

DAS 5131 – Lab de Controle Multivariável

Prof. Hector Bessa Silveira

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC
Departamento de Automação e Sistemas – DAS
Sala 208
E-mail: hector.silveira@ufsc.br
Website: <http://hector.paginas.ufsc.br>

2019/1

Objetivos:

Primeiramente, vamos apresentar certos conceitos fundamentais sobre sistemas: sistemas dinâmicos, variáveis de estados, linearidade, invariância no tempo e modelo em espaço de estado. Na sequência, veremos exemplos de como modelar, simular, e analisar sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.

1.1. Conceitos Fundamentais

Sistema: é uma entidade em que as variáveis de saída são alterados pelas variáveis de entrada (controles).

Ex: motores elétricos, veículos, aeronaves, ecossistemas

Sistema dinâmico (ou com memória): quando ao menos uma das variáveis de saída do sistema no instante t **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro de certas variáveis de entrada.

Sistemas dinâmicos SISO, SIMO e MIMO: vamos considerar sistemas dinâmicos que apresentam m variáveis de entrada $u_1(t), \dots, u_m(t)$ e p variáveis de saída $y_1(t), \dots, y_p(t)$. Quando $m = p = 1$, dizemos que o sistema é **SISO** (Single-Input Single-Output). Quando $m = 1$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **SIMO** (Single-Input Multi-Output). Quando $m \geq 2$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **MIMO** (Multi-Input Multi-Output). Denominamos $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ de **vetor de entrada** (ou **vetor de controle**) e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ de **vetor de saída**.

1.1. Conceitos Fundamentais

Vetor de estado de um sistema dinâmico: o **vetor de estado** $x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ (ou, simplesmente, **estado**) de um sistema dinâmico no instante de tempo $t_0 \geq 0$ é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento do vetor de entrada $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$ (futuro), determina um **único** vetor de saída $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro das saídas, não importa a maneira como o sistema atingiu o vetor de estado $x(t_0)$, ou seja, $x(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0), \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

Dizemos que $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ é o **estado inicial** (ou a **condição inicial**) do sistema no **instante inicial** $t_0 \geq 0$. Denominamos $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de **variáveis de estado** do sistema, e dizemos que o sistema é de **ordem** n ($n = 1$ é primeira ordem, $n = 2$ é segunda ordem, etc).

1.1. Conceitos Fundamentais

Em muitos sistemas dinâmicos, escolhemos as **variáveis de estado** como sinais que correspondem aos **elementos armazenadores de energia** no sistema. Por exemplo, em **circuitos elétricos**, as **variáveis de estado** são: as **tensões nos capacitores** (energia armazenada no campo elétrico) e as **correntes dos indutores** (energia armazenada no campo magnético).

De agora em diante, todos os sistemas que trataremos serão dinâmicos e **causais**, ou seja, as variáveis de saída do sistema no instante t **não dependem** de valores **futuros** das variáveis de entrada. Desse modo, para simplificar, quando dizemos **sistema**, estaremos sempre nos referindo a um **sistema dinâmico causal**. Além disso, salvo menção contrária, vamos sempre assumir que as variáveis de entrada são funções **contínuas por partes** em relação ao tempo t .

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

- **Linear:** quando o sistema satisfaz ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} x_a(t_0), \\ u_a(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_a(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} x_b(t_0), \\ u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_b(t), t \geq t_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} x_c(t_0) = k_1 x_a(t_0) + k_2 x_b(t_0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq t_0$$

Ao tomarmos $k_1 = k_2 = 0$ na condição acima, concluímos que todo sistema linear satisfaz:

$$\boxed{x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .$

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando $u(t) = 0, t \geq t_0$: $x(t_0), u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y_0(t), t \geq t_0$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando $x(t_0) = 0$: $x(t_0) = 0, u(t), t \geq t_0 \} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0$

Concluimos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um **sistema linear** é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}$$

Propriedade de Decomposição

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

- **Não-Linear:** quando o sistema não é linear

Importante! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $u(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois o princípio da separação não é satisfeito. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico “Linearização de Sistemas Não-Lineares”.

1.1.2. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

1.1.2. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

- **Invariante no tempo:** quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = v_0, \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}(t_0 + T) = v_0, \\ \bar{u}(t) = u(t - T), t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \geq t_0 + T$$

Ilustração: (no quadro)

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

1.2. Modelo em Espaço de Estado

Modelo em espaço de estado: é a modelagem matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e as entradas do sistema dinâmico por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado), e que determina as relações entre as saídas, as variáveis de estado e as entradas por equações algébricas (uma para cada saída).

Por exemplo, se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))' \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))' \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, então o modelo em espaço de estado do sistema dinâmico é dado por:

1.2. Modelo em Espaço de Estado

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ dx_n(t)/dt &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) &= h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

onde $f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t), h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t) \in \mathbb{R}$ e

$$f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t))' \in \mathbb{R}^n$$

$$h(x, u, t) = (h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t))' \in \mathbb{R}^p$$

1.2. Modelo em Espaço de Estado

Veremos mais adiante que:

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned}dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t) \\y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

é **linear e invariante no tempo**, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz $n \times m$), $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz $p \times n$) e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz $p \times m$) são **matrizes constantes**.

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned}dx(t)/dt &= f(x(t), u(t)) \\y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

é **invariante no tempo**, onde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são aplicações continuamente diferenciáveis.

Exemplo 1: Sistema elétrico – circuito elétrico (no quadro)

Exemplo 2: Sistema mecânico – pêndulo simples (no quadro)

Exemplo 3: Sistema MIMO com 2 entradas e 2 saídas – manipulador robótico (no quadro)

1.4. Procedimentos

- 1.** Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema elétrico do Exemplo 1. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações. Dica: verifique o princípio da superposição com $u(t) = 0$, $u(t) = 1$ e $u(t) = \sin(t)$.
- 2.** Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema mecânico do Exemplo 2. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações com $\ell = 1$, $g = 9.8$, e $k = 0.5$, $k = 0$. Dica: teste o princípio da superposição para $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e com $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi$.
- 3.** No item anterior, justifique o comportamento observado (solução constante) com $\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$ quando $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Existe mais alguma outra solução constante? Justifique sua resposta.

Objetivos:

Vamos introduzir o conceito de ponto de equilíbrio, rever certos resultados de Álgebra Linear, e classificar o comportamento qualitativo das soluções de sistemas lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz que determina a dinâmica do sistema.

2.1. Ponto de Equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em equilíbrio quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente esta noção.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Dizemos que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação** ou **solução estacionária**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, se $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema acima **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

2.1. Ponto de Equilíbrio

Demonstração: Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Então, a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ é a curva constante $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Logo, $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x^e)$, $t \geq 0$, ou seja, $f(x^e) = 0$. Agora, suponha que $x^e \in D$ é tal que $f(x^e) = 0$. Considere a curva constante $x: [0, \infty) \rightarrow D$ definida por $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Assim, $\dot{x}(t) = 0 = f(x^e) = f(x(t))$, $t \geq 0$, ou seja, mostramos que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é uma solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Teorema: Considere novamente o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ apresentado acima. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Pontos de Equilíbrio do Pêndulo Simples

Exemplo 1: Considere o pêndulo simples do Lab 1 com $u = 0$ (sem controle)

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado.

Para encontramos todos os pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in \mathbb{R}^2$ do pêndulo simples, resolvemos:

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e) = x_2^e \Rightarrow x_2^e = 0$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e) = -\frac{g}{l} \sin(x_1^e) - \frac{k}{m} x_2^e \Rightarrow \sin(x_1^e) = 0$$

Logo, os pontos de equilíbrio são $x_e = (x_1^e, x_2^e) = (\ell\pi, 0)$, com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Mas, como $x_1 = \theta$ (ângulo que o pêndulo forma com o eixo vertical), concluímos que o pêndulo simples apresenta apenas 2 pontos de equilíbrio: $(0, 0)$ (pêndulo parado em baixo) e $(\pi, 0)$ (pêndulo parado em cima).

Exemplo 2: Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Note que $f(x) = Ax$ é de classe C^1 , pois $\partial f / \partial x = A$ é constante. Para encontrarmos os pontos de equilíbrio do sistema, devemos resolver $Ax^e = 0$. É evidente que $x_e = 0$ sempre é um ponto de equilíbrio. Relembre de Álgebra Linear que o conjunto $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ (**núcleo** de A) é um subespaço vetorial, e que $N(A) = \{0\}$ **se e somente se** $\det(A) \neq 0$. Logo:

- Se $\det(A) \neq 0$, então $x^e = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio
- Suponha que $\det(A) = 0$ com $A \neq 0$. Então, o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio, pois o conjunto $N(A) \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão maior ou igual a 1. Em particular, se $n = 2$ (sistema de segunda ordem), então $N(A)$ é um subespaço vetorial de dimensão 1, ou seja, uma reta passando pela origem do plano x_1 - x_2 .

2.2. Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada não-nula $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Relembre que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v$$

Note que, como $v \neq 0$,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in N(A - \lambda I) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Denominamos $\det(A - \lambda I)$ de **polinômio característico** de A . Logo, os autovalores de A são as raízes reais do seu polinômio característico. No entanto, é possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Em tal caso, dizemos que A possui **autovalores complexos**.

2.2. Revisão de Álgebra Linear

Relembre, ainda, que toda matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina o seguinte operador no \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$$

e que toda matriz quadrada invertível $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina a seguinte mudança linear de coordenadas (mudança de base)

$$z = Tx$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas originais do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , e $z = (z_1, \dots, z_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as novas coordenadas do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à nova base.

2.2. Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Temos então que A é a **representação** do operador no \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$$

em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível. Podemos então encontrar a matriz \bar{A} que representa o operador acima nas novas coordenadas $z = Tx$. Note que

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto x = T^{-1}z \mapsto \tilde{x} = Ax = AT^{-1}z \mapsto \tilde{z} = T\tilde{x} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z = \bar{A}z \in \mathbb{R}^n$$

onde $z = Tx$ e $\tilde{z} = T\tilde{x} = TAx$ são as novas coordenadas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax$ em relação à nova base, respectivamente. Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores: $\det(sI - \bar{A}) = \det(sTT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T(sI - A)T^{-1}) = \det((sI - A)T^{-1}T) = \det(sI - A)$.

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Motivação: Considere a seguinte EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R}$$

onde a é um parâmetro real constante. Relembre que

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

com

$$\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}, \quad e^{a \cdot 0} = 1$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 = 0$, a solução desta EDO é dada por

$$x(t) = e^{at} x_0, \quad t \geq 0$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = ae^{at} x_0 = ax(t), \quad t \geq 0$$

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$(At)^k = tA \cdot tA \cdots tA$ (k vezes). Temos que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em $t_0 = 0$, a solução deste sistema é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = A e^{At} x_0 = Ax(t), \quad t \geq 0$$

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Relembre que $x^e = 0$ é sempre ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = Ax$$

Portanto, se a condição inicial é $x_0 = x^e = 0$ em $t_0 = 0$, então a solução correspondente é $x(t) = x^e = 0$, $t \geq 0$.

De agora em diante, vamos considerar apenas sistemas de segunda ordem ($n = 2$), ou seja, sistemas em que a dinâmica evolui no plano. Nosso objetivo é analisar de maneira **qualitativa** o comportamento do sistema quando $x_0 \neq 0$. Por exemplo, caso $x_0 \neq 0$, queremos saber:

- Se as soluções convergem (retornam) assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ e, em tal caso, se isto se dá de maneira oscilatória ou não
- Se as soluções oscilam de maneira periódica, sem convergirem ao ponto de equilíbrio $x^e = 0$
- As soluções se afastam (divergem) do ponto de equilíbrio $x^e = 0$

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Ao invés de determinarmos as soluções de maneira **quantitativa** (analítica), tal análise **qualitativa** será realizada pelo esboço do **retrato de fase** do sistema (definido a seguir), o qual será determinado a partir dos autovalores da matriz A .

Dada uma condição inicial x_0 , a **trajetória (ou órbita)** da solução corresponde $x(t)$, $t \geq 0$, é a curva no plano (parametrizada pelo tempo $t \geq 0$)

$$O_{x_0} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), \text{ para algum } t \geq 0\}$$

Assim, as trajetórias do sistema exibem apenas o comportamento **qualitativo** do sistema. Por exemplo, uma trajetória O_{x_0} que é uma curva fechada no plano corresponde a uma solução oscilatória periódica no tempo, e uma trajetória que é somente um ponto corresponde a um ponto de equilíbrio. O **retrato de fase** do sistema é a união de todas as suas trajetórias (órbitas).

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Obs: Considere um sistema autônomo da forma $\dot{x} = f(x)$, onde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções e a **Obs 2** do capítulo anterior, pode-se mostrar que as **órbitas desse sistema (autônomo!) nunca podem se cruzar no retrato de fase** (e cada órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo) pois, caso contrário, teremos mais de uma solução para uma mesma condição inicial! Em particular, nenhuma órbita pode “encostar” em um ponto de equilíbrio!

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Para um sistema linear autônomo no plano ($n = 2$)

$$\dot{x} = Ax$$

onde $A \in \mathbb{R}^2$ é uma matriz quadrada não-nula, pode-se demonstrar que sempre existe $T \in \mathbb{R}^2$ invertível em que a matriz $\bar{A} = TAT^{-1}$ apresenta uma das seguintes formas

(forma canônica de Jordan – veja o livro do Chen):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, λ_1, λ_2 são autovalores reais distintos de A . No segundo caso e no terceiro, os autovalores reais de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. No último caso, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ são os autovalores complexos de A . Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

2.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Para determinarmos um esboço do retrato de fase do sistema, a ideia é:

- 1 Fazemos a mudança de coordenadas $z = Tx$, denominada de **coordenadas modais**
- 2 Esboçamos o retrato de fase do sistema nas **coordenadas modais** $z = Tx$
- 3 Voltamos às coordenadas originais por $x = T^{-1}z$, e esboçamos o retrato de fase na base canônica

Seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema (nas coordenadas canônicas originais) para uma dada condição inicial x_0 em $t_0 = 0$. Defina $z(t) = Tx(t)$, $t \geq 0$ (solução nas coordenadas modais). Assim,

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z(t)$$

Portanto, a solução do sistema nas coordenadas modais é dada por

$$z(t) = e^{\bar{A}t}z_0, \quad t \geq 0, \quad \text{com } z_0 = Tx_0$$

e, nas coordenadas originais é $x(t) = T^{-1}z(t)$, $t \geq 0$.

2.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{A}t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}$$

$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

2.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Desse modo:

- 1 Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó estável**
- 2 Se $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó instável**
- 3 Se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **sela**

2.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

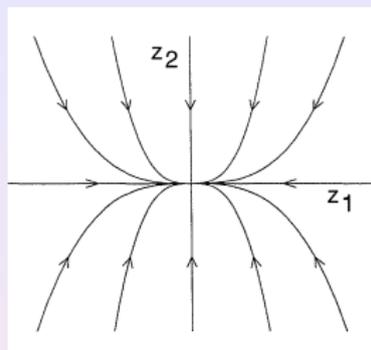


Figura: Retrato de fase de um **nó estável** nas **coordenadas modais**.

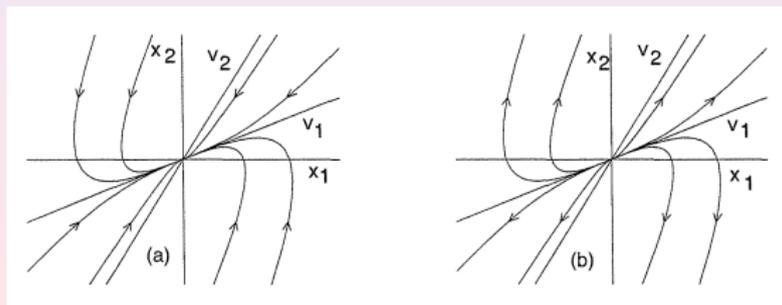


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó estável** e (b) **nó instável** nas **coordenadas originais**.

2.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

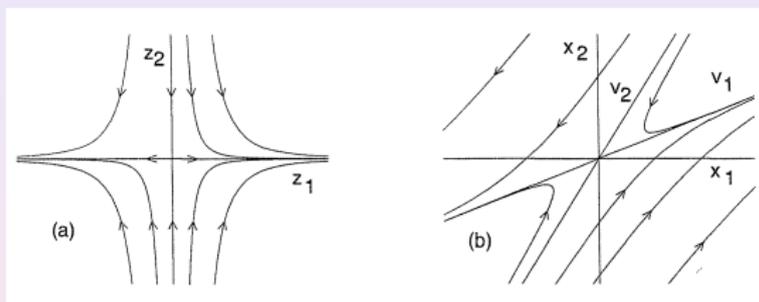


Figura: Retrato de fase de uma **sela** (a) nas **coordenadas modais** e (b) nas **coordenadas originais**.

