados (arbitrariamente) dentro do círculo unitário. Consequentemente, a dinâmica do erro de estimação $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ é dada por

$$\begin{aligned} e[k+1] &= x[k+1] - \hat{x}[k+1] \\ &= (A - LC)e[k] \end{aligned}$$

e, quando todos os polos de $A - LC$ estão dentro do círculo unitário, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0,$$

para qualquer condição inicial $e[0] = x[0] - \hat{x}[0]$.

Considere a seguinte configuração controlador-observador para o sistema (12.3):

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k], \\ u[k] &= -K\hat{x}[k]. \end{aligned}$$

Como matricialmente o sistema (12.3) em malha-fechada com a configuração controlador-observador acima é exatamente o mesmo como em tempo contínuo, também é válido em

¹ Assim como no caso em tempo contínuo, temos que $\hat{y}[k] = C\hat{x}[k]$ pode ser visto como uma estimativa da saída $y[k] = Cx[k]$. Logo: $\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + L(y[k] - \hat{y}[k])$.

tempo discreto o **princípio da separação (determinística)**: os polos de malha-fechada são a união (com repetição) dos polos de $A - BK$ (realimentação) com o polos de $A - LC$ (observador).

Agora, considere a planta (em tempo contínuo) (12.1) e o sistema discreto equivalente (12.2). Os próximos resultados tratam da preservação de controlabilidade e observabilidade entre os dois sistemas.

Teorema 3: Se a planta (em tempo contínuo) (12.1) não é controlável (respectivamente, observável), então o sistema discreto equivalente (12.2) não é controlável (respectivamente, observável) para qualquer período de amostragem $T_s > 0$.

Teorema 4: Se a planta (em tempo contínuo) (12.1) é controlável (respectivamente, observável), então o sistema discreto equivalente (12.2) será controlável (respectivamente, observável) quando o período de amostragem $T_s > 0$ satisfizer, para $i, j = 1, \dots, n$:

$$|\operatorname{Im}(p_i - p_j)| \neq 2\pi m/T_s, \text{ para } m = 1, 2, \dots, \text{ sempre que } \operatorname{Re}(p_i) = \operatorname{Re}(p_j),$$

onde p_i são os polos da matriz A da planta (12.1).

Isto significa que o sistema discreto equivalente pode perder controlabilidade/observabilidade por uma escolha inadequada do período de amostragem!

Os conceitos de estabilizabilidade e detectabilidade para sistemas em tempo discreto são análogos aos que vimos para sistemas em tempo contínuo, pois as decomposições canônicas e os teoremas apresentados na Seção 2.10 da Teoria permanecem válidos (com as adaptações óbvias, e.g. trocar \dot{x} por $x[k+1]$, $t \geq 0$ por $k \in \mathbb{N}$, etc).

A próxima seção trata do LQR, Filtro Kalman e LQG em tempo discreto.

12.3 Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Teorema 1 (LQR): Considere o sistema (12.3) e o funcional custo

$$\begin{aligned} J(x_0, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]' Q x[k] + \phi(x[k])' R \phi(x[k]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]' Q x[k] + u[k]' R u[k], \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \phi \in \Phi, \end{aligned} \quad (12.4)$$

onde $x[k]$ é a solução correspondente do sistema em malha-fechada para a condição inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e realimentação de estado $u[k] = \phi[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da **equação algébrica de Riccati discreta**

$$P = A'PA - A'PB(B'PB + R)^{-1}B'PA + Q.$$

Então, a realimentação de estado **linear**

$$u^*[k] = -K^*x[k] = -\underbrace{(B'P^*B + R)^{-1}B'P^*A}_{=K^*}x[k]$$

é a **única realimentação ótima**² de (12.4), e os polos de

$$A - BK^* = A - B(B'P^*B + R)^{-1}B'P^*A$$

(sistema em malha-fechada) estão dentro do círculo unitário. Denominamos $u^*[k] = -K^*x[k]$ de **regulador quadrático linear** (LQR – Linear Quadratic Regulator).

Obs: No Matlab, o comando `dlqr` determine a matriz de ganho K^* do LQR em tempo discreto. Para a escolha de $Q \geq 0$ e $R > 0$, veja a Obs 3 do Lab 11.

Teorema 2 (Filtro de Kalman): Considere o sistema linear em tempo discreto (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + w_1[k], \\ y[k] &= Cx[k] + w_2[k], \end{aligned} \quad (12.5)$$

com uma dada entrada **determinística** $u[k] \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $v_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $v_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Assuma que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da **equação algébrica de Riccati discreta**

$$P = APA' - APC'(CPC' + V_2)^{-1}CPA' + V_1.$$

Então,

$$L^* = AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}$$

é uma matriz de ganho **ótima** para o estimador de estado linear³

$$\hat{x}[k+1] = (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k]$$

e os polos de

$$A - L^*C = A - AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}C$$

estão dentro do círculo unitário, com

$$\bar{e}[k+1] = (A - L^*C)\bar{e}[k], \quad \bar{e}[0] = \bar{x}_0 - \hat{x}[0],$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x[0]\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}[k] = E\{e[k]\}$ a média do erro de estimação no instante $k \geq 0$. Além disso, $E_{L^*} = \text{tr}[P^*]$. Denominamos o **estimador de estado linear ótimo** com $L = L^* = AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}$ de **Filtro de Kalman (Preditivo em Regime Permanente)**.

² Ressaltamos que $u^*[k] = -K^*x[k] = \phi^*(x[k])$ é ótima no sentido de que $J(x_0, \phi^*) < \infty$ e $J(x_0, \phi^*) \leq J(x_0, \phi)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\phi \in \Phi$, onde Φ é o conjunto das realimentações admissíveis, ou seja, das realimentações $u = \phi(x)$ tais que $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, $\phi(0) = 0$, e em que a origem do sistema em malha-fechada correspondente seja globalmente assintoticamente estável.

³ Dizemos que um ganho L é **admissível** quando os polos de $A - LC$ estão dentro do círculo unitário, e $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{e^t[k]e[k]\} = E_L \in \mathbb{R}$ é finito e independe de $e[0]$. Assim, L^* é **ótima** quando for admissível e $E_{L^*} \leq E_L < \infty$ para qualquer outra escolha de ganho L admissível. Além disso, as **Obs 1 a 4** da Seção 11.2 do Lab 11 permanecem válidas em tempo discreto (com as adaptações óbvias).

Obs: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Então, pode-se mostrar que o Filtro de Kalman é um estimador de estado **ótimo** mesmo dentre estimadores **não-lineares** que determinam uma estimativa $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ a partir de $y[\tau], u[\tau]$, para $0 \leq \tau \leq k-1$.

Teorema 3 (LQG): Considere o sistema (12.5) e o funcional custo $J: \mathbb{R}^n \times \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ dado por

$$J(x_0, f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x[k]' Q x[k] + u[k]' R u[k] dt \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{F}, \quad (12.6)$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, $x[k]$, $k \in \mathbb{N}$, é a solução do sistema em malha-fechada com o controlador admissível $u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k)$ e a condição inicial $x(0) = x_0$, e \mathcal{F} é conjunto das realimentações admissíveis, ou seja, das realimentações $u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k)$ tais que f é linear em relação à saída y . Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$. Assuma que $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Então, a configuração controlador-observador

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= (A - L^*C)\hat{x}[k] + Bu[k] + L^*y[k], \\ u[k] &= -K^*\hat{x}[k], \end{aligned} \quad (12.7)$$

é o **único controlador ótimo**⁴ de (12.6) quando a matriz de ganho K^* (realimentação) é projetada independentemente de L^* (observador) e dos ruídos $w_1[k], w_2[k]$ da seguinte maneira (**princípio da separação estocástica**):

1. Determine K^* como no LQR (Teorema 5 acima);
2. Determine L^* como no Filtro no Kalman (Teorema 6 acima).

Obs 1: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Em tal caso, denominamos o controlador ótimo (11.6) de **controlador quadrático linear Gaussiano (LQG – Linear Quadratic Gaussian)**. Pode-se mostrar que o controlador LQG é o **único controlador ótimo** do funcional custo (11.5) mesmo dentre controladores **não-lineares** em relação a y e da forma $u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k-1)$.

Obs 2: A sintonia do ganho K de realimentação pelo LQR e do Filtro de Kalman deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e atenuação de ruído!

⁴ Dizemos que um controlador admissível $f^* \in \mathcal{F}$ é **ótimo** em relação ao funcional custo (12.6) quando f^* minimiza (12.6) no seguinte sentido: $J(x_0, f^*) < \infty$ e $J(x_0, f^*) \leq J(x_0, f)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}$.