2.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\alpha t} \cos \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$z_2(t) = -z_{10} e^{\alpha t} \sin \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Passando para coordenadas polares

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(z_2/z_1)$$

obtemos que

2.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

$$r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)} = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \tan^{-1}(z_2(t)/z_1(t)) = \theta_0 + \beta t$$

onde $r_0 = \sqrt{z_{10}^2 + z_{20}^2}$ e $\theta_0 = \tan^{-1}(z_{20}/z_{10})$. Desse modo:

- 1 Se $\alpha < 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ converge assintoticamente em espiral para a origem do plano z_1 - z_2 , com frequência (angular) de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **foco estável**
- 2 Se $\alpha > 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ se afasta (diverge) em espiral da origem do plano z_1 - z_2 , com frequência de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **foco instável**
- 3 Se $\alpha = 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ oscila periodicamente com frequência $\beta > 0$, sendo que a amplitude é determinada pelas condições iniciais z_{10}, z_{20} . Neste caso, as trajetórias das soluções $z(t)$ são círculos centrado na origem do plano z_1 - z_2 , e denominamos $x^e = 0$ de **centro**

2.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

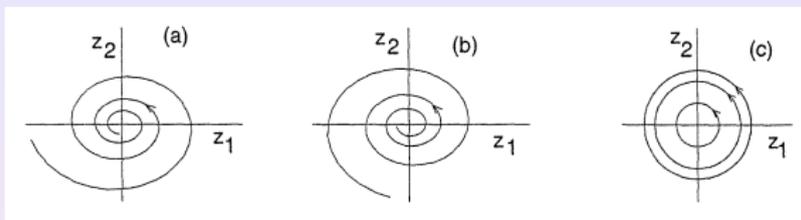


Figura: Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas modais**.

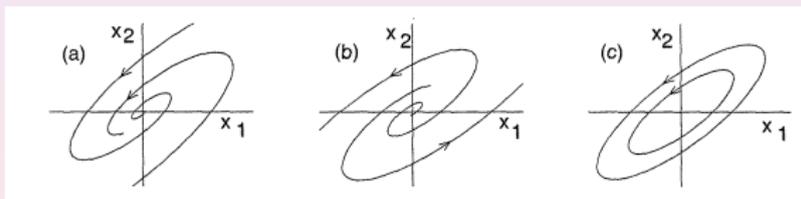


Figura: Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas originais**.

2.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Neste caso, temos duas situações:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Na primeira situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

- 1 Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) estável**
- 2 Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) instável**

2.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

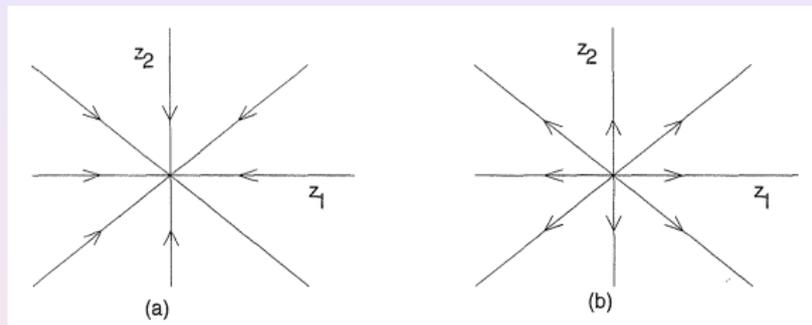


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó (ou estrela) estável** e (b) **nó (ou estrela) instável** nas **coordenadas modais**.

2.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Por fim, na segunda situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda t} + z_{20}te^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = z_{20}e^{\lambda t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

- 1 Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (impróprio) estável**
- 2 Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (impróprio) instável**

2.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

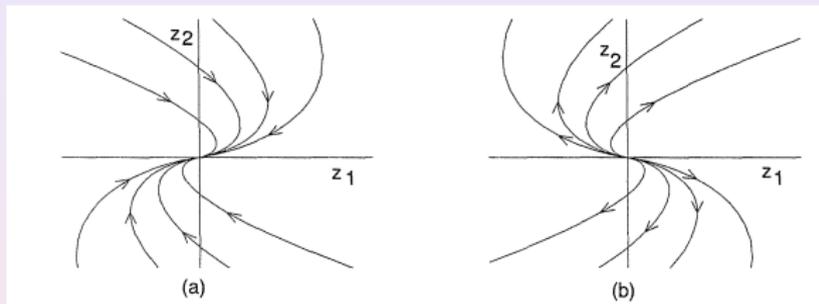


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó (impróprio) estável** e (b) **nó (impróprio) instável** nas **coordenadas modais**.

Considere um sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax$$

Com base nos autovalores λ_1, λ_2 da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, obtemos a seguinte classificação do ponto de equilíbrio $x^e = 0$:

- 1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), nó instável ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$), sela ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)
- 2 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \neq 0$: foco estável ($\alpha < 0$), foco instável ($\alpha > 0$), centro ($\alpha = 0$)
- 3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda < 0$), nó instável ($\lambda > 0$)

Importante: como em todos os casos acima a matriz A não possui autovalores nulos, concluímos que $\det(A) \neq 0$, ou seja, $x^e = 0$ é o **único** ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que: (a) órbitas correspondentes a condições iniciais distintas nunca podem se cruzar no retrato de fase; (b) uma órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo; e (c) uma órbita nunca pode “encostar” em $x^e = 0$ (ponto de equilíbrio).

2.5. Procedimentos

1. Comprove por simulação que $x^e = (0, 0)$ e $x^e = (\pi, 0)$ são realmente pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Verifique também que o pêndulo simples é não-linear. Dica: simule o pêndulo para a condição inicial $x(0) = (\pi/2, 0)$.
2. Considere o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax$$

Para cada um dos casos abaixo, classifique o ponto de equilíbrio $x^e = 0$, esboce a retrato de fase com base nos autovalores de A , e determine o retrato de fase por simulação para diversas condições iniciais. Dica: utilize o pacote **pplane** do Matlab.

2.5. Procedimientos

1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

3

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Lab 3 – Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano

Objetivos:

Vamos introduzir o conceito de estabilidade estrutural e classificar o comportamento qualitativo local do retrato de fase de sistemas não-lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz do sistema linearizado.

3.1. Estabilidade Estrutural

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Definimos a **norma euclidiana** de A por $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^2}$. Temos o seguinte resultado da Teoria de Perturbação de Matrizes:

Proposição (Continuidade dos Autovalores): Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz constante) satisfaz $\|\Delta A\| < \delta$, então a distância entre autovalores das matrizes $A + \Delta A$ e A é menor que ϵ , ou seja, $|\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)| < \epsilon$.

Considere o sistema linear autônomo no plano (**sistema nominal**)

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ é o vetor (coluna) de estado e os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são **distintos e não-nulos**, e o **sistema perturbado**

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x$$

onde $\Delta A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz **constante**.

3.1. Estabilidade Estrutural

Concluimos assim da proposição acima que, para **pequenas perturbações** ΔA , a **estabilidade e o tipo do ponto de equilíbrio** $x^e = 0$ **são preservados**. Mais precisamente, se o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema nominal** $\dot{x} = Ax$ é do tipo **nó estável** (os autovalores de A são reais e negativos), **nó instável** (reais e positivos), **sela** (A possui um autovalor negativo e outro positivo), **foco estável** (os autovalores de A são complexos conjugados com parte real negativa), **foco instável** (complexos conjugados com parte real positiva), então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema perturbado** $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ será do tipo **nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável**, respectivamente.

Dizemos que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Assim, sistemas lineares no plano da forma $\dot{x} = Ax$ são estruturalmente estáveis quando $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo nó (com autovalores distintos), sela ou foco.

3.1. Estabilidade Estrutural

Importante: Não há estabilidade estrutural quando o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema nominal $\dot{x} = Ax$ é do tipo centro (i.e. a matriz A possui autovalores complexos conjugados com parte real nula). Por exemplo, considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda_{1,2} = \pm j)$$

Assim, para

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

temos que os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ são $\lambda_{1,2} = \mu \pm j$. Portanto, se $\mu > 0$, então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema perturbado será do tipo foco instável e, se $\mu < 0$, será do tipo foco estável. Desse modo, o comportamento qualitativo do retrato de fase do sistema nominal não é preservado sob pequenas perturbações no campo de vetores $f(x) = Ax$.

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Considere um sistema não-linear da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (i.e. $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é contínua). Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e) = 0$.

A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio x^e é dada por

$$f(x) = \underbrace{f(x^e)}_{=0} + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS}$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x) \cong \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} \underbrace{(x - x^e)}_{=x_\delta}, \quad \text{para } x_\delta = x - x^e \cong 0.$$

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Agora, seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$ em $t_0 = 0$, e considere o **desvio** $x_\delta(t) = x(t) - x^e$ da solução $x(t)$ em relação ao ponto de equilíbrio x^e . Assim, para $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ (pequenos desvios), temos

$$\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) \cong \underbrace{\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e}}_{\triangleq A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{(x(t) - x^e)}_{=x_\delta} = Ax_\delta$$

Denominamos

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta = \left[\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} \right] x_\delta$$

de **sistema linearizado** associado ao sistema $\dot{x} = f(x)$ no ponto de equilíbrio x^e .

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Relembre que a solução do sistema linear autônomo $\dot{x}_\delta = Ax_\delta$ para a condição inicial $\delta x(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $x_\delta(t) = e^{At}x_\delta(0)$, $t \geq 0$. Portanto, é razoável esperarmos que

$$x(t) = x^e + x_\delta(t) \cong x^e + e^{At}x_\delta(0) = x^e + e^{At}(x(0) - x^e), \quad t \geq 0$$

desde que $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$, ou seja, $x(t) \cong x^e$. Em particular, é razoável esperarmos que o **retrato de fase** do **sistema não-linear** $\dot{x} = f(x)$ apresente, nas **proximidades** do ponto do equilíbrio x^e , um **comportamento qualitativo semelhante** ao do retrato de fase do sistema linear

$\dot{x}_\delta = Ax_\delta = [\partial f(x^e)/\partial x]x_\delta$ (após uma **translação** por x^e). Isto é de fato verdade, conforme o teorema apresentado a seguir.

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Teorema de Hartman-Grobman: Considere um sistema não-linear autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, e considere o sistema linearizado associado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right] x_\delta$$

Assuma que os autovalores de A possuem **parte real não-nula**. Então, o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado associado.

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Teorema de Hartman-Grobman (continuação): Em particular, quando $n = 2$ (**sistema no plano**) e os 2 autovalores da matriz A são **distintos e com parte real não-nula**, se $x_\delta^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, respectivamente.

Devido ao Teorema de Hartman-Grobman acima, dizemos que o sistema linearizado permite analisar **localmente** o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ **em torno** do ponto de equilíbrio x^e .

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Obs: Quando $n = 2$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica (por exemplo, cada componente de f é a soma, diferença, produto ou quociente de funções polinomiais ou trigonométricas), então o resultado do Teorema de Hartman-Grobman permanece válido mesmo quando a matriz A possui 2 autovalores **repetidos fora do eixo imaginário**, ou seja, se $x_\delta^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável ou nó instável com autovalores iguais, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável ou nó instável, respectivamente.

3.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Exemplo: Considere o circuito *tunnel-diode* abaixo:

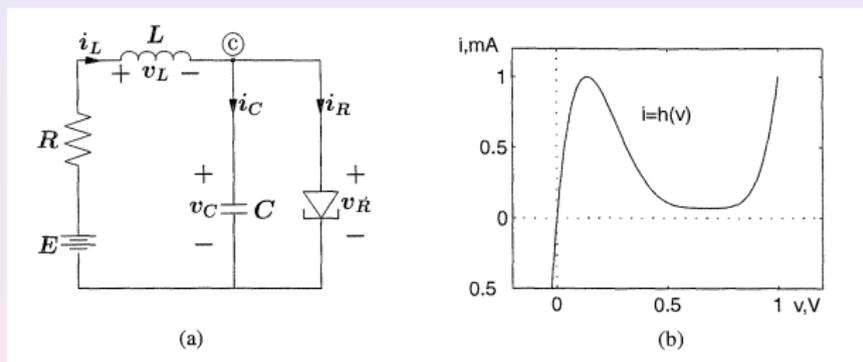


Figura: (a) Circuito *tunnel-diode*, e (b) característica v_r-i_r do diodo.

Considerando que $u = E$ (controle), $x_1 = v_C$ e $x_2 = i_L$, temos que o modelo de estado do circuito é dado por:

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} (-h(x_1) + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (-x_1 - Rx_2 + u)$$

Para $u = 1.2\text{V}$, $R = 1.5\text{k}\Omega$, $C = 2\text{pF} = 2 \times 10^{-12}\text{F}$, $L = 5\mu\text{H}$, e considerando que o tempo é medido em nanosegundos e as correntes em mA, temos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = 0.5(-h(x_1) + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2)$$

Suponha que

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

Fazendo $f(x_1^e, x_2^e) = (f_1(x_1^e, x_2^e), f_2(x_1^e, x_2^e)) = (0, 0)$, obtemos 3 pontos de equilíbrio:

$$Q_1 = (0.063, 0.758), \quad Q_2 = (0.285, 0.61), \quad Q_3 = (0.884, 0.21)$$

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

Temos que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -0.5dh(x_1)/dx_1 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

com

$$dh(x_1)/dx_1 = 17.76 - 207.58x_1 + 668.86x_1^2 - 905.25x_1^3 + 418.6x_1^4$$

Assim:

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_1} = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -3.57, \lambda_2 = -0.33$$

$$A_2 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_2} = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.77, \lambda_2 = -0.25$$

$$A_3 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_3} = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1.33, \lambda_2 = -0.4$$

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

Portanto: Q_1 é um nó estável, Q_2 é do tipo sela, e Q_3 é um nó estável. O retrato de fase abaixo comprova nossa análise **local** pelo sistema linearizado. Observe a presença das separatrizes (uma **separatriz** é uma curva que divide o retrato de fase em regiões com comportamentos qualitativos distintos). Assim, um circuito *tunnel-diode real* funciona como um circuito biestável: os 2 estados são Q_1 e Q_3 (na prática, pequenos ruídos externos forçarão a órbita a sair das separatrizes).

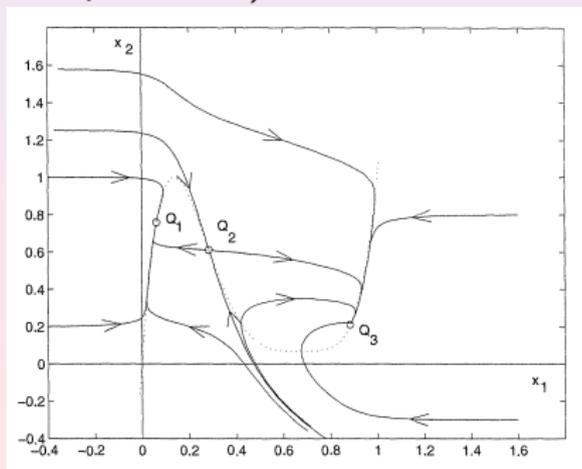


Figura: Retrato de fase do circuito *tunnel-diode*.

3.3. Procedimentos

1. Para o circuito *tunnel-diode* do exemplo anterior, utilize o pacote simbólico do Matlab para calcular os pontos de equilíbrio e o sistema linearizado associado. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase utilizando o pacote **pplane**. Interprete o retrato de fase, concluindo que um circuito *tunnel-diode* **real** opera como um circuito biestável. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento das separatrizes (fenômeno **global**).

2. Classifique os pontos de equilíbrio do pêndulo simples e esboce o retrato de fase. Relembre que o modelo de estado do pêndulo simples com $u = 0$ (sem controle) é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $m = \ell = 1$, $g = 9.8$ e $k = 0.1$.

3. Considere a equação de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\epsilon = 0.2$ é um parâmetro. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase. Note a presença de um **ciclo-limite** (órbita fechada). Assim, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a amplitude de oscilação independe da condição inicial. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo limite (fenômeno **global**).

Lab 4 – Projeto: Estabilização de um Pêndulo Invertido com Base na Configuração Controlador-Observador

Objetivos:

Vamos inicialmente analisar algumas das propriedades de um modelo linear simplificado de um pêndulo invertido. Na sequência, projetaremos uma realimentação de estado com o objetivo de se estabilizar o pêndulo invertido, ou seja, manter o pêndulo equilibrado na vertical em repouso. Por fim, com base no princípio da separação, vamos projetar um observador de estado para então utilizarmos a configuração controlador-observador na estabilização do sistema.

4.1. Modelo Linear Simplificado de um Pêndulo Invertido

Considere o pêndulo invertido mostrado abaixo:

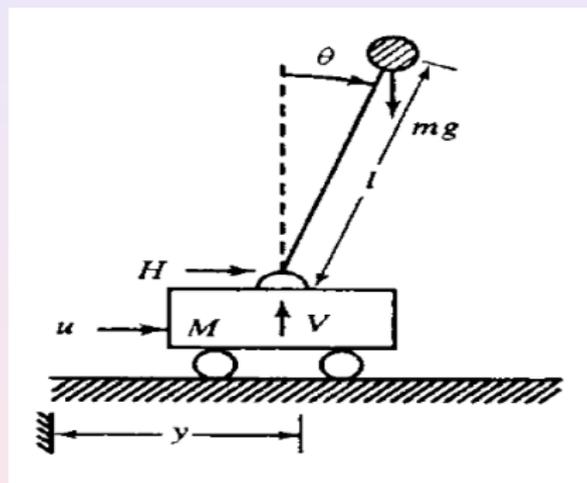


Figura: Pêndulo invertido.

4.1. Modelo Linear Simplificado de um Pêndulo Invertido

Um modelo de estado linear simplificado deste sistema é dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (m+M)g/(ML) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/(ML) \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

onde:

- $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ é o vetor de estado
- $x_1 = y$ é a posição do carro
- $x_2 = \dot{y}$ é a velocidade do carro
- $x_3 = \theta$ é o ângulo da haste do pêndulo com o eixo vertical
- $x_4 = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da haste do pêndulo
- u é a força aplicada no carro (controle)
- m é a massa da esfera do pêndulo, M é a massa do carro, L é o comprimento da haste, e g é a aceleração de gravidade

Este modelo é válido quando $\theta \cong 0$ e $\dot{\theta} \cong 0$. Veja o livro do Chen, Exemplo 2.8, p. 22, para maiores detalhes.

4.2. Procedimentos

Considere que $m = 0.5\text{kg}$ (massa da esfera do pêndulo), $M = 1\text{kg}$ (massa do carrinho), $L = 1\text{m}$ (comprimento da haste) e $g = 9.81\text{m/s}^2$ (aceleração da gravidade).

1. A origem $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável (estabilidade interna)? Justifique, e realize algumas simulações para comprovar sua resposta.
2. Encontre a função de transferência $G(s)$ do sistema. O sistema é BIBO-estável (estabilidade externa)? Justifique sua resposta. Note que o sistema apresenta um zero no SPD (fase não-mínima).
3. Verifique a controlabilidade e a observabilidade do sistema (a saída $y = x_1$ é a posição do carro). Note que os polos de $G(s)$ coincidem com os polos (autovalores) da matriz A . Isto era esperado? Justifique sua resposta.
4. O sistema continua sendo observável caso a saída fosse $y = x_3$ (ângulo da haste do pêndulo)? Justifique sua resposta. Observe que há um cancelamento pólo-zero na função de transferência associada à saída $y = x_3$. Isto era esperado? Justifique.

4.2. Procedimentos

5. Os polos de malha-fechada podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo através de uma realimentação de estado da forma $u = -Kx$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, projete uma realimentação de estado com o objetivo de estabilizar a origem, ou seja, manter o pêndulo equilibrado na vertical em repouso e com o carro na posição $y = x_1 = 0$. O projeto da matriz de ganho K deverá atender à seguinte especificação: para as condições iniciais $x_3(0) = \theta(0) = \pi/4$ (45°) e $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$, tem-se que $x_3(t) = \theta(t)$ entra e permanece na faixa de ± 0.061 ($\pm 3.5^\circ$) em $t_s \cong 3.0s$. **Dica:** escolha polos repetidos por tentativa e erro.

Agora, considerando que o controle satura em $\pm 40N$, analise os resultados de simulação obtidos para $x(0) = (0, 0, \pi/4, 0)$, observando o desempenho dinâmico de $x(t)$ e o esforço de controle (o controle $u(t)$ corresponde à força aplicada no carro). Repita para $t_s \cong 1.6s$. Por fim, responda: os polos de malha-fechada podem ser escolhidos tão rápidos quanto se queira? Justifique.

4.2. Procedimentos

6. Refaça o item anterior com a especificação de $t_s \cong 3.0s$, mas agora assumindo que os estados não podem ser realimentados. Utilize a configuração controlador-observador para tal, e relembre o princípio da separação. Compare os resultados de simulação obtidos, considerando que os polos da dinâmica do erro de estimação (ou seja, os polos de $A - LC$) são 2 vezes mais rápidos que os polos da realimentação de estado (i.e. de $A - BK$). Analise os resultados de simulação obtidos considerando que $x(0) = (0, 0, \pi/4, 0)$, e $\hat{x}(0) = x(0)$, $\hat{x}(0) = (0.05, 0, \pi/5, 0.1)$, $\hat{x}(0) = (0.05, 0, 0, 0)$, $\hat{x}(0) = (0.3, 0, \pi/4, 0)$. Não se esqueça de verificar se a especificação de $t_s \cong 3.0s$ foi atendida. Note que, quando $\hat{x}(0) = x(0)$, então $\hat{x}(t) = x(t)$ para $t \geq 0$. Isto era esperado? Na prática, é possível termos $\hat{x}(0) = x(0)$? Justifique. Agora, repita as simulações, mas considerando que os polos de $A - LC$ são 3 e 5 vezes mais rápidos que os de $A - BK$.

6 (continuação). Conclua que, para o modelo do pêndulo invertido em questão, a configuração controlador-observador atende à especificação de $t_s \cong 3.0s$ desde que $\hat{x}_1(0) \cong x_1(0) = y(0)$ ($|\hat{x}_1(0) - x_1(0)| \cong 0.05m$) e os polos de $A - LC$ (observador) sejam relativamente rápidos em relação aos polos de $A - BK$ (realimentação). Como que a condição $\hat{x}_1(0) \cong x_1(0) = y(0)$ poderia ser assegurada na implementação prática do controlador-observador? Justifique. Ressaltamos que, como não estamos medindo x_2 , x_3 e x_4 , então é razoável setarmos $\hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = \hat{x}_4(0) = 0$ no observador.

Lab 5 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares

Objetivos:

Trataremos do problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares. Para isso, primeiramente vamos introduzir o conceito de modelo interno. Em seguida, estudaremos uma estrutura de controle que permite resolver o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação através de uma realimentação de estado. Por fim, aplicaremos as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

5.1. Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw\end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída com $m \geq p$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{q \times p}$ são matrizes **constantes**. Assuma que $r(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, é um dado **vetor de referência** escolhido, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

5.2. Modelo Interno

Vamos considerar que **cada componente** do vetor de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ e do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, é solução de uma **mesma** equação diferencial linear homogênea conhecida, ou seja,

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad t \geq 0$$

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} w_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, q, \quad t \geq 0$$

para uma determinada condição inicial $r_i^{(k-1)}(0), \dots, r_i^{(1)}(0), r_i^{(0)}(0)$ e $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$, respectivamente, onde $D = d/dt$ é o operador diferencial, $k \geq 0$ é a ordem da equação diferencial, e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ são constantes reais. Portanto, a EDO

$$\beta(D)g(t) = 0$$

modela a dinâmica do vetor de referência $r(t)$ e do vetor de perturbação $w(t)$.

5.2. Modelo Interno

Ressaltamos que apesar do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, ser não-mensurável, estamos assumindo que conhecemos a equação diferencial $\beta(D)w_j(t) = 0$ que cada componente $w_j(t)$, $t \geq 0$, satisfaz. No entanto, a princípio as condições iniciais $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$ são **desconhecidas**.

Obs: Podemos sempre escolher

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \boxed{\text{produto dos denominadores de } R_i(s) \text{ e } W_j(s)} \\ &= s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

Exemplo 1: Suponha que $p = q = 1$ com $r(t) = A_1 t$ (rampa de coeficiente angular A_1) e $w(t) = B_1$ (degrau de amplitude B_1 desconhecida em princípio), $t \geq 0$. Então, $R(s) = A_1/s^2$, $W(s) = B_1/s$ e

$$\beta(s) = s^2$$

(e não $\beta(s) = s^2 \cdot s = s^3!$) pois

$$\beta(D)r(t) = D^2 r(t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\beta(D)w(t) = D^2 w(t) = 0, \quad t \geq 0$$

5.2. Modelo Interno

Exemplo 2: Suponha que $p = q = 2$ com

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2 t}_{\text{rampa}}), \quad t \geq 0$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_2 \text{sen}(2t)}_{\text{senoide}}, \underbrace{B_3}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_4 \text{sen}(5t)}_{\text{senoide}}), \quad t \geq 0$$

onde $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ são constantes com B_1, B_2, B_3, B_4 desconhecidas em princípio. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s^2$, $W_1(s) = B_1/s + 2B_2/(s^2 + 4)$, $W_2(s) = B_3/s + 5B_4/(s^2 + 25)$ e

$$\beta(s) = s^2(s^2 + 4)(s^2 + 25) = s^2(s^4 + 29s^2 + 100) = \boxed{s^6 + 29s^4 + 100s^2}$$

pois

$$\beta(D)g(t) = (D^6 + 29D^4 + 100D^2)g(t) = [D^2(D^2 + 4)(D^2 + 25)]g(t) = 0, \quad t \geq 0$$

para $g(t) = r_1(t), r_2(t), w_1(t), w_2(t), t \geq 0$.

5.2. Modelo Interno

Seja $g(t) = r_1(t), \dots, r_p(t), w_1(t), \dots, w_q(t)$, $t \geq 0$. É fácil ver que $g(t)$, $t \geq 0$, é solução da EDO

$$\beta(D)g(t) = (D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)g(t) = 0$$

se e somente se $y_\beta(t) = x_{\beta_1}(t) = g(t)$, $t \geq 0$, é a saída do modelo de estado abaixo com as mesmas condições iniciais:

$$\dot{x}_\beta = \begin{bmatrix} \dot{g}^{(0)} \\ \dot{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{g}^{(k-2)} \\ \dot{g}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}}_{= M \in \mathbb{R}^{k \times k}} \underbrace{\begin{bmatrix} g^{(0)} \\ g^{(1)} \\ \vdots \\ g^{(k-2)} \\ g^{(k-1)} \end{bmatrix}}_{= x_\beta \in \mathbb{R}^k}$$

$$y_\beta = \underbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{= P \in \mathbb{R}^{1 \times k}} x_\beta = x_{\beta_1}$$

Logo, este sistema é a representação em espaço de estado da EDO acima. Temos que $\det(sI - M) = \beta(s)$, ou seja, os polos (autovalores) de M coincidem com as raízes de $\beta(s) = 0$.

5.2. Modelo Interno

Defina o sistema (p cópias bloco diagonal do sistema anterior)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de estado, $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada deste sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

com $\beta(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$. Denominamos o sistema acima de **modelo interno** (da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$).

5.2. Modelo Interno

Pode-se verificar que o modelo interno é controlável, e que sua matriz de transferência é dada pela matriz bloco diagonal

$$G_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m = \begin{bmatrix} 1/\beta(s) & & & \\ & 1/\beta(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\beta(s) \end{bmatrix}_{p \times p}$$

com $Y_m(s) = G_m(s)E(s)$ e considerando que a saída é

$$y_m = \underbrace{\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & P \end{bmatrix}}_{= C_m \in \mathbb{R}^{p \times pk}} x_m = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,1+k} \\ \vdots \\ x_{m,1+(p-1)k} \end{bmatrix}}_{= y_m \in \mathbb{R}^p}, \text{ onde } P = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times k}$$

Obs: Assuma que cada $r_i(t)$ e $w_j(t)$ são do tipo degrau, ou seja, $\beta(s) = s$. Então, $M = 0$, $N = 1$, $A_m = 0$ e $B_m = I$, ou seja,

$$\dot{x}_m = e. \text{ Logo: } x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + x_m(0).$$

5.3. Sistema Aumentado

Relembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew,$$

$$y = Cx + Fw$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m e$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m (r - Cx - Fw) = -B_m Cx + A_m x_m - B_m Fw + B_m r$$

Considere o vetor de estado **aumentado** $x_a = (x, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$.

Obtemos assim o **sistema aumentado**:

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r$$

$$y_a = y = \underbrace{[C \quad 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw$$

5.4. Estrutura de Controle

Considere a estrutura de controle em malha-fechada mostrada abaixo:

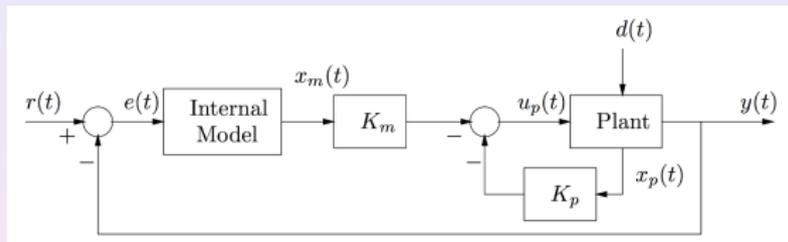


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

O próximo resultado apresenta condições para que esta estrutura de controle resolva o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Veremos que se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

5.4. Estrutura de Controle

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável, isto é, o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Então, a realimentação de estado

$$u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$$

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, soluciona o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0$$

para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, temos que $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema aumentado em malha-fechada com tal realimentação $u = -K_a x_a$ (para $w = r = 0$). Em particular, o sistema aumentado em malha-fechada é BIBO-estável (para $x_a(0) = 0$).

5.4. Estrutura de Controle

Prova: Com base na Figura acima, no sistema aumentado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema aumentado em malha-fechada com a realimentação $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{= A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{= B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$

$$e = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 \end{bmatrix}}_{C_e = -C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{= D_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

5.4. Estrutura de Controle

Como o par (A_a, B_a) é controlável, podemos sempre encontrar uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Portanto, $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (com $u_e = (w, r) = (0, 0)$). Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(A_e t) x_a(0) = 0$, para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ ($u_e = 0$). Relembre que (resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo):

$$e(t) = \underbrace{C_e \exp(A_e t) x_a(0)}_{=e_0(t)} + \underbrace{\mathcal{G}_e(t) * u_e(t)}_{=e_{esn}(t)}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_e \exp(A_e t) x_a(0) = 0$$

para todo $x_a(0) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Assim, resta-nos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0$$

5.4. Estrutura de Controle

Temos que

$$G_e(s) = (G_{e_{ij}}(s)) = C_e(sI - A_e)^{-1}B_e + D_e, \text{ com } E(s) = G_e(s)U_e(s)$$

Pode-se mostrar que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = G_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)}$$

onde $\eta_{ij}(s)$ é um polinômio em s . Portanto,

$$E_i(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)} U_{e_j}(s)$$

Concluimos então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0$$

pois algum fator do polinômio $\beta(s)$ cancelará os polos de $U_{e_j}(s)$ (relembre que os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ não coincidem com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$, por hipótese). Isto termina a prova.

5.4. Estrutura de Controle

Obs 1: A estrutura de controle da Figura acima é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta) e $K_a = [K_m \quad K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s) = 0$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, K_a .

5.4. Estrutura de Controle

Obs 2: Para determinarmos uma matriz de ganho $K_a = [K_m \ K]$ que soluciona o problema de controle em questão, necessitamos apenas montar as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado e verificar se o par (A_a, B_a) é controlável. Caso o par (A_a, B_a) seja controlável, então basta determinarmos $K_a = [K_m \ K]$ de maneira que os polos da matriz $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com as raízes de $\beta(s) = 0$. Logo, o sistema aumentado é utilizado apenas para fins de cálculo de $K_a = [K_m \ K]$! Para controlarmos o sistema em malha-fechada, basta implementarmos o modelo interno e aplicarmos a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta.