Obs 3: Em situações práticas, há sempre a presença de ruídos. Suponha que todos os estados da planta podem ser medidos, ou seja, $y = x + w_2[k]$ ($C = I$). Teremos então a presença de ruídos no sinal de controle $u(t) = -Kx[k]$ e, dependendo de suas intensidades, poderão resultar numa deterioração do atuador e da planta, além de degradar o desempenho do sistema em malha-fechada. Portanto, mesmo quando todos os estados podem ser medidos, ainda assim a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman poderá exercer um papel crucial no desempenho do sistema em malha-fechada e na preservação do atuador e da planta, devido à atenuação dos ruídos presentes no sinal de controle $u[k] = -K\hat{x}[k]$.

12.4 Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Os próximos dois resultados mostram como podemos estabilizar um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear em tempo contínuo através de um computador. O algoritmo de controle a ser implementado no computador é determinado pelo sistema discreto equivalente correspondente ao sistema linearizado associado.

Teorema 1: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema não-linear em tempo contínuo $\dot{x} = f(x, u)$. Escolha um período de amostragem $T_s > 0$ qualquer, e considere a equação de estado do sistema digital equivalente correspondente ao sistema linearizado associado

$$x_\delta[k+1] = A_d x_\delta[k] + B_d u_\delta[k], \quad A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B,$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e).$$

Suponha que o par (A_d, B_d) é controlável/estabilizável, e escolha uma matriz de ganho K_d de forma que todos os polos de $A_d - B_d K_d$ estejam dentro do círculo unitário. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u_d[k] = -K_d(x[k] - x^e) + u^e, \quad \text{com } x[k] = x(kT_s),$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada controlado por computador

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)), \\ u(t) &= u_d[k] = -K_d(x(kT_s) - x^e) + u^e, \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s. \end{aligned}$$

Obs: O algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

1. Leia $x_k = x(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);

2. Calcule $u_k = -K_d(x_k - x^e) + u^e$
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 1.

Teorema 2: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema não-linear em tempo contínuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Escolha um período de amostragem $T_s > 0$ qualquer, e considere a equação de estado do sistema digital equivalente correspondente ao sistema linearizado associado

$$\begin{aligned}x_\delta[k+1] &= A_d x_\delta[k] + B_d u_\delta[k], \quad A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B, \\ y_\delta[k] &= C x_\delta[k],\end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e).$$

Suponha que (A_d, B_d) é controlável/estabilizável e que (A_d, C) é observável/detectável. Escolha K_d e L_d de forma que todos os polos de $A_d - B_d K_d$ e $A_d - L_d C$ estejam dentro do círculo unitário. Então, a configuração controlador-observador **linear**

$$\begin{aligned}\hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e, \\ u_d[k] &= -K_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e, \quad \text{com } y[k] = y(kT_s),\end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $\tilde{x}^e = (x^e, x^e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada controlado por computador com vetor de estado $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u(t)), \\ \hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e, \\ u(t) = u_d[k] &= -K_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e, \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s, \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Obs 1: O algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

1. $\hat{x}_k = \hat{x}(0)$ (inicialização – condição inicial do observador de estado);
2. Calcule $u_k = -K_d(\hat{x}_k - x^e) + u^e$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);

4. Leia $y_k = y(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
5. Calcule $\hat{x}_{k+1} = (A_d - L_d C)(\hat{x}_k - x^e) + B_d(u_k - u^e) + L_d(y_k - h(x^e)) + x^e$;
6. Atualize $\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1}$;
7. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 2.

Note que, quanto menor for o período de amostragem $T_s > 0$, maior será o custo computacional envolvido, e maior a possibilidade de acumulação de erros numéricos devido à precisão numérica finita nos computadores. Além disso, o custo computacional é proporcional à ordem n da planta em decorrência do cálculo do controle e do estado estimado. Relembramos que restrições técnicas nos conversores A/D e D/A impõem um valor mínimo T_{smin} para T_s , de modo que devemos ter $T_s \geq T_{smin}$. Por outro lado, como a planta está em malha-aberta entre os instantes de amostragem, T_s também não deve ser muito grande na prática.

Obs 2: A escolha do período de amostragem $T_s > 0$ pode afetar o tamanho da região de atração do ponto de equilíbrio $\tilde{x}^e = (x^e, x^e)$ de malha-fechada. **Concluimos, assim, que a escolha de T_s e dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração (e atenuação de ruído)!**

12.5 Filtro de Kalman

Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + w_1[k], \\ y[k] &= Cx[k] + w_2[k], \end{aligned} \quad (12.8)$$

onde a entrada $u[k]$ é **determinística**, $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ é o **ruído do processo**, $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$ é o **ruído de medição**, $w_1[\cdot] \in \mathbb{R}^n, w_2[\cdot] \in \mathbb{R}^p$ são processos estocásticos vetoriais, $k \in \mathbb{N}$, e a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório. Nosso objetivo é determinar, para cada $k \geq 0$, uma **estimativa ótima** $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ a partir de $\{u[0], \dots, u[k-1], y[0], \dots, y[k-1], y[k]\}$ (note que a saída atual $y[k]$ é incluída!) no sentido de **minimizarmos o erro médio quadrático** no instante k , ou seja, o erro médio quadrático satisfaz

$$E\{(x[k] - \hat{x}[k])'(x[k] - \hat{x}[k])\} \leq E\{(x[k] - z[k])'(x[k] - z[k])\}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

onde $z[k]$ é **qualquer** outra estimativa (linear ou **não-linear**!) de $x[k]$ a partir de $\{u[0], \dots, u[k-1], y[0], \dots, y[k-1], y[k]\}$.

Obs: Relembre que, no Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente que vimos no Teorema 2 da Seção 12.3 acima, garantimos somente a minimização do erro médio quadrático assintótico, ou seja, quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, a estimativa $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ não

levava em conta a saída atual $y[k]$, mas apenas as anteriores $y[0], \dots, y[k-1]$, justificando assim o termo “preditivo”⁵.

O próximo resultado estabelece que o Filtro de Kalman (variante no tempo) é um estimador ótimo:

Teorema (Filtro de Kalman): Considere o sistema linear (12.8), onde a entrada $u[k]$ é **determinística**, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos **Gaussianos** não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é **Gaussiano** e independente de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Assuma que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Sejam $\bar{x}_0 = E\{x[0]\}$ (média inicial, correspondente ao valor esperado de $x[0]$) e $\bar{P}_0 = E\{(x[0] - \bar{x}_0)(x[0] - \bar{x}_0)'\} \geq 0$ (variância inicial, correspondente à incerteza sobre $x[0]$). Escolha $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e considere o seguinte estimador de estado **variante no tempo**⁶, denominado de **Filtro de Kalman**⁷:

$$\begin{aligned} P[0] &= P_0 \geq 0, \quad \hat{x}[0] = \hat{x}_0 \quad (\text{inicialização}), \\ P^-[k+1] &= AP[k]A' + V_1 \geq 0, \\ L[k+1] &= P^-[k+1]C'(CP^-[k+1]C' + V_2)^{-1}, \\ \hat{x}[k+1] &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L[k+1]\left(y[k+1] - \underbrace{C(A\hat{x}[k] + Bu[k])}_{=\hat{y}[k+1]}\right), \\ P[k+1] &= (I - L[k+1]C)P^-[k+1] > 0 \quad (\text{atualização}). \end{aligned}$$

Considere o erro de estimação $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ no instante $k \in \mathbb{N}$, e sejam $\bar{e}[k] = E\{e[k]\}$ e $Q[k] = E\{(e[k] - \bar{e}[k])(e[k] - \bar{e}[k])'\} \geq 0$ a média e a variância de $e[\cdot]$ no instante $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Então:

1. O erro de estimação $e[k]$ satisfaz a seguinte equação de estado **variante no tempo** para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$e[k+1] = (A - L[k+1]CA)e[k] + (I - L[k+1]C)w_1[k] - L[k+1]w_2[k+1], \quad e[0] = x[0] - \hat{x}_0. \quad (12.9)$$

2. Para qualquer escolha inicial $P[0] = P_0 \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} P^-[k+1] &\triangleq P_\infty^- \geq 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} L[k+1] &\triangleq L_\infty = P_\infty^- C'(CP_\infty^- C' + V_2)^{-1}, \\ 0 < \lim_{k \rightarrow \infty} P[k] &\triangleq P_\infty = (I - L_\infty C)P_\infty^- \leq P_\infty^-, \end{aligned}$$

⁵ Dizemos que uma estimativa $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ é: (a) uma **preditão** quando $\hat{x}[k]$ leva em conta as saídas passadas $y[0], \dots, y[k-1]$; e (b) uma **filtragem** quando $\hat{x}[k]$ leva em conta as saídas passadas e também a atual, ou seja, $y[0], \dots, y[k-1], y[k]$.

⁶ Note que, na equação de estado de $\hat{x}[k]$, a matriz de ganho $L[k+1]$ depende do tempo k , apesar das matrizes A, B, C em (12.8) serem constantes.