5.4. Estrutura de Controle

Obs 3: Note que o modelo de estado do sistema aumentado em malha-fechada com a realimentação $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por:

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{= A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{= B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$
$$y_a = y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix}}_{= D_a} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$

Logo, a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada é determinada por

$$G_a(s) = (G_{a_{ij}}(s)) = C_a(sI - A_e)^{-1} B_e + D_a, \text{ com } Y(s) = G_a(s) U_e(s)$$

5.4. Estrutura de Controle

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação:

- 1 A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**
- 2 Considere o **modelo interno** (p -cópias de M, N):

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$

onde

5.4. Estrutura de Controle

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

- 3 Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho

$K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$, com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$.

- 4 Implemente o modelo interno e aplique a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início desta seção.

5.5. Exemplo

Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo

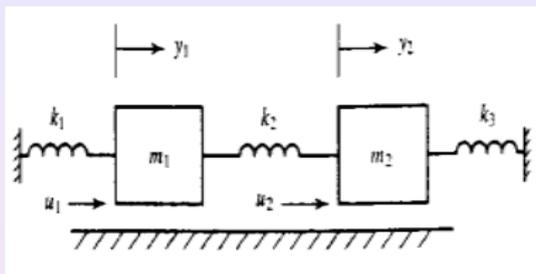


Figura: Sistema massa-mola.

o qual consiste de 2 blocos de massas m_1 e m_2 conectados por 3 molas com constantes de mola k_1, k_2, k_3 . As variáveis de controle são as forças u_1, u_2 aplicadas em cada bloco, e as variáveis de saída são os deslocamentos y_1 e y_2 de cada bloco. Por simplicidade, assumimos que não há atrito entre os blocos e a superfície.

Com base na 2ª Lei de Newton, temos que

$$m_1 \ddot{y}_1 = u_1 - k_1 y_1 - k_2 (y_1 - y_2)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = u_2 + k_2 y_1 - (k_1 + k_2) y_2$$

5.5. Exemplo

Vamos agora representar o sistema em modelo de estado.

Definindo o vetor de controle $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, o vetor de saída $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, e o vetor de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ com

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \dot{y}_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = \dot{y}_2$$

obtemos que

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{=u}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x}$$

5.5. Exemplo

Considere que há uma perturbação $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ na **entrada** do sistema, ou seja, $E = B$ com

$$\dot{x} = Ax + Bu + \underbrace{E}_{=B} w$$

$$y = Cx$$

e suponha que

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2 + A_3 \text{sen}(t)}_{\text{senoide}}), \quad t \geq 0$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{B_2}_{\text{degrau}}), \quad t \geq 0$$

onde A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 são constantes com B_1, B_2 desconhecidas. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s + A_3/(s^2 + 1)$, $W_1(s) = B_1/s$, $W_2(s) = B_2/s$, e

$$\boxed{\beta(s) = s(s^2 + 1) = s^3 + s} \quad (k = 3)$$

5.5. Exemplo

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o modelo interno é dado por ($p = 2$ cópias)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_m} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B_m} e$$

Logo, as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado são, respectivamente,

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}_{10 \times 2}$$

5.6. Procedimentos

1. Determine e analise a matriz de transferência do sistema massa-mola (malha-aberta).
2. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 5.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5 \text{sen}(t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 2$ e $w_2(t) = 3$, incidindo a partir de $t \geq 50$ s. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m]$ na realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ para o sistema massa-mola de modo a atender à seguinte especificação em malha-fechada: para a condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) = (0, 0)$, tem-se que as componentes $e_1(t)$ e $e_2(t)$ do erro de rastreamento $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$ entram e permanecem na faixa de ± 0.2 m em $t_s \cong 10.0$ s em relação à referência dada acima. **Dica:** escolha $n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos repetidos por tentativa e erro.

2 (continuação). Agora, considerando que os controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$ (correspondentes às forças aplicadas nas massas m_1 e m_2 , respectivamente) saturam em $\pm 20\text{N}$, analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada para $x(0) = 0$ e $x(0) \neq 0$, verificando se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido. Analise a matriz de transferência $G_a(s)$ do sistema aumentado em malha-fechada ($Y(s) = G_a(s)U_e(s)$), e analise os resultados de simulação obtidos (referência, perturbação, estado, saída, erro, controle). Repita os procedimentos anteriores, mas agora para polos 50%, 2 vezes e 3 vezes mais rápidos que os polos determinados para $t_s \cong 10\text{s}$. Por fim, responda: os polos de malha-fechada podem ser escolhidos tão rápidos quanto se queira? Justifique.

3. Determine os polos de malha-fechada considerando que:

$$K_a = \begin{bmatrix} 4.5975 & 3.5337 & 0.9908 & 0.4067 & -1.8253 & 0.0778 & -4.9807 & -0.0386 & 0.1826 & -0.1056 \\ 0.6755 & 0.2034 & 4.1541 & 4.4480 & 0.0386 & 0.1659 & 0.1402 & -1.8253 & 0.5435 & -4.9345 \end{bmatrix}$$

Simule o sistema em malha-fechada com tal matriz de ganho, observando uma diminuição significativa do tempo de acomodação t_s e também do esforço de controle (picos no regime transitório) em comparação à matriz de ganho projetada no Item 1 para $t_s \cong 10s$. **Conclusão:** apesar de podermos posicionar os polos de malha-fechada (i.e. os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$) arbitrariamente no SPE, de maneira geral não é uma tarefa fácil escolhê-los adequadamente, no sentido de se obter um compromisso razoável entre desempenho e esforço de controle!

5.6. Procedimentos

Obs: Para o sistema massa-mola, temos que:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

E, para o modelo interno:

$$\dot{x}_{m1} = x_{m2}$$

$$\dot{x}_{m2} = x_{m3} = \ddot{x}_{m1}$$

$$\dot{x}_{m3} = -x_{m2} + e_1$$

$$\dot{x}_{m4} = x_{m5}$$

$$\dot{x}_{m5} = x_{m6} = \ddot{x}_{m4}$$

$$\dot{x}_{m6} = -x_{m5} + e_2$$

5.6. Procedimentos

Obs (continuação):

Assim, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}u_i &= -K_a^i x_a = -K^i x - K_m^i x_m \\ &= -K_{i1}x_1 - K_{i2}x_2 - K_{i3}x_3 - K_{i4}x_4 \\ &\quad - K_{m_{i1}}x_{m1} - K_{m_{i2}}x_{m2} - K_{m_{i3}}x_{m3} - K_{m_{i4}}x_{m4} - K_{m_{i5}}x_{m5} - K_{m_{i6}}x_{m6} \\ &= -K_{i1}x_1 - K_{i2}\dot{x}_1 - K_{i3}x_3 - K_{i4}\dot{x}_3 \\ &\quad - K_{m_{i1}}x_{m1} - K_{m_{i2}}\dot{x}_{m1} - K_{m_{i3}}\ddot{x}_{m1} - K_{m_{i4}}x_{m4} - K_{m_{i5}}\dot{x}_{m4} - K_{m_{i6}}\ddot{x}_{m4} \\ &= - \underbrace{(K_{i1}x_1 + K_{i3}x_3 + K_{m_{i1}}x_{m1} + K_{m_{i4}}x_{m4})}_{\text{termo } P} \\ &\quad - \underbrace{(K_{i2}\dot{x}_1 + K_{i4}\dot{x}_3 + K_{m_{i2}}\dot{x}_{m1} + K_{m_{i3}}\ddot{x}_{m1} + K_{m_{i5}}\dot{x}_{m4} + K_{m_{i6}}\ddot{x}_{m4})}_{\text{termo } D}\end{aligned}$$

Logo, temos uma realimentação com ação PD (Proporcional-Derivativa) nos estados da planta e do modelo interno!

Obs (continuação):

Além disso, lembre que, no modelo interno:

$$\frac{X_{m1}(s)}{E_1(s)} = \frac{X_{m4}(s)}{E_2(s)} = \frac{1}{\beta(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

Portanto, a realimentação projetada tem ação integral nos erros de rastreamento $e_1 = r_1 - y_1$, $e_2 = r_2 - y_2$.

Concluimos então que o controlador projetado tem ação PID (Proporcional-Integral-Derivativa) nos erros de rastreamento!

Lab 6 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares com Observador de Estado

Objetivos:

Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares visto no Lab 5, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Para isso, utilizaremos um observador de estado. Aplicaremos então as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 5.4 do Lab 5 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

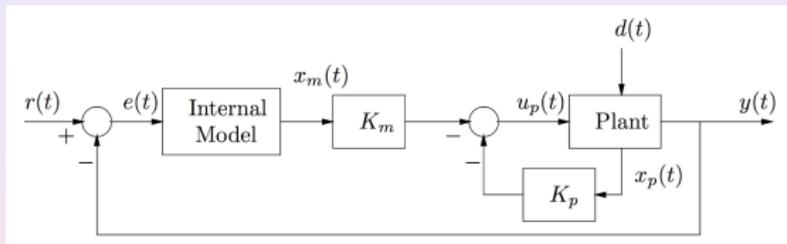


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas.

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\hat{x} - K_mx_m$.

Primeiramente, lembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw\end{aligned}$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_me$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_m(r - Cx - Fw) = -B_mCx + A_mx_m - B_mFw + B_mr$$

Com isso, lembre que o **sistema aumentado** é dado por:

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r$$

$$y_a = y = \underbrace{[C \ 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw$$

Agora, considere o **observador de estado** (para a planta, e não para o sistema aumentado!):

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Seja $\xi = x - \hat{x}$ o erro de estimação. Note que, na presença de uma perturbação $w \neq 0$ sobre a planta, não temos que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi$, mas sim que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + Ew - ((A - LC)\hat{x} + Bu + Ly) \\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\hat{x} - Bu - L \underbrace{(Cx + Fw)}_{=y} \\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w \end{aligned}$$

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

No entanto, isto não causa nenhuma dificuldade técnica adicional, pois o próximo resultado estabelece condições para que a realimentação (do estado estimado \hat{x} e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m$$

resolva o problema de controle através do projeto independente das matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação) e L (observador). Veremos que novamente se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável (i.e. o par (A_a, B_a) é controlável) e que a planta é observável (i.e. o par (A, C) é observável). Escolha as matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Então, o observador de estado

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

e a realimentação

$$u = -K\hat{x} - K_m x_m$$

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, solucionam o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0$$

para qualquer condição inicial $\tilde{x}(0) = (x(0), x_m(0), \hat{x}(0)) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, temos que $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com tal controlador (para $w = r = 0$).

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Prova: Seja $\tilde{x} = (x_a, \hat{x}) = (x, x_m, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ o vetor de estado do sistema aumentado com o observador. Com base no sistema aumentado, no observador de estado e considerando o erro $e = r - y$ como saída, obtemos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ é:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_mC & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_mF & B_m \\ LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e} \\ e &= \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Temos que

$$\tilde{G}_e(s) = (\tilde{G}_{e_{ij}}(s)) = \tilde{C}_e(sI - \tilde{A}_e)^{-1} \tilde{B}_e + \tilde{D}_e, \text{ com } E(s) = \tilde{G}_e(s)U_e(s)$$

e que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = \tilde{G}_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\tilde{\eta}_{ij}(s)}{\det(sI - \tilde{A}_e)}$$

onde $\tilde{\eta}_{ij}(s)$ é um polinômio em s .

Agora, considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}$$

Note que $T^{-1} = T$ e $\tilde{x} = T^{-1}z = Tz$. Nas novas coordenadas $z = T\tilde{x}$, o sistema em malha-fechada é dado por:

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \dot{z} = T\dot{\tilde{x}} = T(\tilde{A}_e\tilde{x} + \tilde{B}_e u_e) = T\tilde{A}_e\tilde{x} + T\tilde{B}_e u_e = T\tilde{A}_e T^{-1}z + T\tilde{B}_e u_e$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=T\tilde{A}_e T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=T\tilde{B}_e} u_e,$$

$$e = \tilde{C}_e\tilde{x} + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e T^{-1}z + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e z + \tilde{D}_e u_e$$

com

$$A_a - B_a K_a = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$$

Concluimos então que o conjunto de polos da matriz \tilde{A}_e é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$ (**princípio da separação**).

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Por hipótese, (A_a, B_a) é controlável e (A, C) é observável. Logo, podemos encontrar matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$. Portanto, $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (para $u_e = (w, r) = (0, 0)$), e o restante da prova é análogo ao Teorema da Seção 5.4 do Lab 5. Isto conclui a demonstração.

Obs 1: A estrutura de controle com o observador de estado é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta), L (observador) e $K_a = [K \quad K_m]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s) = 0$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, L, K_a .

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 2: Note que o modelo de estado do sistema aumentado com o observador e em malha-fechada com a realimentação

$u = -K\hat{x} - K_mx_m$ é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e} \end{aligned}$$

$$\tilde{y} = y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C} = -\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}$$

onde

$$\tilde{G}(s) = (\tilde{G}_{ij}(s)) = \tilde{C}(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}, \text{ com } Y(s) = \tilde{G}(s)U_e(s)$$

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3: Considere que no lugar de

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (1)$$

optamos por utilizar

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu - Le \quad (2)$$

Seja $\xi = x - \hat{x}$ o erro de estimação. Temos então que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + Ew - ((A - LC)\hat{x} + Bu - Le) \\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\hat{x} - Bu + L \underbrace{(r - (Cx + Fw))}_{=e=r-y} \\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w + Lr \end{aligned}$$

Logo, o sistema (2) desempenha o papel de um estimador de estado apenas quando $w = r = 0$. No entanto, note que os resultados do teorema acima permanecem válidos mesmo quando utilizamos (2) no lugar de (1), pois em tal caso o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ e considerando o erro $e = r - y$ como saída é:

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3 (continuação):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ LF & L \end{bmatrix}}_{=\bar{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e} \\ e &= \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note que a única diferença em relação à utilização do estimador (1) é a matriz \bar{B}_e no lugar de \tilde{B}_e (veja a prova do teorema).

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3 (continuação):

Temos que

$$\bar{G}_e(s) = (\bar{G}_{e_{ij}}(s)) = \tilde{C}_e(sI - \tilde{A}_e)^{-1} \bar{B}_e + \tilde{D}_e, \text{ com } E(s) = \bar{G}_e(s)U_e(s)$$

e que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = \bar{G}_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\bar{\eta}_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)}$$

onde $\bar{\eta}_{ij}(s)$ é um polinômio em s . Portanto, concluímos pela demonstração do teorema acima (referente a (1)) que tal resultado permanece válido mesmo quando utilizamos (2) no lugar de (1), já que a única diferença entre $\bar{G}_{e_{ij}}(s)$ e $\tilde{G}_{e_{ij}}(s)$ são os zeros determinados pelos polinômios $\bar{\eta}_{ij}(s)$ e $\tilde{\eta}_{ij}(s)$. Ressaltamos que diferenças entre os polinômios $\bar{\eta}_{ij}(s)$ e $\tilde{\eta}_{ij}(s)$ são decorrentes das diferenças entre as matrizes \bar{B}_e (com (2)) e \tilde{B}_e (com (1)).

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3 (continuação): Além disso, note que o modelo de estado do sistema aumentado com (2) e em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & L \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e} \\ \bar{y} = y &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

onde

$$\bar{G}(s) = (\bar{G}_{ij}(s)) = \tilde{C}(sI - \tilde{A}_e)^{-1}\tilde{B}_e + \tilde{D}, \text{ com } Y(s) = \bar{G}(s)U_e(s)$$

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3 (continuação): Logo, as componentes correspondentes das matrizes de transferência $\bar{G}(s)$ (com (2)) e $\tilde{G}(s)$ (veja a Obs 2 acima referente ao observador (1)) podem apresentar zeros diferentes devido à diferença entre as matrizes \bar{B}_e e \tilde{B}_e .

Por fim, ao utilizarmos (2) no lugar de (1), temos que o modelo de estado do controlador a ser implementado é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu - Le = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m - Le \\ \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m e \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m\end{aligned}$$

Aqui, $x_c = (\hat{x}, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ é o estado do controlador, o error $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada do controlador e $u = -K_a x_c \in \mathbb{R}^m$ é a saída do controlador, onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$. Desse modo, podemos escrever o modelo de estado do controlador como:

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 3 (continuação):

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK - LC & -BK_m \\ 0 & A_m \end{bmatrix}}_{=A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} -L \\ B_m \end{bmatrix}}_{=B_c} e$$

$$u = -\underbrace{\begin{bmatrix} K & K_m \end{bmatrix}}_{K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_c}$$

Portanto, a matriz de transferência do controlador é dada por:

$$C(s) = -K_a(sI - A_c)^{-1}B_c, \quad \text{com } U(s) = C(s)E(s)$$

Note que as raízes de $\beta(s) = 0$ aparecem como polos da matriz A_c do controlador, pois como A_c é uma matriz bloco triangular superior, temos que o conjunto de polos de A_c é a união (com repetição) dos polos de $A - BK - LC$ com os polos de A_m (vemos pelo Lab 5 que os valores dos polos de A_m coincidem com as raízes de $\beta(s) = 0$).

Obs 3 (continuação):

Como A_m é a matriz do modelo interno, concluímos que o controlador acima **generaliza** para o caso **multivariável** a abordagem de projeto **monovariável** vista na disciplina *Sistemas de Controle* para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação: primeiramente colocamos os polos do modelo interno como polos do controlador, e em seguida projetamos um estabilizador de forma a posicionar os polos de malha-fechada no SPE.

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação com Observador de Estado:

- 1 A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**
- 2 Considere o **modelo interno** (p -cópias de M, N):

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$

onde

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

- 3 Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável e o par (A, C) é observável. Em caso afirmativo, determine matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação), com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (observador) de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s) = 0$.

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

- 4 Implemente o modelo interno e o observador de estado (para a planta, e não para o sistema aumentado!)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \text{ (ou } -Le)$$

e aplique a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início da Seção 5.4 do Lab 5. Assim, concluímos que o controlador projetado a ser implementador é dado por:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \text{ (ou } -Le)$$

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_me, \text{ com } e = r - y$$

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m$$

Note que o observador de estado é referente somente à planta (não ao sistema aumentado!), já que sempre podemos realimentar o estado x_m pelo fato do modelo interno ser implementado. Tal controlador resolve o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$.

6.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Ressaltamos que os polos de malha-fechada serão a união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, ou seja, as matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m]$ (realimentação) e L (observador) são projetadas independentemente (**princípio da separação**).

6.2. Procedimentos

1. Considere novamente o sistema massa-mola da Seção 5.5 do Lab 5. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 5.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5 \text{sen}(t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 2$ e $w_2(t) = 3$, incidindo a partir de $t \geq 50\text{s}$. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m]$ na realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ para o sistema massa-mola de modo a atender à seguinte especificação em malha-fechada: para a condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) = (0, 0)$, tem-se que as componentes $e_1(t)$ e $e_2(t)$ do erro de rastreamento $e(t) = (e_1(t), e_2(t))$ entram e permanecem na faixa de $\pm 0.2\text{m}$ em $t_s \cong 10.0\text{s}$ em relação à referência dada acima. **Dica:** escolha $n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos repetidos por tentativa e erro. **Resposta:** polos em $s = -1$.

6.2. Procedimentos

2. Comprove que o sistema massa-mola é observável, e então determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da matriz $A - LC$) sejam 2 vezes mais rápidos que os polos de $A_a - B_a K_a$ encontrados no Item 1. Considerando que os controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$ (forças aplicadas nas massas) saturam em ± 20 , analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com o observador (1) para $\hat{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$, $x(0) = [1 \ 2 \ 0.8 \ -0.3]$, lembrando que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi + (E - LF)w$, onde $\xi = x - \hat{x}$ é o erro de estimação. Verifique se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido, comparando o desempenho em relação à realimentação de estado $u = -K_m x_m - Kx$, e analisando a referência, perturbação, estado, estado estimado, saída, erro e controle. Repita, mas agora considere que os polos de $A - LC$ são 5, 10 e 20 vezes mais rápidos que os de $A_a - B_a K_a$. Observe que o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação diminui à medida que os polos de $A - LC$ se tornam mais rápidos. Isto era esperado? Justifique. **Dica:** lembre o princípio da separação.

3. Refaça o item anterior, mas agora utilizando (2) no lugar de (1), lembrando que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi + (E - LF)w + Lr$. Observe o sobressinal na saída durante o regime transitório do rastreamento da referência. Explique tal comportamento. **Dica:** encontre a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada com (2) (veja a Obs 3 acima) e compare com a matriz de transferência do sistema aumentado em malha-fechada com (1) (veja a Obs 1). Por fim, encontre a matriz de transferência $C(s)$ do controlador resultante ao se utilizar (2) (veja a Obs 3). Note que as raízes de $\beta(s) = s(s^2 + 1) = 0$ (modelo interno) aparecem como pólos de $C(s)$, em conformidade com a Obs 3.

6.2. Procedimentos

4. Modifique as referências $r_1(t)$ e $r_2(t)$ com o objetivo de se diminuir as oscilações na saída durante o regime transitório em relação ao Item 2. **Dica:** escolha $r_1(t) = 3(1 - e^{-t/3})$, $r_2(t) = 2(1 - e^{-t/3}) + 0.5 \text{sen}(t)$ ($t_s(5\%) = 9$ para a exponencial), e reprojete o modelo interno. Determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da matriz $A - LC$) sejam 2 vezes mais rápidos que os polos de $A_a - B_a K_a$ ($s = -1$). Analise os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com o observador (1) para $\hat{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$, $x(0) = [1 \ 2 \ 0.8 \ -0.3]$, observando a diminuição das oscilações na saída durante o regime transitório em relação ao Item 2. Repita, mas agora considere que polos de $A_a - B_a K_a$ são 3 vezes mais rápidos ($s = -3$).

Lab 7 – Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Objetivos:

Vamos abordar o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares. Isto será atingido com base em controle integral via sistema linearizado. Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 5, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

7.1. Definição do Problema de Controle

Considere uma **planta** modelada por (n estados, m entradas, $p = m$ saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w) \\ y &= h(x, w)\end{aligned}\tag{1}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $p = m$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e

$f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^1 .

Assuma que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \bar{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \bar{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) = \bar{r} - y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

7.2. Estrutura de Controle

Para resolvermos o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares, vamos considerar a mesma estrutura de controle em malha-fechada do Lab 5:

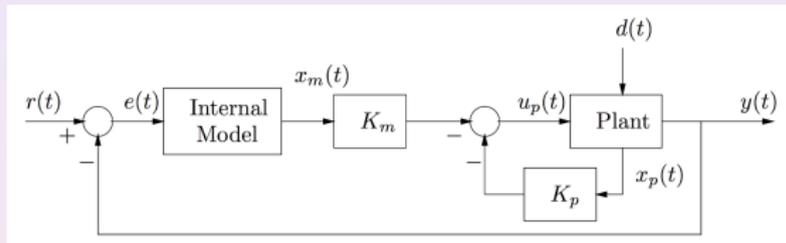


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_mx_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops.

Mostraremos na sequência que o rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ do tipo degrau será atingido através da estabilização de um ponto de equilíbrio em malha-fechada.

7.2. Estrutura de Controle

Como a referência $r(t)$ e a perturbação $w(t)$ são do tipo degrau, temos que $\beta(s) = s$. Assim, $A_m = 0$, $B_m = I$, e o modelo interno é dado por (veja o Lab 5):

$$\dot{x}_m = e$$

ou seja, para $x_m(0) = 0$,

$$x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

Fixe $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$, e considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $x_a = (x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$ (relembre que $e = \bar{r} - y$ e $y = h(x, \bar{w})$):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w}) \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}) \\ y &= h(x, \bar{w})\end{aligned}$$

onde $r(t) = \bar{r}$ e $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$.

7.2. Estrutura de Controle

Suponha que $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio deste sistema. Desse modo, as componentes x^e, u^e de tal ponto de equilíbrio devem satisfazer:

$$\begin{aligned}0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}) \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w})\end{aligned}\tag{2}$$

mas a componente $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrária**.

Obs: Note que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$, e

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

significa que $y^e = h(x^e, \bar{w}) = \bar{r}$, ou seja, a saída de equilíbrio da planta é igual a \bar{r} , com $r(t) = \bar{r}$, $t \geq 0$. Além disso, ressaltamos que os pares $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ que satisfazem (2) dependem das amplitudes \bar{r} e \bar{w} , ou seja, $x^e = x^e(\bar{r}, \bar{w}) \in D$ e $u^e = u^e(\bar{r}, \bar{w}) \in \mathbb{R}^m$ com

$$0 = f(x^e(\bar{r}, \bar{w}), u^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w}), \quad \bar{r} = h(x^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w})$$

7.2. Estrutura de Controle

Agora, considere a realimentação de estado linear¹

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_mx_m, \quad \text{com } u^e = -Kx^e - K_mx_m^e \quad (3)$$

Conseqüentemente, $\alpha(x^e, x_m^e) = u^e$ e, assim, (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio do **sistema aumentado malha-fechada** (veja (2)):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \bar{w})|_{u=-K\hat{x}-K_mx_m} = f(x, -Kx - K_mx_m, \bar{w}) \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}) \\ y &= h(x, \bar{w}) \end{aligned} \quad (4)$$

Assuma que (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do sistema acima. Portanto, para toda condição inicial dentro da região de atração de (x^e, x_m^e) , temos que

$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), x_m(t)) = (x^e, x_m^e)$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(x^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0$$

¹Note que $u = -K(x - x^e) - K_m(x_m - x_m^e) + u^e = -Kx - K_mx_m + (Kx^e + K_mx_m^e + u^e) = -Kx - K_mx_m$. Assim, não é necessário realizar um *off-set* dos equilíbrios na lei de controle!

7.2. Estrutura de Controle

Desse modo, mostramos que para se resolver **localmente** em torno de (x^e, x_m^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ do tipo degrau, basta estabilizarmos o ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e) do sistema em malha-fechada (4). Isto será alcançado através da estabilização da origem do sistema linearizado de (4) em (x^e, x_m^e) (relembre o Método Indireto de Lyapunov).

7.2. Estrutura de Controle

Obs: O sinal de controle aplicado em malha-fechada possui ação integral, pois para $x_m(0) = 0$:

$$u(t) = -Kx - K_m x_m, \quad \text{com } x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \Leftrightarrow \dot{x}_m(t) = e(t), \quad t \geq 0$$

Explicaremos agora o motivo pelo qual a ação integral do controlador projetado garante robustez em relação a perturbações paramétricas na planta que não destroem a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio de malha-fechada associado. De maneira geral, perturbações paramétricas na planta irão alterar os pontos de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ do sistema aumentado em malha-fechada (4), ou seja, $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\rho), \tilde{x}_m^e(\rho))$, onde ρ é o vetor de parâmetros da planta. No entanto, desde que o ponto de equilíbrio de malha-fechada perturbado $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ seja assintoticamente estável e a condição inicial esteja dentro da região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$, temos que a ação integral do controlador projetado forçará o erro de rastreamento a convergir assintoticamente para zero! De fato:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(\tilde{x}^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0$$

7.2. Estrutura de Controle

O **sistema aumentado linearizado** no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (veja (2)), onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $x_{a\delta} = (x_\delta, x_{m\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado do Lab 5 com $A_m = 0$, $B_m = I$, $E = F = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a\delta} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta \\ y_{a\delta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}} \end{aligned} \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}, & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)} \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)} \end{aligned}$$

Obs: Perceba que o sistema linearizado da planta

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

no ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é dado por

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta$$

$$y_\delta = Cx_\delta$$

considerando que $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$. Assim, as matrizes A_a e B_a acima do sistema aumentado linearizado são determinadas a partir da linearização da planta no ponto de equilíbrio (x^e, u^e) .

7.2. Estrutura de Controle

O sistema aumentado linearizado em malha-fechada com a realimentação $u_\delta = -K_a x_{a\delta} = -Kx_\delta - K_m x_{m\delta}$ como em (3), onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$, é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a\delta} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a - B_a K_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix} \\ y_{a\delta} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

O próximo resultado estabelece condições para que o sistema aumentado em malha-fechada (4) apresente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. **A ideia central é: a linearização associada do sistema em malha-fechada (4) coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (6), ou seja, SMFL = SLMF, e assim basta estabilizarmos a origem de (6) (Método Indireto de Lyapunov).**

7.2. Estrutura de Controle

Teorema: Considere a planta

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

e sejam $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente.

Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ (**ponto de equilíbrio nominal** correspondente) é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado (5) e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = -Kx - K_m x_m$$

é tal que:

Teorema (continuação):

- 1 A matriz de ganho $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é invertível
- 2 Para $x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e)$, temos $u^e = -Kx^e - K_mx_m^e$ como em (3), e assim (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio de (4). Por construção, temos que **SMFL = SLMF**. Em particular, (x^e, x_m^e) é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (4) (Método Indireto de Lyapunov).

Teorema (continuação):

- 3 Por continuidade (Teorema da Função Implícita + continuidade dos autovalores de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w})K_a$), temos que para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, existe em torno do equilíbrio nominal (x^e, x_m^e) um **único** ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada:

$$\dot{x} = f(x, -Kx - K_mx_m, \tilde{w})$$

$$\dot{x}_m = \tilde{r} - h(x, \tilde{w})$$

$$y = h(x, \tilde{w}), \quad r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r, \quad w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w, \quad t \geq 0$$

com $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{u}^e)$ satisfazendo (2), onde $\tilde{u}^e = -K\tilde{x}^e - K_m\tilde{x}_m^e$.

Teorema (continuação):

- ③ **(continuação)** Em particular, para tal ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ correspondente a $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitude de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{r} - h(x(t), \tilde{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\tilde{r} - h(\tilde{x}^e, \tilde{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição da perturbação $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau.

7.2. Estrutura de Controle

Obs 1: Os resultados do teorema acima permanecem válidos se utilizarmos a seguinte lei de controle

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m + \bar{u}$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante, pois $\partial\alpha/\partial x = -K$, $\partial\alpha/\partial x_m = -K_m$, ou seja, a linearização do sistema aumentado em malha-fechada permanece a mesma! No entanto, em tal caso, teremos que

$$x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e - \bar{u})$$

Obs 2: Note que projetamos um controlador integral linear (para $x_m(0) = 0$):

$$u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t) = -Kx(t) - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termo integral!}}, \quad t \geq 0$$

Além disso, ressaltamos que, ao contrário dos controladores lineares de estabilização vistos na Seção 3.4 da Teoria, a expressão desta lei de controle não utiliza os valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e , que em geral dependem dos parâmetros da planta (**robustez!**).

7.2. Estrutura de Controle

Obs 2 (continuação): De maneira geral, perturbações no vetor de parâmetros $\rho \in \mathbb{R}^s$ da planta alteram o ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho))$ do sistema aumentado em malha-fechada e, conseqüentemente, afetam a matriz $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$. No entanto, a lei de controle do resultado acima é **robusta**, pois os resultados do teorema permanecem válidos para perturbações paramétricas na planta que mantenham os polos de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ no SPE. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. Aqui, estamos assumindo que a planta é modelada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w, \rho) \\ y &= h(x, w, \rho)\end{aligned}$$

onde $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ são de classe C^1 .

7.2. Estrutura de Controle

Obs 2 (continuação): Portanto, concluímos que o controlador integral linear projetado assegura **robustez** em malha-fechada para o problema de rastreamento de referências com rejeição de perturbações do tipo degrau, tanto para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, quanto para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. **Por fim, é importante se ter em mente que tal lei de controle não assegura que a região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m$.**

Obs 3: O teorema acima não pode ser diretamente generalizado quando a referência e a perturbação não são do tipo degrau, no sentido de que se, por exemplo, a referência é exponencial e a perturbação é senoidal, não basta simplesmente utilizarmos o modelo interno correspondente e então projetar os ganhos K e K_m da realimentação com base nas matrizes A_a, B_a do sistema aumentado. Em tal caso, é preciso que condições adicionais sejam atendidas e que, de maneira geral, são difíceis de serem verificadas.

7.3. Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com

$x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4$ ($= 45^\circ$). Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

7.3. Procedimentos

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u, w)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u + \frac{1}{m\ell^2} w = f_2(x_1, x_2, u, w)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2, w)$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\bar{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\bar{r} = y^e = h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}) = x_1^e = \delta$. Assim, o ponto de equilíbrio nominal $(x_1^e, x_2^e, u^e) = (\delta, 0, \text{sen}(\delta))$ satisfaz

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x_1^e, x_2^e, \bar{w})$$

7.3. Procedimentos

2 (continuação). Determine as matrizes de ganho $K = [K_1 \ K_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$ de modo que o controlador linear integral

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - K_m x_m$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição de perturbações $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau, ao menos quando $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitudes da referência e da perturbação em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), considerando: (a) polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -1$ (lento), $s = -2$, $s = -4$ (moderado), $s = -40$ (rápido); (b) $\delta w = 0$, $\delta w = 0.5$ em $t = 15s$; (c) $\delta r = 0.1$, $\delta r = 3\pi/4$ em $t = 25s$; e (d) $x(0) = 0$, $x(0) = (\delta + \pi, 0)$. Note que, quando os polos de $A_a - B_a K_a$ estão em $s = -1$ (lentos) e $x(0) = (\delta + \pi, 0)$, então o erro de rastreamento não converge assintoticamente para zero, mas sim diverge!