⁷ Quando $w_1 = w_2 = 0$, temos $y[k+1] = Cx[k+1] = C(Ax[k] + Bu[k])$. Assim, uma estimativa razoável para saída no instante $k+1$ é dada por $\hat{y}[k+1] = C(A\hat{x}[k] + Bu[k])$.

e os polos de $A - L_\infty CA = A - P_\infty^- C' (CP_\infty^- C' + V_2)^{-1} CA$ estão dentro do círculo unitário, onde $P_\infty^- \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati discreta da Seção 12.3 acima:

$$P = APA' - APC'(CPC' + V_2)^{-1} CPA' + V_1. \quad (12.10)$$

Isto significa que $P_\infty^-, L_\infty, P_\infty$ independem de $P_0 \geq 0$ (e também de \hat{x}_0)! Além disso, dado qualquer $P_0 \geq 0$, temos que a média $\bar{e}[k]$ do erro de estimação satisfaz a seguinte equação de estado **variante no tempo** para todo $k \in \mathbb{N}$ (relembre que $E\{w_1[k]\} = E\{w_2[k]\} = 0$):

$$\bar{e}[k+1] = (A - L[k+1]CA)\bar{e}[k], \quad \bar{e}[0] = \bar{x}_0 - \hat{x}_0,$$

e a origem $\bar{e} = 0$ é **globalmente uniformemente assintoticamente estável**⁸. Em particular, $\bar{e}[k] = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ quando escolhermos $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, e a origem $e = 0$ de (12.9) é **globalmente uniformemente assintoticamente estável** (estabilidade interna, ou seja, para $w_1 = w_2 = 0$) e **BIBO estável**⁹ (estabilidade interna, ou seja, $e[0] = 0$), para qualquer escolha de $P_0 \geq 0$.

3. Suponha que $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $P_0 = \bar{P}_0$ (**situação ideal**). Então, o Filtro de Kalman acima fornece uma **estimativa ótima** $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ a partir de $\{u[0], \dots, u[k-1], y[0], \dots, y[k]\}$, com $P[k] = Q[k] = E\{e[k]e'[k]\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular¹⁰:

$$E\{e'[k]e[k]\} = \text{tr}(P[k]), \quad k \in \mathbb{N},$$

e o erro médio quadrático assintótico do Filtro de Kalman acima satisfaz (como era de se esperar!)

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} E\{e'[k]e[k]\} = \text{tr}(P_\infty) \leq \text{tr}(P_\infty^-) = E_{L^*} \in \mathbb{R},$$

onde $E_{L^*} < \infty$ é o erro médio quadrático assintótico do Filtro de Kalman Preditivo Regime Permanente do Teorema 2 da Seção 12.3 com o ganho ótimo L^* . Além disso, se $\xi[k] = x[k] - z[k]$ é o erro de estimação de qualquer outro filtro (linear ou **não-linear**!) que determina uma estimativa $z[k]$ de $x[k]$ a partir de $\{u[0], \dots, u[k-1], y[0], \dots, y[k]\}$, então $E\{e'[k]e[k]\} \leq E\{\xi'[k]\xi[k]\}$ para $k \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente:

$$0 < \text{tr}(P_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} E\{e'[k]e[k]\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} E\{\xi'[k]\xi[k]\} \leq \infty$$

⁸ Isto significa que: (i) dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\bar{e}[k_0]\| < \delta \Rightarrow \|\bar{e}[k]\| < \varepsilon$, para todo $k \geq k_0$ e qualquer instante inicial $k_0 \in \mathbb{N}$; e (b) dada qualquer condição inicial $\bar{e}[k_0] \in \mathbb{R}^n$ no instante inicial $k_0 \in \mathbb{N}$, tem-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}[k] = 0$ *uniformemente* em k_0 , ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\bar{e}[k]\| < \varepsilon$, para todo $k \geq \bar{k} + k_0$ e qualquer condição inicial $\bar{e}[k_0] \in \mathbb{R}^n$ em um dado instante inicial $k_0 \in \mathbb{N}$. O fato de $\bar{e} = 0$ ser *globalmente uniformemente assintoticamente estável* **não decorre** do fato da matriz $A - L[k+1]CA$ ter todos os polos dentro do círculo unitário para todo $k \in \mathbb{N}$. Aliás, como a matriz $A - L[k+1]CA$ é variante no tempo, não há sequer o conceito de polo do sistema!

⁹ A BIBO estabilidade de (12.9) segue do fato de $\lim_{k \rightarrow \infty} L[k+1] = L_\infty$, e também do Teorema 4.11, p. 156, do livro do Khalil, e da p. 140 do livro do Chen.

¹⁰ Utilizamos aqui a Afirmação 2 acima, e relembremos as seguintes propriedades: $E\{e[k]e'[k]\} = \bar{e}[k]\bar{e}'[k] + Q[k]$, $E\{e'[k]e[k]\} = \bar{e}'[k]\bar{e}[k] + \text{tr}(Q[k]) = \text{tr}(E\{e[k]e'[k]\})$.

ou seja, o Filtro de Kalman também **minimiza o erro médio quadrático assintótico!**

Obs 1 (Situação Prática): Na prática, sempre haverá incertezas no modelo (12.8) da planta. Assim, em (12.8), o ruído do processo w_1 procura incorporar também incertezas na equação de estado da planta, e o ruído de medição w_2 tem como objetivo capturar também incertezas no sensor de saída. Conseqüentemente, é comum não conhecermos os valores reais de \bar{x} (média inicial), \bar{P}_0 (variância inicial) e nem as intensidades constantes nominais $V_1^{nominal} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V_2^{nominal} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ de $w_1[\cdot] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[\cdot] \in \mathbb{R}^p$, respectivamente. Em tal caso, devemos buscar sintonizar o Filtro de Kalman de modo a se alcançar um compromisso razoável entre rapidez de estimação e atenuação de ruídos através da variação de \hat{x}_0 , $P_0 \geq 0$, $V_1 \geq 0, V_2 > 0$ no Filtro de Kalman. Ressaltamos, no entanto, que apesar da origem $e = 0$ de (12.9) ser globalmente uniformemente assintoticamente estável com tais variações, o Filtro de Kalman resultante não será ótimo! De fato, não estaremos utilizando as intensidades nominais $V_1^{nominal} \geq 0, V_2^{nominal} > 0$ dos ruídos e nem os valores reais de \bar{x}_0, \bar{P}_0 no Filtro de Kalman. Conseqüentemente, o Filtro de Kalman projetado será **subótimo!** Uma prática usual é considerarmos que $P_0 = \lambda \tilde{P}_0$, $V_1 = r_1 \bar{V}_1$ e $V_2 = r_2 \bar{V}_2$ no Filtro de Kalman, onde $\tilde{P}_0 \geq 0$, $\bar{V}_1 \geq 0$, $\bar{V}_2 > 0$ estão fixadas e $\lambda, r_1, r_2 > 0$ são os parâmetros de projeto a serem variados com o objetivo de se atingir um bom compromisso. Por simplicidade, é comum se escolher $\tilde{P}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ como matrizes diagonais. Como primeira tentativa, é natural escolhermos: $\tilde{P}_0 = 0$ ou $\tilde{P}_0 = I$, $\bar{V}_1 = 0$ ou $\bar{V}_1 = I$, e $\bar{V}_2 = I$. Uma **regra prática** bastante usual é escolhermos $\tilde{P}_0 = I$ e $\lambda > 0$ **relativamente grande** com o intuito de se acelerar o regime transitório inicial do erro de estimação.

Obs 2 (Simulações): No Simulink, o bloco “Kalman Filter” implementa diretamente o Filtro de Kalman.

Obs 3 (Forma de Joseph): Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} P[k+1] &= (I - L[k+1]C)P^-[k+1] \\ &= (I - L[k+1]C)P^-[k+1](I - L[k+1]C)' + L[k+1]V_2L'[k+1] \quad (\text{forma de Joseph}). \end{aligned}$$

Assim, vemos pela forma de Joseph que $P[k+1] > 0$ para $k \geq 0$, pois $P[0] = P_0 \geq 0$, $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$. A primeira forma $P[k+1] = (I - L[k+1]C)P^-[k+1]$ é mais utilizada na prática do que a forma de Joseph por envolver menor esforço computacional. No entanto, a forma de Joseph é mais estável e robusta numericamente para que $P[k+1] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seja de fato uma matriz simétrica definida positiva.

Obs 4 (Aspectos Computacionais): Note que $P^-[k+1], L[k+1], P[k+1]$ só dependem da escolha inicial $P[0] = P_0 \geq 0$ e, portanto, podem a princípio ser determinadas *off-line* e então armazenados em memória com o objetivo de se reduzir a esforço computacional de implementação do Filtro de Kalman (mas com um maior custo de armazenamento, obviamente). Como as matrizes $P_\infty^-, L_\infty, P_\infty$ podem também ser obtidas *off-line* pela equação algébrica de Riccati discreta (12.10), uma alternativa prática é considerar que

$P^-[k+1] = P_\infty^-$, $L[k+1] = L_\infty$, $P[k+1] = P_\infty$ para $k \geq \bar{k}$, onde $\bar{k} \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, de modo que apenas um número finito destas matrizes precisa ser determinado e armazenado.