7.3. Procedimentos

2 (continuação). Interpretação: O sistema linearizado aproxima relativamente bem a dinâmica de um sistema não-linear apenas enquanto $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ e $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$ (pequenos desvios). Assim, para polos lentos em $s = -1$ e com condição inicial $x(0) = (\delta + \pi, 0)$, temos que os ganhos de realimentação são insuficientemente grandes para que o esforço de controle $u(t)$ (torque) compense adequadamente a não-linearidade correspondente à gravidade. Consequentemente, tem-se que $|x_\delta(t)| = |x(t) - x^e| \gg 0$ e $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$, levando o estado do sistema em malha-fechada a divergir. Isto significa que a condição inicial $(x(0), x_m(0)) = ((\delta + \pi), 0)$ está **fora da região de atração** do ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e) do sistema aumentado em malha-fechada. Observe que isto não ocorre quando $x(0) = 0$, ou seja, temos que $(x(0), x_m(0)) = (0, 0)$ está **dentro da região de atração!** No entanto, para polos moderados em $s = -4$, então $(x(0), x_m(0)) = ((\delta + \pi), 0)$ está **dentro da região de atração!**

2 Interpretação (continuação): Semelhantemente, pode acontecer que, ao escolhermos polos muito rápidos, certas condições iniciais também podem estar fora de região de atração. A explicação intuitiva é que os ganhos de realimentação se tornam elevados e, conseqüentemente, $|u_\delta(t)| = |u(t) - u^e| \gg 0$ nos instantes iniciais.

Conclusão: De maneira geral, o tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio de malha-fechada assintoticamente estável depende da escolha dos polos! Além disso, se os polos forem muito lentos ou muito rápidos, então a região de atração pode se tornar muito pequena. **Portanto, a escolha dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração!**

Repita para pequenas e grandes variações δr e δw , e diversas outras condições iniciais.

3. Por fim, verifique por simulação que o controlador com ação integral projetado assegura robustez em relação a perturbações paramétricas, ao contrário dos estabilizadores lineares utilizados na Seção 3.4 da Teoria (relembre que as leis de controle estabilizantes dependem dos valores de equilíbrio x^e , u^e , y^e). Para isto, assuma que há uma perturbação paramétrica de 50% na massa do sistema: o valor nominal é o de projeto $m = 0.1$ ($u^e = \text{sen}(\delta)$), mas o valor real é $m = 0.15$ ($u^e = 1.5 \text{sen}(\delta)$).

7.3. Procedimentos

Obs: Projetamos um controlador PID para o pêndulo, pois:

$$\begin{aligned}u(t) &= -Kx(t) - K_m x_m(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - K_m x_m(t) \\&= -K_1 x_1(t) - K_2 \dot{x}_1(t) - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (\pm K_1 \tilde{r}) \\&= \underbrace{K_1 e(t) + K_2 \dot{e}(t) - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{PID!} - K_1 \tilde{r}\end{aligned}$$

com $e(t) = r(t) - y(t) = \tilde{r} - x_1(t)$, $r(t) = \tilde{r}$ (degrau),
 $\dot{e}(t) = -\dot{x}_1(t)$. Assim, basta implementarmos o seguinte
controlador PID (veja a Obs 1 acima):

$$u_{PID}(t) = u(t) + \underbrace{K_1 \tilde{r}}_{= \bar{u}} + K_1 \delta r = u(t) + K_1 \tilde{r} = \boxed{K_1 e(t) + K_2 \underbrace{x_2(t)}_{= \dot{e}(t)} - K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}$$

com $\delta r = \tilde{r} - \bar{r}$, pois $K_1 \delta r$ pode ser visto como uma perturbação do tipo degrau na entrada $u(t) + K_1 \bar{r}$ da planta. Por exemplo, para os polos de $A_a - B_a K_a$ em $-2, -3, -16$, temos um PID com ganhos $K_1 = 7.9$ (P), $K_2 = 2$ (D), $-K_m = 9.6$ (I).

Lab 8 – Controle Integral Linear de Sistemas Não-Lineares com Observador de Estado Linear: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Objetivos:

Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas não-lineares visto no Lab 7, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Isto será atingido com base em controle integral e estimação de estado lineares.

Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 7, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 7.2 do Lab 7 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

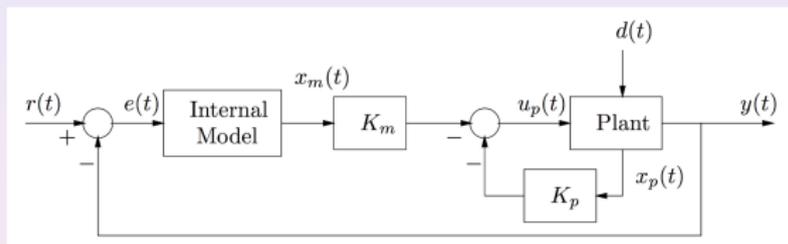


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops.

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\hat{x} - K_mx_m$.

Primeiramente, relembre do Lab 7 que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, $p = m$ saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w) \\ y &= h(x, w)\end{aligned}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $p = m$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e

$f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^1 .

Assumimos que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \bar{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \bar{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Fixe $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ e considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $(x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \bar{w}) \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}) \\ y &= h(x, \bar{w})\end{aligned}\tag{1}$$

onde

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w}) = e$$

é o **modelo interno** ($A_m = 0$, $B_m = I$) e

$$e = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

é o **erro de rastreamento**, com $r(t) = \bar{r}$ e $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Agora, considere o **observador de estado** linear (para a planta, e não para o sistema aumentado!)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (2)$$

Obtemos assim o **sistema aumentado com observador**, que tem como vetor de estado $(x, x_m, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \bar{w}) \\ \dot{x}_m &= \bar{r} - h(x, \bar{w}) \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + Bu + Lh(x, \bar{w}) \\ y &= h(x, \bar{w}) \end{aligned} \quad (3)$$

Suponha que $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u_e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio deste sistema. Desse modo, as componentes $x^e = x^e(\bar{r}, \bar{w})$, $\hat{x}^e = \hat{x}^e(\bar{r}, \bar{w})$, $u^e = u^e(\bar{r}, \bar{w})$ de tal ponto de equilíbrio devem satisfazer:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^e, u^e, \bar{w}) \\ \bar{r} &= h(x^e, \bar{w}) \\ 0 &= (A - LC)\hat{x}^e + Bu^e + L\bar{r} \end{aligned} \quad (4)$$

mas a componente $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrária**.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Note que:

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$, e

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

significa que $y^e = h(x^e, \bar{w}) = \bar{r}$, com $r(t) = \bar{r}$, $t \geq 0$.

Agora, considere a realimentação linear (do estado estimado \hat{x} e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m, \quad \text{com } u^e = -K\hat{x}^e - K_mx_m^e \quad (5)$$

Consequentemente, temos que (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio do **sistema aumentado com observador em malha-fechada** (veja (4)):

$$\dot{x} = f(x, u, \bar{w})|_{u=-K\hat{x}-K_mx_m} = f(x, -K\hat{x} - K_mx_m, \bar{w})$$

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_mx_m + Lh(x, \bar{w})$$

$$y = h(x, \bar{w})$$

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Assuma que (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do sistema acima. Portanto, para toda condição inicial dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), x_m(t), \hat{x}) = (x^e, x_m^e, \hat{x}^e)$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r} - h(x(t), \bar{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\bar{r} - h(x^e, \bar{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0$$

Desse modo, mostramos que para se resolver **localmente** em torno de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ do tipo degrau, basta estabilizarmos o ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) do sistema em malha-fechada (6). Isto será alcançado através da estabilização da origem do sistema linearizado de (6) em (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) (relembre o Método Indireto de Lyapunov).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre o sistema aumentado (1). Vimos no Lab 7 que o **sistema aumentado linearizado** no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (relembre (4)), onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $(x_\delta, x_{m_\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta \\ y_\delta &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{=C_a} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, \bar{w}) \right|_{(x,u)=(x^e,u^e)}$$

(note que as matrizes A_a e B_a acima são determinadas a partir da linearização da planta no ponto de equilíbrio (x^e, u^e)).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Agora, considere o **observador de estado** como em (2) para tal sistema linearizado

$$\dot{\hat{x}}_\delta = (A - LC)\hat{x}_\delta + Bu_\delta + Ly_\delta$$

e a realimentação $u_\delta = -K\hat{x}_\delta - K_mx_{m_\delta}$ como em (5). Obtemos assim o **sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada** (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado com observador do Lab 6 com $A_m = 0$, $B_m = I$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \\ \dot{\hat{x}}_\delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -C & 0 & 0 \\ LC & -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{= \tilde{A}_e} \begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \\ \hat{x}_\delta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Mostramos no Lab 6 que o conjunto de polos da matriz A_e é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, onde $K_a = [K \quad K_m]$ (**princípio da separação**).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

O próximo resultado estabelece condições para que o sistema aumentado com observador em malha-fechada (6) apresente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. **A ideia central é: a linearização associada do sistema em malha-fechada (6) coincide com o sistema linearizado em malha-fechada (8), ou seja, $SMFL = SLMF$, e assim basta estabilizarmos a origem de (8) (Método Indireto de Lyapunov).**

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema: Considere a planta

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

e sejam $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente.

Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ (**ponto de equilíbrio nominal** correspondente) é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

$$\bar{r} = h(x^e, \bar{w})$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado (7) e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável e o par (A, C) é observável. Escolha as matrizes de ganho

$K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, onde $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema (continuação): Então, o observador de estado (2) e a realimentação de estado linear $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ são tais que:

- ① A matriz

$$\begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}$$

é invertível

- ② Para

$$\begin{bmatrix} x_m^e \\ \hat{x}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ -L\bar{r} \end{bmatrix}$$

temos que as condições em (4) são satisfeitas por $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u^e)$ com $u^e = -K\hat{x}^e - K_mx_m^e$ como em (5), e assim (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada (6). Por construção, temos **SMFL = SLMF**. Em particular, (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (6) (Método Indireto de Lyapunov).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema (continuação):

- 3 Por continuidade (Teorema da Função Implícita + continuidade dos autovalores de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w})K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}) - LC(\tilde{r}, \tilde{w})$), temos que para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, existe em torno do equilíbrio nominal (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) um **único** ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{\hat{x}}^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ **localmente** assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = f(x, -K\hat{x} - K_mx_m, \tilde{w})$$

$$\dot{x}_m = \tilde{r} - h(x, \tilde{w})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - K_mx_m + Lh(x, \tilde{w})$$

$$y = h(x, \tilde{w}), \quad r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r, \quad w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w, \quad t \geq 0$$

com $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e, \tilde{u}^e)$ satisfazendo (4), onde $\tilde{u}^e = -K\tilde{\hat{x}}^e - K_m\tilde{x}_m^e$.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema (continuação):

- ③ **(continuação)** Em particular, para tal ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{\hat{x}}^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ correspondente a $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitude de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{r} - h(x(t), \tilde{w}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\tilde{r} - h(\tilde{x}^e, \tilde{w})}_{\dot{x}_m=0} = 0$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0), \hat{x}(0))$ pertencente à região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição da perturbação $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Importante! O controlador projetado a ser implementado é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= e = r - y, \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \\ u &= -K\hat{x} - K_mx_m.\end{aligned}$$

Note que o observador de estado é referente somente à planta (não ao sistema aumentado!), já que sempre podemos realimentar o estado x_m pelo fato do modelo interno (integrador) ser implementado.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 1: Os resultados do teorema acima permanecem válidos se utilizarmos a seguinte lei de controle

$$u = \alpha(\hat{x}, x_m) = -K\hat{x} - K_m x_m + \bar{u}$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor constante, pois $\partial\alpha/\partial\hat{x} = -K$, $\partial\alpha/\partial x_m = -K_m$, ou seja, a linearização do sistema aumentado com observador em malha-fechada permanece a mesma! No entanto, em tal caso, teremos que

$$\begin{bmatrix} x_m^e \\ \hat{x}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_m & -K \\ -BK_m & A - BK - LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^e - \bar{u} \\ -L\bar{r} \end{bmatrix}$$

Obs 2: Temos um controlador integral linear (para $x_m(0) = 0$):

$$u(t) = -K\hat{x}(t) - K_m x_m(t) = -K\hat{x}(t) - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termo integral!}}, \quad t \geq 0$$

Além disso, ao contrário dos controladores de estabilização vistos na Seção 3.4 da Teoria, as expressões do observador linear (2) e da realimentação acima não utilizam os valores de equilíbrio x^e , u^e , y^e , que em geral dependem dos parâmetros da planta (**robustez!**).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 2 (continuação): De maneira geral, perturbações no vetor de parâmetros $\rho \in \mathbb{R}^s$ da planta alteram o ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\tilde{x}}^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho), \tilde{\tilde{x}}^e(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho))$ do sistema aumentado em malha-fechada e, conseqüentemente, afetam as matrizes $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - LC(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)$. No entanto, a lei de controle do resultado acima é **robusta**, pois os resultados do teorema permanecem válidos para perturbações paramétricas na planta que mantenham os polos de $A_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - B_a(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)K_a$ e $A(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho) - LC(\tilde{r}, \tilde{w}, \rho)$ no SPE. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 3.1 do Lab 3), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. Aqui, estamos assumindo que a planta é modelada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w, \rho) \\ y &= h(x, w, \rho)\end{aligned}$$

onde $f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ são de classe C^1 .

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 2 (continuação): Portanto, concluímos que o controlador integral linear projetado assegura **robustez** em malha-fechada para o problema de rastreamento de referências com rejeição de perturbações do tipo degrau, tanto para pequenas variações $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ nas amplitudes de $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ e $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente, quanto para pequenas perturbações paramétricas na planta em relação ao valor nominal $\bar{\rho}$. **Por fim, é importante se ter em mente que tal lei de controle não assegura que a região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{x}^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.**

Obs 3: O teorema acima não pode ser diretamente generalizado quando a referência e a perturbação não são do tipo degrau, no sentido de que se, por exemplo, a referência é exponencial e a perturbação é senoidal, não basta simplesmente utilizarmos o modelo interno correspondente e então projetar os ganhos K e K_m da realimentação com base nas matrizes A_a, B_a do sistema aumentado. Em tal caso, é preciso que condições adicionais sejam atendidas e que, de maneira geral, são difíceis de serem verificadas.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 4: Considere que as hipóteses do teorema acima foram satisfeitas, de modo que $(x^e, x_m^e, \hat{x}^e, u^e)$ satisfaz (4) com $u^e = -K\hat{x}^e - K_m x_m^e$ como em (5), e que os polos $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estão no SPE. Assim, (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio (locamente) assintoticamente estável de (6). Vamos mostrar na sequência que para o controlador-observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m + Lh(x, \bar{w}) \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m\end{aligned}$$

se a condição inicial do sistema em malha-fechada (6) está dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , então erro de estimação $x - \hat{x}$ converge assintoticamente para $x^e - \hat{x}^e$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) = x^e - \hat{x}^e \quad (9)$$

Isto significa que \hat{x} é de fato uma estimação de x , a menos do off-set $x^e - \hat{x}^e$.

Obs 4 (continuação): De fato, seja $\xi = x - \hat{x} - [x^e - \hat{x}^e]$. Nas novas coordenadas $z = (x, x_m, \xi)$, o sistema em malha-fechada (6) é descrito por (note que $\dot{\xi} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$):

$$\dot{x} = f(x, -K(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) - K_m x_m, \bar{w})$$

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f(x, -K(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) - K_m x_m, \bar{w}) \\ & - (A - BK - LC)(x - \xi - [x^e - \hat{x}^e]) + BK_m x_m - Lh(x, \bar{w}) \end{aligned}$$

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 4 (continuação): Portanto, por (4) e (5) vemos que $z^e = (x^e, x_m^e, 0) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio desse sistema, e a linearização associada é dada por (a qual coincide com o princípio da separação do sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada (8)!)

$$\dot{z}_\delta = \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \\ \dot{\xi}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_m & -BK \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \\ \xi_\delta \end{bmatrix}}_{=z_\delta}$$

com $z_\delta = (x_\delta, x_{m_\delta}, \xi_\delta)$, $x_\delta = x - x^e$, $x_{m_\delta} = x_m - x_m^e$, $\xi_\delta = x_\delta - \hat{x}_\delta$. Logo, $z^e = (x^e, x_m^e, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pois os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ estão no SPE, com

$$\dot{\xi}_\delta = (A - LC)\xi_\delta$$

o que coincide com a dinâmica do erro de estimação do sistema aumentado linearizado com observador em malha-fechada (8)!