Obs 5 (Filtro de Kalman em Regime Permanente): Suponha que no Filtro de Kalman substituimos $L[k+1]$ por L_∞ na equação de estado de $\hat{x}[k]$. Obtemos, assim, o **Filtro de Kalman em Regime Permanente**:

$$\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + L_\infty \left(y[k+1] - C(A\hat{x}[k] + Bu[k]) \right), \quad \hat{x}[0] = \hat{x}_0,$$

onde $L_\infty = P_\infty^- C' (CP_\infty^- C' + V_2)^{-1}$ e $P_\infty^- \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati discreta (12.10). Pelo teorema, temos que:

$$\begin{aligned} e[k+1] &= (A - L_\infty CA)e[k] + (I - L_\infty C)w_1[k] - L_\infty w_2[k+1], & e[0] &= x[0] - \hat{x}_0, \\ \bar{e}[k+1] &= (A - L_\infty CA)\bar{e}[k], & \bar{e}[0] &= \bar{x}_0 - \hat{x}_0, \end{aligned}$$

e os polos de $A - L_\infty CA$ estão dentro do círculo unitário¹¹. Note que estas equações de estado são **invariantes no tempo**. Ressaltamos que o Filtro de Kalman em Regime Permanente **não é um estimador ótimo**, ou seja, **não determina uma estimativa ótima** $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ a partir de $\{u[0], \dots, u[k-1], y[0], \dots, y[k]\}$!

Obs 6 (Princípio da Separação): Veremos agora que o princípio da separação permanece válido com o Filtro de Kalman. Suponha que o sistema (12.8) é estabilizável e que as hipóteses do teorema acima estão satisfeitas. Seja $u[k] = -Kx[k]$ uma realimentação tal que os polos de $A - BK$ estejam dentro do círculo unitário. Primeiramente, consideraremos o Filtro de Kalman em Regime Permanente (invariante no tempo). Temos então a seguinte configuração controlador-estimador:

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L_\infty \left(y[k+1] - C(A\hat{x}[k] + Bu[k]) \right), \\ u[k] &= -K\hat{x}[k]. \end{aligned}$$

Como a saída de (12.8) é $y[k] = Cx[k] + w_2[k]$, temos que

$$y[k+1] = Cx[k+1] + w_2[k+1] = CAx[k] + CBu[k] + Cw_1[k] + w_2[k+1].$$

¹¹ Sejam $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes quadradas. Pode-se mostrar que MN e NM possuem o mesmo conjunto de autovalores (com repetição). Consequentemente, como $P_\infty^- = P^* \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati discreta (12.10), concluímos que a matriz $A - L^*C = A[I - P^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}C]$ do Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente (veja a Seção 12.3) e a matriz $A - L_\infty CA = [I - P_\infty^- C'(CP_\infty^- C' + V_2)^{-1}C]A$ do Filtro de Kalman em Regime Permanente possuem o mesmo conjunto de polos (com repetição)! Em particular, se $V_1 = r_1 \bar{V}_1$ e $V_2 = r_2 \bar{V}_2$, com $r_1, r_2 > 0$, então os polos de $A - L_\infty CA$ só dependem do quociente $r = r_2/r_1$. Desse modo, sempre podemos considerar que $r_1 = 1$ no Filtro de Kalman em Regime Permanente.

Portanto, o sistema (12.8) em malha-fechada é dado por:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + w_1[k] = Ax[k] - BK\hat{x}[k] + w_1[k], \\ \hat{x}[k+1] &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L_\infty \left(y[k+1] - C(A\hat{x}[k] + Bu[k]) \right) \\ &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L_\infty \left(CAx[k] + CBu[k] + Cw_1[k] + w_2[k+1] - C(A\hat{x}[k] + Bu[k]) \right) \\ &= L_\infty CAx[k] + (A - BK - L_\infty CA)\hat{x}[k] + L_\infty Cw_1[k] + L_\infty w_2[k+1]. \end{aligned}$$

Mudando as coordenadas de $\tilde{x} = (x, \hat{x})$ para $z = (x, e) = (x, x - \hat{x})$, obtemos que:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= (A - BK)x[k] + BKe[k] + w_1[k], \\ e[k+1] &= (A - L_\infty CA)e[k] + (I - L_\infty C)w_1[k] - L_\infty w_2[k+1] \end{aligned}$$

(e recuperamos assim a primeira afirmação do teorema). Concluimos então que o **princípio da separação** permanece **válido**, ou seja, os polos de malha-fechada são a união (com repetição) dos polos de $A - BK$ com os polos de $A - L_\infty CA$, e a origem $\tilde{x} = (0, 0)$ do sistema em malha-fechada é globalmente assintoticamente estável (estabilidade interna, ou seja, para $w_1 = w_2 = 0$). Ao considerarmos as médias $\bar{x}[k], \bar{e}[k]$ de $x[k], e[k]$, respectivamente, temos (relembre que $E\{w_1[k]\} = E\{w_2[k]\} = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= (A - BK)\bar{x}[k] + BK\bar{e}[k], \\ \bar{e}[k+1] &= (A - L_\infty CA)\bar{e}[k]. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{e}[k] = 0$ para quaisquer \bar{x}_0, \hat{x}_0 iniciais.

Agora, considere o Filtro de Kalman (variante no tempo). Temos então a seguinte configuração controlador-estimador:

$$\begin{aligned} \hat{x}[k+1] &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L[k+1] \left(y[k+1] - C(A\hat{x}[k] + Bu[k]) \right), \\ u[k] &= -K\hat{x}[k]. \end{aligned}$$

Por (12.9), em malha-fechada temos que:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + w_1[k] = Ax[k] - BK\hat{x}[k] + w_1[k] = (A - BK)x[k] + BKe[k] + w_1[k], \\ e[k+1] &= (A - L[k+1]CA)e[k] + (I - L[k+1]C)w_1[k] - L[k+1]w_2[k+1], \quad e[0] = x[0] - \hat{x}_0. \end{aligned}$$

Analisaremos a estabilidade interna (i.e. $w_1 = w_2 = 0$). Como $e = 0$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável na segunda equação de estado, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0$. Vendo então $e[k]$ como entrada na equação de estado de $x[k]$ e usando o fato de que todos os polos de $A - BK$ estão no dentro do círculo unitário, é possível mostrar que a origem $\tilde{x} = (x, \hat{x}) = (0, 0)$ do sistema em malha-fechada é globalmente uniformemente assintoticamente estável (e, portanto, o sistema em malha-fechada é também BIBO estável). Desse modo, o **princípio da separação** continua **válido**, pois o projeto do ganho K de

realimentação e da matriz de ganho $L[k+1]$ variante no tempo do Filtro de Kalman que estabilizam a malha-fechada são realizados de maneira independente. No entanto, ressaltamos que não há o conceito de polos de malha-fechada! Além do mais, ao considerarmos as médias, temos:

$$\begin{aligned}\bar{x}[k+1] &= (A - BK)\bar{x}[k] + BK\bar{e}[k], \\ \bar{e}[k+1] &= (A - L[k+1]CA)\bar{e}[k].\end{aligned}$$

Por fim, ressaltamos que: **a sintonia do ganho K de realimentação e do Filtro de Kalman deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e atenuação de ruído!**

12.6 Sistema Discreto Equivalente de Sistemas Lineares com Ruído

Considere uma planta linear em tempo contínuo com ruído modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + \tilde{w}_1(t), \\ y &= Cx + \tilde{w}_2(t),\end{aligned}\tag{12.11}$$

onde $\tilde{w}_1(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{w}_2(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constant**es $\tilde{V}_1 \geq 0$ e $\tilde{V}_2 > 0$. Sejam $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ e $\bar{P}_0 = E\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)'\} \geq 0$ a média e a variância do vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Escolha um período de amostragem $T_s > 0$. Pode-se mostrar que o **sistema discreto equivalente** é dado por:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] + w_1[k], \\ y[k] &= Cx[k] + w_2[k],\end{aligned}\tag{12.12}$$

onde:

$$\begin{aligned}A_d &= e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B, \\ w_1[k] &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A[(k+1)T_s - \alpha]} \tilde{w}_1(\alpha) d\alpha, \\ w_2[k] &= \tilde{w}_2(kT_s).\end{aligned}$$

Além disso, $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \geq 0$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade constantes dadas por

$$\begin{aligned}V_1 &= \int_0^{T_s} e^{A\alpha} \tilde{V}_1 e^{A'\alpha} d\alpha \geq 0, \\ V_2 &= \frac{1}{T_s} \tilde{V}_2 > 0,\end{aligned}\tag{12.13}$$

respectivamente. A média e variância inicial não são alteradas, ou seja: $x[0]$ em $k=0$ possui média $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ e variância $\bar{P}_0 = E\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)'\}$. Ressaltamos que V_1

pode não ser uma matriz diagonal mesmo quando \tilde{V}_1 for diagonal. No entanto, V_2 sempre será diagonal quando \tilde{V}_2 for diagonal. Para $T_s \cong 0$, temos as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT_s} \cong I + T_s A, & B_d &= \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B \cong T_s B, \\ V_1 &= \int_0^{T_s} e^{A\tau} \tilde{V}_1 e^{A'\tau} d\tau \cong T_s \tilde{V}_1, & V_2 &= \frac{1}{T_s} \tilde{V}_2. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Assim, a intensidade \tilde{V}_1 é multiplicada por T_s , e \tilde{V}_2 é dividida por T_s .

Obs (Aplicação do Filtro de Kalman em Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo via Sistema Linearizado): Considere o seguinte sistema não-linear em tempo contínuo com ruído

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + \tilde{w}_1(t), \\ y &= h(x) + \tilde{w}_2(t), \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, e $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ são de classe C^1 . Assuma que $\tilde{w}_1(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{w}_2(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, são ruídos brancos **Gaussianos** não-correlacionados com matrizes de intensidade **constant**es $\tilde{V}_1 \geq 0$ e $\tilde{V}_2 > 0$, e que o vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é **Gaussiano** e independente de $\tilde{w}_1(t)$ e $\tilde{w}_2(t)$, $t \geq 0$. Sejam $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ e $\bar{P}_0 = E\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)'\} \geq 0$ a média e a variância de x_0 , respectivamente.

Assuma que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema sem ruído, ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$, e suponha que o problema de controle seja estabilizar x^e por computador em malha-fechada via sistema linearizado através da configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{x}_d[k+1] &= A_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) \\ &\quad + L[k+1] \left(y[k+1] - h(x^e) - C(A_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e)) \right) + x^e, \\ u_d[k] &= -K(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e, \end{aligned}$$

onde

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \quad C = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad (12.15)$$

e $T_s > 0$ é o período de amostragem. Note que A_d, B_d correspondem à discretização do sistema linearizado no ponto de equilíbrio (x^e, u^e) . Assuma que os polos de $A_d - B_d K$ estejam dentro do círculo unitário. Para a sintonia do Filtro de Kalman, é razoável considerarmos as intensidades V_1, V_2 como em (12.13) ou (12.14). Como esta configuração controlador-observador é **variante no tempo**, os resultados apresentados na Seção 12.4 não se aplicam diretamente. No entanto, na prática, é razoável esperarmos que, quando $T_s \cong 0$, então a implementação da configuração controlador-observador acima num computador assegura

que o estado $\tilde{x} = (x, \hat{x})$ do sistema em malha-fechada permaneça relativamente próximo do ponto de equilíbrio $\tilde{x}^e = (x^e, x^e)$ para todo $t \geq 0$ suficientemente grande e com uma atenuação relativamente boa dos ruídos, desde que $\tilde{x}(0)$ esteja próximo o suficiente de \tilde{x}^e .

Considerando a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman acima, o algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

1. $P_k = P_0$, $\hat{x}_k = \hat{x}_0$ (inicialização);
2. Calcule $u_k = -K(\hat{x}_k - x^e) + u^e$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Calcule $\hat{x}_k^- = A_d(\hat{x}_k - x^e) + B_d(u_k - u^e)$;
5. Calcule $P_{k+1}^- = A_d P_k A_d' + V_1$;
6. Calcule $L_{k+1} = P_{k+1}^- C' (C P_{k+1}^- C' + V_2)^{-1}$;
7. Calcule $P_{k+1} = (I - L_{k+1} C) P_{k+1}^-$;
8. Espere até completar T_s segundos;
9. Leia $y_{k+1} = y((k+1)T_s)$ (conversor A/D – amostrador);
10. Calcule $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k^- + L_{k+1}(y_{k+1} - h(x^e) - C\hat{x}_k^-) + x^e$;
11. Atualize $\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1}$, $P_k = P_{k+1}$, e volte ao Passo 2.

Alternativamente, pode-se utilizar o seguinte algoritmo, o qual pode ser implementado no Matlab¹² com os blocos `Matlab Function` e `Unit Delay`:

¹² Note que o algoritmo anterior não é possível de ser implementado no Matlab com os blocos `Matlab Function` e `Unit Delay`, pois há um tempo de espera de T_s segundos no meio do algoritmo, correspondente à leitura da saída $y[k+1]$. Além disso, a única diferença entre os dois algoritmos na determinação da estimativa $\hat{x}[k]$ é a utilização de condições iniciais $P[0]$, $\hat{x}[0]$ diferentes no Filtro de Kalman, mas que serão relativamente próximas caso $T_s \cong 0$.

1. $P_k^- = P_0, \hat{x}_k^- = \hat{x}_0$ (inicialização);
2. Calcule $u_k = -K(\hat{x}_k^- - x^e) + u^e$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Leia $y_k = y(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
5. Calcule $L_k = P_k^- C' (C P_k^- C' + V_2)^{-1}$;
6. Calcule $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - h(x^e) - C \hat{x}_k^-) + x^e$;
7. Calcule $P_k = (I - L_k C) P_k^-$;
8. Calcule $P_{k+1}^- = A_d P_k A_d' + V_1$;
9. $\hat{x}_{k+1}^- = A_d (\hat{x}_k - x^e) + B_d (u_k - u^e)$;
10. Atualize $\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k+1}^-, P_k^- = P_{k+1}^-$;
11. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 2.

Por fim, ressaltamos que: **a escolha de T_s , e a sintonia do ganho K de realimentação e do Filtro de Kalman, devem levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle, tamanho da região de atração e atenuação de ruído!** Além disso, relembramos que, mesmo quando todos os estados da planta podem ser medidos, ainda assim a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman poderá exercer um papel crucial em situações práticas (veja a **Obs 3** da Seção 12.3).

12.7 Filtro de Kalman Estendido

Para a estimação de estado em sistemas não-lineares em tempo discreto com ruído, temos o seguinte resultado:

Teorema (Filtro de Kalman Estendido): Considere o seguinte sistema não-linear em tempo discreto com ruído

$$\begin{aligned} x[k+1] &= F(x[k], u[k]) + w_1[k], \\ y[k] &= h(x[k]) + w_2[k], \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, e $F: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ são de classe C^2 (e não C^1 !). Considere que a entrada $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, é **determinística**. Assuma que $\tilde{w}_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{w}_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos **Gaussianos** não-correlacionados com matrizes de intensidade **constant**es $V_1^{nominal} \geq 0$ e $V_2^{nominal} > 0$, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é **Gaussiano** e independente

de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Sejam $\bar{x}_0 = E\{x[0]\}$ e $\bar{P}_0 = E\{(x[0] - \bar{x}_0)(x[0] - \bar{x}_0)'\} \geq 0$ a média (valor esperado de $x[0]$) e a variância (incerteza sobre $x[0]$) iniciais, respectivamente. Escolha $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \leq V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 < V_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, e considere o seguinte estimador de estado **não-linear variante no tempo**, denominado de **Filtro de Kalman Estendido**¹³:

$$\begin{aligned} P[0] &= P_0 \geq 0, \quad \hat{x}[0] = \hat{x}_0 \quad (\text{inicialização}), \\ A[k] &= \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}[k], u[k]), \quad C[k] = \frac{\partial h}{\partial x}(F(\hat{x}[k], u[k])), \\ P^-[k+1] &= A[k]P[k]A'[k] + V_1 \geq 0, \\ L[k+1] &= P^-[k+1]C'[k](C[k]P^-[k+1]C'[k] + V_2)^{-1}, \\ \hat{x}[k+1] &= F(\hat{x}[k], u[k]) + L[k+1]\left(y[k+1] - \underbrace{h(F(\hat{x}[k], u[k]))}_{=\hat{y}[k+1]}\right), \\ P[k+1] &= (I - L[k+1]C[k])P^-[k+1] > 0 \quad (\text{atualização}). \end{aligned}$$

Suponha que:

1. Existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ tais que¹⁴:

$$\|A[k]\| \leq \alpha_1, \quad \|C[k]\| \leq \alpha_2, \quad \beta_1 I \leq P[k] \leq \beta_2 I, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N};$$

2. $\det(A[k]) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ o erro de estimação no instante k . Então, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \eta > 0$ tais que, se

$$E\{e'[0]e[0]\} < \delta_1, \quad V_1^{nominal} \leq \delta_2 I, \quad V_2^{nominal} \leq \delta_2 I,$$

então (convergência exponencial do erro médio quadrático)

$$E\{e'[k]e[k]\} \leq \eta E\{e'[0]e[0]\}e^{-\gamma k} + \delta_3, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \quad (12.16)$$