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 4 (continuação): Em particular, para toda condição inicial dentro da região de atração $z^e = (x^e, x_m^e, 0)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}_d(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) - [x^e - \hat{x}^e] = 0$$

Logo, concluímos que, para o controlador-observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} - BK_m x_m + Lh(x, \bar{w}) \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m\end{aligned}$$

se a condição inicial do sistema em malha-fechada (6) está dentro da região de atração de (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) , então o erro de estimação $x - \hat{x}$ converge assintoticamente para $x^e - \hat{x}^e$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \hat{x}(t) = x^e - \hat{x}^e$$

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Obs 5: Em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, então $\hat{x}(0) = \hat{x}^e$ é uma escolha razoável, pois (x^e, x_m^e, \hat{x}^e) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada (6). Podemos também escolher $x_m(0) = x_m^e$.

8.2. Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com

$x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

8.2. Procedimentos

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u, w)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u + \frac{1}{m\ell^2} w = f_2(x_1, x_2, u, w)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2, w)$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\bar{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\bar{r} = y^e = h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}) = x_1^e = \delta$. Assim, o ponto de equilíbrio nominal $(x_1^e, x_2^e, u^e) = (\delta, 0, \text{sen}(\delta))$ satisfaz

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x_1^e, x_2^e, \bar{w})$$

8.2. Procedimentos

2 (continuação). Determine as matrizes de ganho $K = [K_1 \ K_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $K_m \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ de modo que o controlador-observador com ação integral

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ u &= -K\hat{x} - K_m x_m = -K_1 \hat{x}_1 - K_2 \hat{x}_2 - K_m x_m\end{aligned}$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \tilde{r} = \bar{r} + \delta r$ com rejeição de perturbações $w(t) = \tilde{w} = \bar{w} + \delta w$ do tipo degrau, ao menos quando $\delta r \cong 0$ e $\delta w \cong 0$ (pequenas variações nas amplitudes da referência e da perturbação em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), verificando a validade de (9) na **Obs 4** e considerando:

8.2. Procedimentos

- (a) Polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -1$ (lento), polos de $A - LC$ em $s = -3$ (3 vezes mais rápido), $\delta r = \delta w = 0$, $\hat{x}(0) = (0, 0)$, $x_m(0) = x_2(0) = 0$. Determine (por simulação) o maior valor do ângulo inicial $0^\circ \leq x_1(0) \leq 360^\circ$ de modo que $(x(0), x_m(0), \hat{x}(0))$ pertença à região de atração do ponto de equilíbrio nominal (x^e, x_m^e, \hat{x}^e)
- (b) Repita o item (a), mas agora considerando que $\hat{x}(0) = (\delta, 0)$
- (c) Repita o item (a), mas agora considerando polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -4$ (moderado) e polos de $A - LC$ em $s = -12$ (3 vezes mais rápido). Assuma também que $\delta w = 0.5$ em $t = 15s$. Determine o maior valor de $-45^\circ \leq \delta r \leq 315^\circ$ em $t = 25s$ tal que $(x(25), x_m(25), \hat{x}(25))$ pertença à região de atração do ponto de equilíbrio correspondente $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e, \tilde{\hat{x}}^e)$
- (d) Repita o item (c), mas agora considerando polos de $A - LC$ em $s = -20$ (5 vezes mais rápido). Observe que o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação diminui à medida que os polos de $A - LC$ se tornam mais rápidos. Isto era esperado? Justifique. **Dica:** princípio da separação.

2 (continuação).

- (e) Repita o item (d), mas agora considerando polo triplo de $A_a - B_a K_a$ em $s = -40$ (rápido) e polos de $A - LC$ em $s = -120$ (3 vezes mais rápido).

Respostas:

- (a) $x_1(0)_{max} \cong 130^\circ$
- (b) $x_1(0)_{max} \cong 120^\circ$
- (c) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} \cong 110^\circ$ (mas com bastante sobressinal e oscilação na saída!)
- (d) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} = 315^\circ$ (mas com bastante sobressinal na saída!)
- (e) $x_1(0)_{max} = 360^\circ$, $\delta r_{max} = 315^\circ$ (**sem sobressinal nem oscilação na saída, mas não consideramos saturação no controle!**)

Conclusão: De maneira geral, o tamanho da região de atração de um ponto de equilíbrio de malha-fechada assintoticamente estável depende da escolha dos polos! Além disso, se os polos forem muito lentos ou muito rápidos, então a região de atração pode se tornar muito pequena. **Portanto, a escolha dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração!**

Interpretação: O sistema linearizado aproxima relativamente bem a dinâmica de um sistema não-linear apenas enquanto $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ e $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$, $y_\delta(t) = y(t) - y^e \cong 0$ (pequenos desvios). Relembre a discussão realizada no Procedimento 2 do Lab 7.

3. Por fim, verifique por simulação que o controlador-observador com ação integral projetado assegura robustez em relação a perturbações paramétricas, ao contrário dos estabilizadores lineares utilizados na Seção 3.4 da Teoria (relembre que as leis de controle estabilizantes dependem dos valores de equilíbrio x^e, u^e, y^e). Para isto, assuma que há uma perturbação paramétrica de 50% na massa do sistema: o valor nominal é o de projeto $m = 0.1$ ($u^e = \text{sen}(\delta)$), mas o valor real é $m = 0.15$ ($u^e = 1.5 \text{sen}(\delta)$).

Objetivos:

Vamos introduzir o problema de rastreamento de saída para um motor CC e projetar uma realimentação que soluciona tal problema de controle. Em seguida, veremos como implementar a realimentação projetada por diagrama de blocos. Por fim, iremos analisar os resultados de simulação obtidos para diversas saídas de referência.

9.1. Rastreamento de Saída de um Motor CC

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u$$

$$y(t) = x_1(t)$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). O objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a **rastrear assintoticamente** uma saída de referência $\bar{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua) e **limitada**.

9.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Temos que: $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_2 + u$. Note que foi necessário derivar 2 vezes a saída $y = x_1$ em relação ao tempo até que a entrada u aparecesse explicitamente. Considere então a **realimentação de estado**

$$u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v, \quad \text{com } \alpha(x_1, x_2) \triangleq x_2$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada. Assim, em malha-fechada temos que

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$$

Escolhendo a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$v = \gamma(x_1, x_2, t) = \ddot{y}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{y}(t)]$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem ajustados, concluímos que em malha-fechada temos

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = v(t) &= \ddot{y}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{y}(t)] \\ &= \ddot{y}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{y}(t)] \\ &= \ddot{y}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}} \end{aligned}$$

9.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Consequentemente, a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada é dada pela seguinte **EDO linear homogênea**:

$$\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1e = 0$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2s + k_1 = 0$$

Agora, suponha que os pólos (estáveis!) de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (partes reais negativas!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2s + k_1 = (s - p_1)(s - p_2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2}_{\text{polinômio caract. de MF}}$$

ou seja, escolhemos $k_2 = -(p_1 + p_2), k_1 = p_1p_2$.

9.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Concluimos então que a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$\begin{aligned}u &= \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + \gamma(x_1, x_2, t) \\ &= x_2 + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)]\end{aligned}$$

com $k_2 = -(p_1 + p_2)$ e $k_1 = p_1 p_2$, garante que²

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(0), x_2(0)$, resolvendo assim **o problema de rastreamento de saída**.

²Relembre que, se os polos p_1, p_2 são reais e distintos, então $e(t) = c_1 \exp(p_1 t) + c_2 \exp(p_2 t)$, para $t \geq 0$, onde os valores dos coeficientes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são determinados pelas condições iniciais $e(0), \dot{e}(0)$ do erro de rastreamento. Em particular, se $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, então $e(t) = 0$ para $t \geq 0$ (**rastreamento perfeito**)!

9.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Note que o controle $u(t)$ a ser aplicado ao longo do tempo $t \geq 0$ é dado por:

$$\begin{aligned}u(t) &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}},\end{aligned}$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento da saída.

Ressaltamos que a ideia principal utilizada foi:

- 1 Escolher a realimentação $u = \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + v$ de modo que $\ddot{y} = x_2 + u = v$, onde v é a nova entrada
- 2 Escolher $v = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1 e(t) - k_2 \dot{e}(t)$ de modo que $\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0$ (EDO linear homogênea para a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada)

Note que **não há modelo interno!** Ao longo do nosso curso, veremos como generalizar essa ideia para solucionar o problema de rastreamento de saída de sistemas não-lineares MIMO.

9.3. Procedimentos

1. Implemente no Matlab/Simulink a realimentação de estado dependente do tempo projetada para solucionar o problema de rastreamento de saída do motor CC considerado. Suponha que:

- 1 $\bar{y}(t) = 3, t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$
- 2 $\bar{y}(t) = 3(1 - e^{-2t}), t \geq 0, x_1(0) = -3, x_2(0) = 6$
- 3 $\bar{y}(t) = 3(1 - e^{-2t}), t \geq 0, x_1(0) = 0, x_2(0) = 6$
- 4 $\bar{y}(t) = 3 \text{sen}(5t), t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$

Em cada um dos casos acima, analise os resultados de simulação obtidos (saída, referência, controle e erro) para uma escolha de pólos “lentos” ($p = -2$), “médios” ($p = -6$) e “rápidos” ($p = -20$) da dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada. Note que, nos dois primeiros casos acima, a dinâmica do erro de rastreamento é idêntica, e que, no terceiro caso, temos $e(t) = 0$ para $t \geq 0$ (**rastreamento perfeito**) com

$$u(t) = x_2(t) + \ddot{y}(t) = \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) = -6e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Isto era esperado? Justifique.

2. Repita o item acima para: $\bar{y}(t) = 1, 0 \leq t < 10,$
 $\bar{y}(t) = 2, t \geq 10,$ com $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Note que $\bar{y}(t)$ não é de classe C^2 devido ao salto de descontinuidade em $t = 10$, mas é de classe C^2 por partes. Explique o comportamento qualitativo da dinâmica do erro rastreamento $e(t), t \geq 0$. **Dica:** em $t = 10$, temos que $e(t) \neq 0$, ou seja, a condição inicial do erro é ressetada em $t = 10$.

3. Repita o Item 1 para: $\bar{y}(t) = \cos(t^2), t \geq 0,$
 $x_1(0) = x_2(0) = 0$. É possível implementarmos a lei de controle projetada neste caso? Isto era esperado? Justifique sua resposta.

Lab 10 – Controle Ótimo: Regulador Quadrático Linear (LQR)

Objetivos:

Vamos tratar do problema de como escolher os polos desejados de malha-fechada de um sistema linear a fim de se obter um bom compromisso entre desempenho de malha-fechada e esforço de controle. Veremos que tal problema pode ser abordado por controle ótimo, o qual consiste em minimizar uma função custo quadrática no estado e no controle. Em seguida, mostraremos que o controlador ótimo é de fato linear em relação ao estado e resulta da solução da equação algébrica Riccati. Esse controlador é denominado de regulador quadrático linear.

10.1. Formas Quadráticas

Dizemos que uma função real $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma quadrática** quando $V(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio homogêneo de segundo grau em n variáveis reais com coeficientes reais, ou seja:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j = p_{11} x_1^2 + \dots + p_{nn} x_n^2 + \sum_{i < j} (p_{ij} + p_{ji}) x_i x_j$$

onde $p_{ij} \in \mathbb{R}$. Note que, definindo a matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j = x' P x \\ &= \underbrace{[x_1 \ \dots \ x_n]}_{=x'} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x \in \mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

ou seja, a forma quadrática $V(x_1, \dots, x_n)$ fica completamente determinada pela matriz $P = (p_{ij})$.

10.1. Formas Quadráticas

Reciprocamente, toda matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina a seguinte forma quadrática

$$V(x_1, \dots, x_n) = x'Px = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}x_i x_j$$

Sempre podemos considerar que uma forma quadrática $V(x_1, \dots, x_n)$ é determinada por uma matriz **simétrica** \bar{P} , ou seja, $V(x_1, \dots, x_n) = x'\bar{P}x$ com $\bar{P} = \bar{P}'$. De fato, note que podemos escrever $V(x_1, \dots, x_n)$ como

$$V(x_1, \dots, x_n) = p_{11}x_1 + \dots + p_{nn}x_n + \sum_{i < j} \underbrace{2\bar{p}_{ij}}_{=p_{ij}+p_{ji}} x_i x_j$$

Logo, definindo a matriz simétrica

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \bar{p}_{12} & \cdots & \bar{p}_{1n} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} & \cdots & \bar{p}_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

temos que $V(x_1, \dots, x_n) = x'\bar{P}x$.

10.1. Formas Quadráticas

Obs: Quando $P = \text{diag}(p_{11}, \dots, p_{nn})$ é uma matriz diagonal, então temos $V(x) = x'Px = p_{11}x_1^2 + \dots + p_{nn}x_n^2$. Em particular, se $P = I$, então $V(x) = x'Px = x'x = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$.

Exemplo: Considere a seguinte forma quadrática em 2 variáveis

$$V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2$$

Note que

$$V(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 = 3x_1^2 + 5x_2^2 + \underbrace{2 \times 4}_{=8} x_1x_2$$

Assim, definindo a matriz simétrica

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} x'Px &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \\ &= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 = V(x_1, x_2) \end{aligned}$$

10.1. Formas Quadráticas

Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, i.e. $P = P'$, e considere a forma quadrática associada

$$V(x) = x'Px \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Note que $V(0) = 0$. Temos então a seguinte classificação:

- Dizemos que P é **semidefinida positiva** quando $V(x) = x'Px \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, escrevemos $P \geq 0$.
- Dizemos que P é **definida positiva** quando $V(x) = x'Px > 0$, para todo $x \neq 0$. Neste caso, escrevemos $P > 0$.
- Dizemos que P é **semidefinida negativa** quando $V(x) = x'Px \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, escrevemos $P \leq 0$.
- Dizemos que P é **definida negativa** quando $V(x) = x'Px < 0$, para todo $x \neq 0$. Neste caso, escrevemos $P < 0$.
- Dizemos que P é **indefinida** se existirem $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $V(x) > 0$ e $V(y) < 0$.

10.1. Formas Quadráticas

O próximo resultado estabelece um critério simples para classificarmos uma matriz simétrica.

Proposição 1: Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então, os autovalores de P são números reais. Além disso:

- $P \geq 0$ se e somente se todos os autovalores de P são não-negativos
- $P > 0$ se e somente se todos os autovalores de P são positivos
- $P \leq 0$ se e somente se todos os autovalores de P são não-positivos
- $P < 0$ se e somente se todos os autovalores de P são negativos

Relembramos as seguintes propriedades da matriz transposta:

- $(M')' = M$
- $(M + N)' = M' + N'$
- $(MN)' = N'M'$
- $(M^{-1})' = (M')^{-1}$, onde M é invertível

10.1. Formas Quadráticas

Proposição 2 (Teorema da Decomposição Espectral): Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz invertível $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$P = V' \Delta V$$

onde $V' = V^{-1}$ e $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal em que os elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de sua diagonal principal são os autovalores (reais) de P .

Obs: Seja $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então, $P = D'D \geq 0$. De fato, P é simétrica, pois $P' = (D'D)' = D'(D')' = D'D = P$. Além disso, $P \geq 0$, pois

$$V(x) = x'Px = x'D'Dx = (Dx)' \underbrace{Dx}_{=y} = y'y = \|y\|^2 \geq 0$$

Assim, $P = D'D \geq 0$, para qualquer matriz $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. O próximo resultado estabelece que a recíproca é verdadeira.