Obs 1: O Filtro de Kalman Estendido **não é um estimador ótimo**, nem mesmo quando $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $P_0 = \bar{P}_0$, $V_1 = V_1^{nominal}$, $V_2 = V_2^{nominal}$! A sintonia do Filtro de Kalman Estendido é realizada pela variação dos parâmetros de controle P_0, V_1, V_2 na busca de se obter um bom compromisso entre rapidez de estimação e atenuação de ruídos. Assim como no Filtro de Kalman, uma prática usual é considerarmos que $P_0 = \lambda \tilde{P}_0$, $V_1 = r_1 \bar{V}_1$ e $V_2 = r_2 \bar{V}_2$, onde $\tilde{P}_0 \geq 0$, $\bar{V}_1 \geq 0$, $\bar{V}_2 > 0$ estão fixadas e $\lambda, r_1, r_2 > 0$ são os parâmetros de projeto a serem variados com o objetivo de se atingir um bom compromisso. Por simplicidade, é

¹³ Note que o Filtro de Kalman Estendido corresponde ao Filtro de Kalman quando o sistema é linear, ou seja, $F(x[k], u[k]) = Ax[k] + Bu[k]$, $h(x[k]) = Cx[k]$. Além disso, quando $w_1 = w_2 = 0$, temos $y[k+1] = h(x[k+1]) = h(F(x[k], u[k]))$. Assim, uma estimativa razoável para saída no instante $k+1$ é dada por $\hat{y}[k+1] = h(F(\hat{x}[k], u[k]))$.

¹⁴ A condição $\beta_1 I \leq P[k] \leq \beta_2 I$, para $k \in \mathbb{N}$, é equivalente a se ter que todo autovalor $\lambda_j[k]$ de $P[k]$ satisfaz $\beta_1 \leq \lambda_j[k] \leq \beta_2$, para todo k .

comum se escolher $\tilde{P}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ como matrizes diagonais. Como primeira tentativa, é natural escolhermos: $\tilde{P}_0 = 0$ ou $\tilde{P}_0 = I$, $\bar{V}_1 = 0$ ou $\bar{V}_1 = I$, e $\bar{V}_2 = I$. Uma **regra prática** bastante usual é escolhermos $\tilde{P}_0 = I$ e $\lambda > 0$ **relativamente grande** com o intuito de se acelerar o regime transitório inicial do erro de estimação.

Obs 2: Note que as Hipóteses 1 e 2 do teorema dependem da execução em tempo real do Filtro de Kalman Estendido e, assim, não podem ser verificadas *off-line*. É possível contornar tal restrição, mas as hipóteses correspondentes são ainda mais difíceis de serem verificadas em situações reais.

Obs 3: Pode-se mostrar que, quando $w_1 = w_2 = 0$ (sem ruídos, ou seja, a planta não-linear é **determinística**) e as Hipóteses 1 e 2 do teorema são atendidas, então a origem $e = 0$ do erro de estimação $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ é **localmente uniformemente assintoticamente estável** para quaisquer escolhas de $P_0 \geq 0, V_1 \geq 0, V_2 > 0$ no Filtro de Kalman Estendido.

Obs 4: Considere uma planta não-linear em tempo contínuo modelada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{12.17}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, e $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ são de classe C^1 . Para sistemas não-lineares, não há um método geral para se determinar o sistema discreto equivalente. No entanto, é usual na prática utilizarmos o **método de Euler** para obtermos uma aproximação do sistema discreto equivalente quando $T_s \cong 0$:

$$\frac{x((k+1)T_s) - x(kT_s)}{T_s} \cong \dot{x}(kT_s) = f(x(kT_s), u(kT_s)) \Rightarrow x((k+1)T_s) \cong T_s f(x(kT_s), u(kT_s)) + x(kT_s),$$

ou seja, é razoável considerarmos que

$$\begin{aligned}x[k+1] &= F(x[k], u[k]) \triangleq T_s f(x[k], u[k]) + x[k], \\ y[k] &= h(x[k]),\end{aligned}\tag{12.18}$$

onde $x[k] = x(kT_s)$, $u[k] = u(kT_s)$, $y[k] = y(kT_s)$. Note que, se considerarmos para um dado $(x^*, u^*) \in D \times \mathbb{R}^m$ que

$$\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*),$$

então,

$$\bar{A}_d \triangleq \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, u^*) = I + T_s \bar{A} \cong e^{\bar{A}T_s},$$

quando $T_s \cong 0$ (veja (12.14)).

Suponha que realizamos o projeto do Filtro de Kalman Estendido com base na aproximação (12.18) para o sistema discreto equivalente da planta não-linear em tempo contínuo.

Ao implementamos o Filtro de Kalman Estendido num computador para a estimação do estado da planta, então é razoável esperarmos na prática que

$$E\{e'(t)e(t)\} \leq \eta E\{e'(t)e(t)\}e^{-\gamma t} + \delta_3, \quad \text{para } t \geq 0, \quad (12.19)$$

quando

$$E\{e'(0)e(0)\} < \delta_1, \quad T_s \cong 0.$$

Agora, assuma que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio da planta (sem ruído), ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$, e suponha que o problema de controle seja estabilizar x^e por computador em malha-fechada via sistema linearizado através da configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman Estendido:

$$\begin{aligned} \hat{x}_d[k+1] &= F(\hat{x}[k], u[k]) + L[k+1] \left(y[k+1] - h(F(\hat{x}[k], u[k])) \right), \\ u_d[k] &= -K(\hat{x}[k] - x^e) + u^e. \end{aligned}$$

Ressaltamos que, como (12.17), (12.18) e o Filtro de Kalman Estendido são não-lineares, **não há qualquer garantia de que o princípio de separação seja válido** (e em geral não é)! Entretanto, é uma prática relativamente comum em situação reais se projetar a realimentação K independente do Filtro de Kalman Estendido, como se o princípio da separação fosse realmente válido (ao menos como primeira tentativa). Por exemplo, escolhemos K de modo que os polos de $A_d - B_d K$ estejam dentro do círculo unitário, onde A_d, B_d são como em (12.15), ou seja, correspondem à discretização do sistema linearizado no ponto de equilíbrio (x^e, u^e) .

Considerando a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman Estendido acima, o algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

1. $P_k = P_0, \hat{x}_k = \hat{x}_0$ (inicialização);
2. Calcule $u_k = -K(\hat{x}_k - x^e) + u^e$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A - ZOH);
4. Calcule $\hat{x}_k^- = F(\hat{x}_k, u_k) = \hat{x}_k + T_s f(\hat{x}_k, u_k)$;
5. Calcule $A_k = \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) = I + T_s \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$, $C_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k^-)$;
6. Calcule $P_{k+1}^- = A_k P_k A_k' + V_1$;
7. Calcule $L_{k+1} = P_{k+1}^- C_k' (C_k P_{k+1}^- C_k' + V_2)^{-1}$;
8. Calcule $P_{k+1} = (I - L_{k+1} C_k) P_{k+1}^-$;
9. Espere até completar T_s segundos;
10. Leia $y_{k+1} = y((k+1)T_s)$ (conversor A/D - amostrador);

11. Calcule $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k^- + L_{k+1} \left(y_{k+1} - h(\hat{x}_k^-) \right)$;
12. Atualize $\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1}$, $P_k = P_{k+1}$, e volte ao Passo 2.

Alternativamente, pode-se utilizar o seguinte algoritmo, o qual pode ser implementado no Matlab¹⁵ com os blocos `Matlab Function` e `Unit Delay`:

1. $P_k^- = P_0$, $\hat{x}_k^- = \hat{x}_0$ (inicialização);
2. Calcule $u_k = -K(\hat{x}_k^- - x^e) + u^e$;
3. Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
4. Leia $y_k = y(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
5. Calcule $C_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k^-)$;
6. Calcule $L_k = P_k^- C_k' (C_k P_k^- C_k' + V_2)^{-1}$;
7. Calcule $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - h(\hat{x}_k^-))$;
8. Calcule $P_k = (I - L_k C) P_k^-$;
9. Calcule $A_k = \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) = I + T_s \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$
10. Calcule $P_{k+1}^- = A_k P_k A_k' + V_1$;
11. $\hat{x}_{k+1}^- = F(\hat{x}_k, u_k) = \hat{x}_k + T_s f(\hat{x}_k, u_k)$;
12. Atualize $\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k+1}^-$, $P_k^- = P_{k+1}^-$;
13. Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 2.

Por fim, para a sintonia de K e do Filtro de Kalman Estendido, as mesmas considerações apresentadas na **Obs** da Seção 12.6 acima devem ser levadas em conta.

12.8 Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u), \\ y &= x_1 = h(x_1, x_2), \end{aligned}$$

¹⁵ Note que o algoritmo anterior não é possível de ser implementado no Matlab com os blocos `Matlab Function` e `Unit Delay`, pois há um tempo de espera de T_s segundos no meio do algoritmo, correspondente à leitura da saída $y[k+1]$. Além disso, a única diferença entres os dois algoritmos na determinação da estimativa $\hat{x}[k]$ é a utilização de condições iniciais $P[0]$, $\hat{x}[0]$ diferentes no Filtro de Kalman Estendido, mas que serão relativamente próximas caso $T_s \cong 0$.

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mgl \sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u^e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

2. Determine as matrizes de ganho $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $K_d \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $L_d \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ de modo que o controlador-observador em tempo contínuo (projetado via sistema linearizado associado)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)), \\ u &= -K(\hat{x} - x^e) + u^e,\end{aligned}$$

e o controlador-observador em tempo discreto (projetado via discretização do sistema linearizado associado)

$$\begin{aligned}\hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e, \\ u_d[k] &= -K_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e,\end{aligned}$$

estabilizem assintoticamente o ponto de equilíbrio $\tilde{x}^e = (x^e, x^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de malha-fechada, considerando:

- (a) Polo duplo de $A - BK$ em $s = -4$, polo duplo de $A - LC$ em $s = -12$ (3 vezes mais rápido), polo duplo de $A_d - B_d K_d$ em $z = e^{-4T_s}$, polo duplo de $A_d - L_d C$ em $z = e^{-12T_s}$. Compare o desempenho (saída, estado, estado estimado, controle) do sistema em malha-fechada com o controlador em tempo contínuo e o controlador em tempo discreto, supondo que: $x(0) = 0$, $\hat{x}(0) = \hat{x}_d(0) = 0$, $x(0) = (3.12 + \pi/4, 5)$, e $T_s = 3/80$ (veja a **Obs 3** da Seção 12.1), $T_s = 3/400$ (cinco vezes menor), $T_s = 15/80$ (cinco vezes maior).
- (b) Repita o item (a), mas agora considerando: polo duplo de $A - LC$ em $s = -20$ (5 vezes mais rápido), polo duplo de $A_d - L_d C$ em $z = e^{-20T_s}$.

Conclusão: A escolha de T_s e dos polos de malha-fechada afeta o tamanho da região de atração! Assim, escolha de T_s e dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração (e atenuação de ruído)!

13 Introdução aos Sistemas Dinâmicos Quânticos (Lab 13)

Objetivos: Faremos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos quânticos em dimensão finita. Primeiramente, vamos revisar certos resultados de Álgebra Linear, para então apresentarmos os principais postulados da mecânica quântica em dimensão finita. Em seguida, veremos como analisar matematicamente partículas de spin-1/2. Por fim, ilustraremos alguns dos principais aspectos de sistemas quânticos tomando como exemplo partículas de spin-1/2.

13.1 Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n

Sejam

$$\begin{aligned}\psi &= (\psi_1, \dots, \psi_n)' \in \mathbb{C}^n, \\ \phi &= (\phi_1, \dots, \phi_n)' \in \mathbb{C}^n,\end{aligned}$$

onde $\psi_1, \phi_1, \dots, \psi_n, \phi_n \in \mathbb{C}$. Então:

Produto interno: $\langle \psi, \phi \rangle = \psi_1^* \phi_1 + \dots + \psi_n^* \phi_n \in \mathbb{C}$;

Vetores ortogonais: quando $\langle \psi, \phi \rangle = 0$;

Norma: $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \sqrt{|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2} \geq 0$;

Vetor unitário: quando $\|\psi\| = 1$;

Conjunto ortonormal: Um conjunto $S \subset \mathbb{C}^n$ é **ortonormal** quando: (i) cada vetor de S é unitário ($\|\psi\| = 1$); e (ii) vetores distintos de S são ortogonais ($\langle \psi, \phi \rangle = 0$).

Seja $\widehat{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz quadrada complexa de ordem n . Então:

Matriz transposta conjugada: $\widehat{Q}^\dagger = (q_{ji}^*)$;

Matriz hermitiana: quando $\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$;

Matriz unitária: quando $\widehat{Q}^\dagger \widehat{Q} = I$, ou seja, $\widehat{Q}^\dagger = \widehat{Q}^{-1}$.

Propriedades:

1. Suponha que \widehat{Q} é uma matriz hermitiana. Temos que os autovalores de \widehat{Q} são **reais** e, se ψ e ϕ são autovetores de \widehat{Q} associados a autovalores **distintos**, então $\langle \psi, \phi \rangle = 0$. Além disso, \mathbb{C}^n possui uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de \widehat{Q} . Em particular, todo vetor $\psi \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito como

$$\psi = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad \text{com } a_i = \langle v_i, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{e } \|\psi\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

2. Se \widehat{Q} é um matriz unitária, então $\|\widehat{Q}\psi\| = \|\psi\|$ (preservação da norma).

13.2 Postulados da Mecânica Quântica

Observável: grandeza física que pode ser medida por um experimento no qual os resultados possíveis são números reais como, por exemplo, posição, velocidade e spin de uma partícula.

1. Todo vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ representa um estado possível do sistema quântico. Se $k \in \mathbb{C}$ é unitário ($|k| = 1$), então $k\psi$ e ψ representam o mesmo estado do sistema. Além disso, todo estado possível do sistema é representado por um vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ e por seus múltiplos unitários, e somente por eles.
2. O espaço de estado de um sistema composto por dois subsistemas é $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{nm}$ (produto tensorial).
3. A cada observável Q (com um número finito de resultados possíveis) está associado uma matriz hermitiana $\hat{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$). Quando o sistema está no estado correspondente ao vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então o valor esperado de Q , no sentido usual de probabilidade, é dado por $\langle \psi, \hat{Q}\psi \rangle \in \mathbb{R}$.
4. As medições possíveis de um observável Q são os autovalores (reais) de \hat{Q} . Se o resultado de Q é α (real), então **imediatamente** após a medição o estado do sistema corresponderá ao autovetor unitário $\psi_\alpha \in \mathbb{C}^n$ de \hat{Q} associado ao autovalor α (**colapso do estado**). Quando o sistema está no estado unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então a probabilidade de medirmos o valor α é dada por $|\langle \psi_\alpha, \psi \rangle|^2 \in \mathbb{R}$ (e, se de fato medirmos α , teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_\alpha$).
5. Caso o sistema esteja **isolado** e **não seja perturbado** por nenhum experimento, a dinâmica do estado do sistema é determinada pela **equação de Schrödinger** (linear!)

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = (-\frac{j}{\hbar}\hat{H})\psi(t),$$

onde $\hbar = h/2\pi \in \mathbb{R}$, h é a constante de Planck, $j \in \mathbb{C}$ é a unidade imaginária, e H é o observável correspondente à energia total do sistema (**Hamiltoniano**).

Conseqüências:

- Técnicas de controle por realimentação não podem ser aplicadas diretamente;
- Controle em malha-aberta;
- Controle em malha-fechada pode ser realizado considerando o efeito das medições no sistema: o sistema em malha-fechada é modelado por equações diferenciais estocásticas no caso de tempo contínuo, e por equações a diferenças estocásticas no caso de tempo discreto (cadeias de Markov).

13.3 Partículas de Spin-1/2

Descrição:

- Exemplos de partículas de spin-1/2: elétron, próton;
- Medições possíveis: $\pm 1/2$;
- Espaço de estado: \mathbb{C}^2 ;
- $\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z);
- $\psi_+ = (1 \ 0)'$, $\psi_- = (0 \ 1)'$: base ortonormal;
- ψ_+ , ψ_- são autovetores de \hat{S}_z , pois:

$$\begin{aligned}\hat{S}_z \psi_+ &= +\frac{1}{2} \psi_+, \\ \hat{S}_z \psi_- &= -\frac{1}{2} \psi_-;\end{aligned}$$

- Estado unitário geral (**spinor**): $\psi = (\alpha \ \beta)' = \alpha \psi_+ + \beta \psi_- \in \mathbb{C}^2$, onde

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ \beta &= \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \quad (= \|\psi\|);\end{aligned}$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: **amplitudes de probabilidade**;
- $p_z(+1/2) = |\alpha|^2 = |\langle \psi_+, \psi \rangle|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $+1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_+$;
- $p_z(-1/2) = |\beta|^2 = |\langle \psi_-, \psi \rangle|^2 = 1 - |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção z quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $-1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_-$.

Importância:

- **Qubit (quantum bit)**: análogo quântico do bit usual da teoria de computação clássica.
- Partículas de spin-1/2: modelo de qubit (**informação**). O estado quântico ψ_- corresponde ao bit clássico 0, e ψ_+ ao bit clássico 1. No entanto, a **superposição** $\psi = \alpha \psi_+ + \beta \psi_-$ pode assumir um número infinito de estados quânticos e não há uma correspondência direta com bits clássicos!

- Teoria da computação quântica e da informação quântica: computadores quânticos processando algoritmos quânticos são mais eficientes computacionalmente que computadores clássicos.
- IBM: implementou a primeira plataforma de computação quântica, a qual utiliza um processador quântico de 5 qubits \Rightarrow <http://www.research.ibm.com/quantum>.

Duas partículas de spin-1/2 (2 qubits):

- Espaço de estado: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$;
- Estado unitário geral: $\psi = \alpha[\psi_{++}] + \beta[\psi_{+-}] + \gamma[\psi_{-+}] + \delta[\psi_{--}] \in \mathbb{C}^4$, onde

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle \psi_{++}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, & \beta &= \langle \psi_{+-}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ \gamma &= \langle \psi_{-+}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, & \delta &= \langle \psi_{--}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1 \quad (= \|\psi\|); \end{aligned}$$

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos +1/2 para a primeira partícula e +1/2 para a segunda partícula;
- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos +1/2 para a primeira partícula e -1/2 para a segunda partícula;
- $|\gamma|^2$: probabilidade de medirmos -1/2 para a primeira partícula e +1/2 para a segunda partícula;
- $|\delta|^2$: probabilidade de medirmos -1/2 para a primeira partícula e -1/2 para a segunda partícula.

13.4 Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Considere uma partícula de spin-1/2. Vimos na seção anterior que

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z , e que todo spinor pode ser escrito como

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \in \mathbb{C}^2, \quad \text{com } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Agora, considere a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção x :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então que

$$\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})', \quad \psi_-^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2})',$$

é uma base ortonormal de autovetores de \widehat{S}_z , pois:

$$\widehat{S}_x \psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2} \psi_+^{(x)}, \quad \widehat{S}_x \psi_-^{(x)} = -\frac{1}{2} \psi_-^{(x)}.$$

Por exemplo, para se determinar um autovetor unitário $\psi_+^{(x)} = (c \quad d)' \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $+1/2$:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_x \psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2} \psi_+^{(x)} &\Rightarrow \widehat{S}_x \psi_+^{(x)} - \frac{1}{2} \psi_+^{(x)} = (\widehat{S}_x - \frac{1}{2}I) \psi_+^{(x)} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \begin{aligned} -c/2 + d/2 &= 0 \\ c/2 - d/2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = d.$$

Portanto, podemos escolher $c = 1 \in \mathbb{R}$. Mas, como $\psi_+^{(x)} = (c \quad d) = (c \quad c) = (1 \quad 1)' \in \mathbb{C}^2$ deve ser unitário, basta fazermos a **normalização** de $\psi_+^{(x)}$:

$$\psi_+^{(x)} = \frac{1}{\|(c \quad d)\|} (c \quad d) = \frac{1}{\|(1 \quad 1)\|} (1 \quad 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1) = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})'$$

(note que $\|\psi_+^{(x)}\| = \|(c \quad d)\|/\|(c \quad d)\| = 1$).

Desse modo, todo spinor pode ser escrito como (mudança de base ortonormal)

$$\psi = \alpha \psi_+ + \beta \psi_- = \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\alpha_x} \psi_+^{(x)} + \underbrace{\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\beta_x} \psi_-^{(x)},$$

onde¹:

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}, & \beta &= \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ \alpha_x &= \langle \psi_+^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, & \beta_x &= \langle \psi_-^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= |\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|). \end{aligned}$$

Assim:

- $p_z(+1/2) = |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z (quando a partícula está no estado ψ);

¹ Por exemplo, como $\psi = \alpha \psi_+ + \beta \psi_- = (\alpha \quad \beta)'$ e $\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})'$, temos que $\alpha_x = \langle \psi_+^{(x)}, \psi \rangle = \alpha/\sqrt{2} + \beta/\sqrt{2} = (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.

- $p_z(-1/2) = |\beta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção z ;
- $p_x(+1/2) = |\alpha_x|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção x ;
- $p_x(-1/2) = |\beta_x|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção x .

Exemplo 1: Suponha que o estado quântico de uma partícula de spin-1/2 é

$$\psi = \psi_+,$$

ou seja, $\alpha = 1, \beta = 0$. Logo, se formos medir o spin da partícula na direção z , então é certo que vamos obter $+1/2$, i.e. com probabilidade igual a 1. No entanto, como

$$\alpha_x = \beta_x = 1/\sqrt{2},$$

se formos medir o spin da partícula na direção x , então vamos obter $+1/2$ com probabilidade $p_x(+1/2) = |\alpha_x|^2 = 1/2$, e $-1/2$ com probabilidade $p_x(-1/2) = |\beta_x|^2 = 1/2$, ou seja, temos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$.

Assuma que de fato medimos $+1/2$ na direção x (a partícula estava no estado $\psi = \psi_+$). Então, imediatamente após tal medição, o estado quântico da partícula passou a ser $\psi_+^{(x)}$ (colapso do estado: $\psi = \psi_+ \rightsquigarrow \psi_+^{(x)}$!), ou seja, $\alpha_x = 1, \beta_x = 0$ e, portanto, $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Desse modo, se neste momento formos medir o spin da partícula na direção z (que agora está no estado $\psi_+^{(x)}$), então teremos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$! Concluímos assim que **a medição do spin da partícula na direção x alterou significativamente a probabilidade das possíveis medições do spin da partícula na direção z : a probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z passou de 100% para 50%**!

Exemplo 2: Suponha que a dinâmica de uma partícula de spin-1/2 é determinada pela seguinte **equação de Schrödinger** (enquanto a partícula não é perturbada por nenhum experimento/medição)

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \left(-\frac{j}{\hbar}\hat{H}\right)\psi(t),$$

onde

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assuma que o spinor inicial da partícula é dado por

$$\psi(0) = \alpha(0)\psi_+ + \beta(0)\psi_- = (\alpha(0) \ \beta(0))' \in \mathbb{C}^2,$$

com $|\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1$. Então, a dinâmica $\psi(t)$, $t \geq 0$, do spinor é:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t)^k}{k!}\right)\psi(0), \\ &= \begin{pmatrix} e^{-jt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{jt/\hbar} \end{pmatrix}\psi(0) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Note que $\psi(t)$ é de fato um vetor unitário, já que

$$\|\psi(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1.$$

Isto era esperado, pois pode-se mostrar que, sempre que \widehat{H} for uma matriz hermitiana, então $e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}$ será uma matriz unitária para todo $t \geq 0$. Em particular,

$$\|\psi(t)\| = \|e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t}\psi(0)\| = \|\psi(0)\| = 1.$$

Mostramos acima que

$$\psi(t) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2.$$

Logo, concluímos que as **amplitudes de probabilidade** $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}$ de $\psi(t)$ são calculadas a partir da solução da **equação de Schrödinger**, que é uma **EDO linear determinística!** Em outras palavras, **as amplitudes de probabilidade seguem uma lei determinística ao longo do tempo!**

Por fim, ressaltamos que

$$\begin{aligned} |\alpha(t)|^2 &= |\alpha(0)e^{-jt/\hbar}|^2 = |\alpha(0)|^2, \\ |\beta(t)|^2 &= |\beta(0)e^{jt/\hbar}|^2 = |\beta(0)|^2, \end{aligned}$$

ou seja, as amplitudes de probabilidades iniciais foram preservadas. No entanto, como (veja o Exemplo 1 acima)

$$\begin{aligned} |\alpha_x(t)|^2 &= \left| \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} + \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2, \\ |\beta_x(t)|^2 &= \left| \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} - \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2, \end{aligned}$$

isto não ocorre para as amplitudes de probabilidade $|\alpha_x(t)|^2$ e $|\beta_x(t)|^2$.

13.5 Para Saber Mais

Livros:

1. Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, 2010. Capítulos 1 e 2;
2. David J. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics”, 2nd Edition, Prentice-Hall, 2005. Capítulos 1 a 4;
3. Jim Baggott, “The Quantum Story: A History in 40 Moments”, Oxford University Press, 2011.

Paradoxo EPR: https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox

Teorema de Bell: https://en.wikipedia.org/wiki/Bell's_theorem

Referências

- [1] M. Fliess et al. “A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.5 (1999), pp. 922–937.
- [2] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 2rd. Springer-Verlag, 1989.
- [3] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd. Springer-Verlag, 1995.
- [4] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [5] H. Nijmeijer e A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, 1990.
- [6] P. S. Pereira da Silva et al. “An Infinite Dimensional Differential-Geometric Approach for Nonlinear Systems: Part II – Systems Theory”. Em: (). Disponível em www.lac.usp.br/~paulo.
- [7] H. Sira-Ramirez e S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. New York: Marcel Dekker, 2004.