10.1. Formas Quadráticas

Proposição 3: Seja $P \geq 0$ uma matriz (simétrica) em $\mathbb{R}^{n \times n}$ com $\text{posto}(P) = q \leq n$. Então, existe uma matriz $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$ que decompõe P da seguinte forma:

$$P = D'D$$

Prova: Suponha que $P \geq 0$. Pela proposição acima, temos que existe uma matriz invertível V tal que

$$P = V'\Delta V$$

onde $V' = V^{-1}$, $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ são os autovalores de P . Como $\text{posto}(P) = q \leq n$, temos que $\lambda_1, \dots, \lambda_q > 0$ e $\lambda_{q+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Assim, basta tomarmos

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_q} \end{bmatrix}_{q \times n} V$$

10.2. Regulador Quadrático Linear

Motivação: Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e suponha que (A, B) é controlável. Podemos então posicionar arbitrariamente no SPE os polos de $A - BK$ (malha-fechada) pela escolha adequada da matriz de ganho na realimentação de estado $u = -Kx$. Relembre que se os polos de $A - BK$ forem relativamente rápidos, maior será a velocidade de convergência do estado para a origem $x = 0$. No entanto, teremos um custo de controle associado para pagar: maior será o esforço de controle exigido. Além disso, quando a ordem n da planta é relativamente grande, em geral não é uma tarefa fácil especificar os polos desejados de malha-fechada de modo a se obter um bom compromisso entre o desempenho do estado do sistema em malha-fechada e o esforço de controle resultante.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Seja $z: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ um sinal real. Relembre da disciplina "Sinais e Sistemas Lineares) que a energia deste sinal é dada por

$$E = \int_0^{\infty} z^2(t) dt$$

Logo, a ideia intuitiva é que o quanto menor for a energia E , menor será o desvio de $z(t)$ em relação a zero no decorrer do tempo.

Agora, seja $u = -Kx$ uma dada realimentação para a planta acima, e considere o seguinte custo

$$J = \int_0^{\infty} \underbrace{q_1 x_1^2(t) + \dots + q_n x_n^2(t)}_{=x'(t)\text{diag}(q_1, \dots, q_n)x(t)} + \underbrace{r_1 u_1^2(t) + \dots + r_m u_m^2(t)}_{=u'(t)\text{diag}(r_1, \dots, r_m)u(t)} dt \geq 0$$

onde $x(t)$, $t \geq 0$, é a solução do sistema em malha-fechada para uma dada condição inicial $x(0) = x_0$ e $u(t) = -Kx(t)$, $t \geq 0$, é o sinal de controle resultante. Note que J pode ser visto como uma soma ponderada entre as energias das variáveis de estado (desvios em relação a zero) com pesos $q_i \geq 0$, e as energias das variáveis de controle (esforço de controle exigido) com pesos $r_j > 0$.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Suponha que determinamos uma matriz de ganho $K = K^*$ de modo a minimizar a função custo J . Desse modo, quando os pesos q_i são relativamente grandes em relação aos pesos r_j , estaremos penalizando mais o desvio do estado (em relação à origem $x = 0$) em comparação à penalização do esforço de controle exigido, e assim esperamos obter em malha-fechada uma dinâmica relativamente rápida para os estados, mas pagando-se por isso um maior esforço de controle. Por outro lado, quando os pesos q_i são relativamente pequenos em relação aos pesos r_j , estaremos penalizando mais o esforço de controle em comparação à penalização do desvio do estado, e então esperamos obter em malha-fechada uma dinâmica relativamente lenta para os estados, mas com um menor esforço de controle.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Na sequência, vamos formalizar as ideias acima e considerar que o custo possui a seguinte forma geral

$$J = \int_0^{\infty} x'(t)Qx(t) + u(t)'Ru(t) dt \geq 0$$

onde $Q \geq 0$ ($Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$) e $R > 0$ ($R \in \mathbb{R}^{m \times m}$) são as matrizes de peso para o desvio do estado e para o esforço de controle, respectivamente. **Ressaltamos que as matrizes Q e R são parâmetros de projeto do controlador!** Nosso objetivo é responder as seguintes perguntas:

- A realimentação de estado $u = \phi(x)$ que minimiza J é necessariamente linear da forma $u = \phi(x) = -Kx$? Ou pode ser não-linear?
- Caso a realimentação de estado que minimiza J é linear da forma $u = -Kx$, é possível determinarmos a matriz de ganho K ? Em caso afirmativo, como? Com tal K , os polos de $A - BK$ (malha-fechada) estarão garantidamente no SPE?

10.2. Regulador Quadrático Linear

Seja uma planta linear modelada por (n estados, m entradas)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10)$$

Considere o seguinte problema de estabilização: encontrar uma realimentação de estado (possivelmente não-linear) $u = \phi(x)$ de modo a estabilizar a origem $x = 0$ do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = Ax + B\phi(x)$$

Dizemos que uma realimentação de estado $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (i.e. $u = \phi(x) \in \mathbb{R}^m$, para $x \in \mathbb{R}^n$) é **admissível** quando:

- A aplicação $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua com $\phi(0) = 0$
- Para toda condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos que o sistema em malha-fechada acima possui uma única solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Note que, se $A - BK$ possui todos os polos no SPE, então a realimentação de estado linear $u = \phi(x) = -Kx$ é admissível. Seja Φ o conjunto de todas as realimentações admissíveis ϕ .

10.2. Regulador Quadrático Linear

Agora, introduzimos o **funcional custo** $J: \mathbb{R}^n \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ definido por

$$\begin{aligned} J(x_0, \phi) &= \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + \phi(x(t))' R \phi(x(t)) dt & (11) \\ &= \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \phi \in \Phi \end{aligned}$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, $x(t)$, $t \geq 0$, é a única solução do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado admissível $u = \phi(x)$ e condição inicial $x(0) = x_0$, e $u(t) = \phi(x(t))$, $t \geq 0$, é o sinal de controle correspondente. Dizemos que uma realimentação de estado admissível $\phi^* \in \Phi$ é **ótima** em relação ao funcional custo (11) quando ϕ^* minimiza (11) no seguinte sentido:

- $J(x_0, \phi^*) < \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $J(x_0, \phi^*) \leq J(x_0, \phi)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \Phi$

10.2. Regulador Quadrático Linear

Teorema 1: Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então, a equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

possui uma única solução semidefinida positiva $P^* \geq 0$, e todos os polos da matriz

$$A - BR^{-1}B'P^*$$

estão no SPE.

Obs: Suponha que $Q = D'D = E'E$, onde $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pode-se mostrar que (A, D) é detectável **se e somente se** (A, E) é detectável. Isto significa que a hipótese no teorema acima de que (A, D) é detectável independe da decomposição escolhida de Q (relembre a Proposição 3 acima).

10.2. Regulador Quadrático Linear

Teorema 2 (LQR): Considere a planta (10) e o funcional custo (11). Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati acima. Então, a realimentação de estado **linear**

$$u^* = -K^*x = -\underbrace{R^{-1}B'P^*}_{=K^*}x$$

é a **única realimentação ótima** de (11), e os polos da matriz (sistema em malha-fechada)

$$A - BK^* = A - BR^{-1}B'P^*$$

estão no SPE. Denominamos $u^* = -K^*x$ de **regulador quadrático linear** (LQR – Linear Quadratic Regulator).

10.2. Regulador Quadrático Linear

Prova: Seja $P = P^* \geq 0$ a solução da equação algébrica de Riccati do Teorema 1 acima, e considere a forma quadrática associada

$$V(x) = x'Px \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = (Ax + Bu)'Px + x'P(Ax + Bu) \\ &= u'B'Px + x'A'Px + x'PAx + x'PBu \\ &= x'(A'P + PA)x + x'PBu + u'B'Px\end{aligned}$$

Completando o quadrado com $\pm u'Ru$ e utilizando a equação algébrica de Riccati, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x'(A'P + PA)x + x'PBu + u'B'Px \pm u'Ru \\ &= x'(PBR^{-1}B'P - Q)x + x'PBu + u'B'Px + u'Ru - u'Ru \\ &= -x'Qx - u'Ru + x'PBR^{-1}B'Px + x'PBu + u'B'Px + u'Ru\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}(R^{-1}B'Px + u)'R(R^{-1}B'Px + u) &= (u' + x'PBR^{-1})R(R^{-1}B'Px + u) \\ &= u'Ru + u'B'Px + x'PBR^{-1}B'Px + x'PBu\end{aligned}$$

10.2. Regulador Quadrático Linear

Logo,

$$\dot{V}(x) = -(x'Qx + u'Ru) + (R^{-1}B'Px + u)'R(R^{-1}B'Px + u)$$

Fixe uma condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma realimentação admissível $u = \phi(x) \in \Phi$, e seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução corresponde do sistema em malha-fechada. Então, $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} = \dot{V}(x(t)) &= - [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] \\ &\quad + [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)] \end{aligned}$$

com $u(t) = \phi(x(t))$. Integrando ambos os lados da equação acima no intervalo de tempo $[0, T]$, temos:

$$\begin{aligned} V(x(T)) - V(x_0) &= \int_0^T \dot{V}(x(t))dt \\ &= - \int_0^T (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt \\ &\quad + \int_0^T [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]'R[R^{-1}B'Px(t) + u(t)]dt \end{aligned}$$

10.2. Regulador Quadrático Linear

Agora, tomando o limite $T \rightarrow \infty$ em ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$\underbrace{V(x_\infty) - V(x_0)}_{=0} = -J(x_0, \phi) + \int_0^\infty [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]' R [R^{-1}B'Px(t) + u(t)] dt$$

ou seja (relembre que $R \geq 0$),

$$J(x_0, \phi) = V(x_0) + \underbrace{\int_0^\infty [R^{-1}B'Px(t) + u(t)]' R [R^{-1}B'Px(t) + u(t)] dt}_{\geq 0}$$

Portanto, concluímos que a realimentação linear de estado

$$u^* = \phi^*(x) = -K^*x = -R^{-1}B'Px$$

é a única realimentação ótima de (11), com

$$J(x_0, \phi^*) = V(x_0) = x_0' P x_0$$

e os polos de $A - BK^*$ (sistema em malha-fechada) estão no SPE pelo Teorema 1 acima.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Obs 1: No Matlab, o comando `lqr` determina a matriz de ganho K^* do LQR.

Obs 2: Assuma que $Q = q\bar{Q} \geq 0$ e $R = r\bar{R} > 0$, onde $\bar{Q} \geq 0$ e $\bar{R} > 0$ são as matrizes nominais, e $q, r > 0$ são parâmetros (reais) a serem variados no projeto da realimentação LQR $u = -K^*x$. É imediato que $u = \phi^*(x)$ é uma realimentação ótima de (11) **se e somente se** $u = \phi^*(x)$ é uma realimentação ótima de

$$\bar{J}(x_0, \phi) = \frac{1}{q} J(x_0, \phi) = \int_0^{\infty} x(t)' \bar{Q} x(t) + \phi(x(t))' (r/q) \bar{R} \phi(x(t)) dt$$

Desse modo, sempre podemos considerar que $q = 1$, ou seja, $Q = \bar{Q}$ e $R = r\bar{R}$, e assim ficamos com um único parâmetro $r > 0$ para variar no projeto da realimentação LQR $u = -K^*x$.

Ressaltamos que o ganho ótimo K^* depende de \bar{Q} , \bar{R} , r , ou seja, $K^* = K^*(\bar{Q}, \bar{R}, r)$.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Obs 3: Não há na literatura uma metodologia geral para se escolher as matrizes de peso $Q \geq 0$ e $R > 0$ no LQR (parâmetros de projeto!). Apresentamos abaixo alguns métodos usuais:

- 1 Escolha $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$, e então varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre o desempenho do estado do sistema em malha-fechada e o esforço de controle: $x'(t)Qx(t) = \|x(t)\|^2$ e $u'(t)Ru(t) = r\|u(t)\|^2$ são os **custos instantâneos** de estado e controle, respectivamente.

- 2 Escolha $Q = \bar{Q} = \text{diag}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) > 0$ e $R = r\bar{R} = r \cdot \text{diag}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m) > 0$ da seguinte maneira. Suponha que $|x_i|$ não deve ultrapassar o valor $\bar{x}_i > 0$ e que $|u_j|$ não deve ultrapassar o valor $\bar{u}_j > 0$. Escolha então

$$\bar{q}_i = 1/\bar{x}_i^2, \quad \bar{r}_j = 1/\bar{u}_j^2$$

Justificativa: no instante t em que $|x_i(t)| = \bar{x}_i$, teremos o custo instantâneo de estado $\bar{q}_i x_i(t)^2 = 1$ no funcional custo (11), e $r_j u_j(t)^2 = 1$ quando $|u_j(t)| = \bar{u}_j$. Em seguida, varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre desempenho e esforço de controle.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Obs 3 (continuação):

- Escolha $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n) \geq 0$ e $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_m) > 0$ por tentativa e erro.
- Seja $z = Dx$ uma saída (real do sistema ou virtual de desempenho) que se deseja levar para zero, onde $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Escolha $Q = D'D \geq 0$, $R = rI > 0$, e então varie $r > 0$ buscando obter um bom compromisso entre o desempenho da saída $z = Dx$ do sistema em malha-fechada ($x'Qx = \|z\|^2$) e o esforço de controle ($u'Ru = r\|u\|^2$).
- Escolha $Q \geq 0$ e $R > 0$ como matrizes não-diagonais por tentativa e erro.

O segundo método acima é importante quando certas variáveis de estado do sistemas são de grandezas/unidades físicas distintas. Por exemplo, podemos ter que x_1 é uma distância em metros com $\bar{x}_1 = 0.05$ (5 cm), x_2 uma velocidade em rad/s com $\bar{x}_2 = 100$ e x_3 uma corrente elétrica em amperes com $\bar{x}_3 = 2$.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Obs 4: Assuma que $Q = \overline{Q} \geq 0$ e $R = r\overline{R}$, onde $\overline{Q} \geq 0$ e $\overline{R} > 0$ são as matrizes nominais, e $r > 0$ é um escalar real (parâmetro de projeto do LQR). Então, os polos de malha-fechada do LQR possuem o seguinte comportamento assintótico:

- Quando $r \rightarrow \infty$ (maior peso sobre o esforço de controle), temos que os polos de $A - BK^*$ (malha-fechada) se aproximam dos polos de A (malha-aberta) que estão no SPE e da reflexão em relação ao eixo imaginário dos polos de A que estão no SPD (se $s = a + jb$ com $a > 0$ é um polo de malha-aberta no SPD, então o polo de malha-fechada correspondente no SPE é $s = -a + jb$).
- Quando $r \rightarrow 0$ (maior peso sobre o desvio dos estados), temos que ρ polos de $A - BK^*$ se aproximam de localizações **finitas** no SPE (pode-se ter polos de malha-fechada relativamente lentos dependendo do sistema!), enquanto que os $n - \rho$ polos restantes tendem assintoticamente ao **infinito** formando diversas configurações Butterworth de diferentes ordens e raios.

Obs 4 (continuação):

Portanto, quando as matrizes A e B do sistema (10) correspondem à linearização de um sistema não-linear num ponto de equilíbrio, deve-se variar $r > 0$ (por tentativa e erro!) de modo a se buscar obter um bom compromisso entre desempenho dinâmico do sistema não-linear em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração! Ressaltamos que tal compromisso é determinado pelo polos de $A - BK^*$.

10.2. Regulador Quadrático Linear

Obs 5: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos que $Q > 0$ e $R > 0$ com R diagonal. Em relação à realimentação LQR

$$u = -K^*x$$

temos as seguintes propriedades de robustez do sistema em malha-fechada:

- Os polos de $A - BK^*$ permanecem no SPE mesmo que o ganho no laço de realimentação de cada uma das variáveis de controle u_j , $j = 1, \dots, m$, seja reduzido em até 50% ou aumentado indefinidamente (margem de ganho infinita!)
- Os polos de $A - BK^*$ permanecem no SPE mesmo que o laço de realimentação de cada uma das variáveis de controle u_j , $j = 1, \dots, m$, sofra um deslocamento de fase de até $\pm 60^\circ$ (margem de fase de pelo menos 60° !)

10.3. Procedimentos

1. Considere o sistema massa-mola do Lab 5, e repita novamente as simulações do Item 2 nos Procedimentos do Lab 5 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação.
2. Agora, encontre a matriz de ganho K_a^* (sistema aumentado) pelo LQR. Para isso, considere que $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$ (veja o primeiro método da Obs 3 acima), variando $r > 0$ como:
 $r = 0.001$, $r = 0.01$, $r = 0.1$, $r = 0.4$ (corresponde à matriz de ganho K_a apresentada no Item 3 dos Procedimentos do Lab 5),
 $r = 1$, $r = 4$, $r = 40$, $r = 400$, $r = 4000$, $r = 40000$. Verifique se as simulações estão de acordo com o esperado, comparando com o Item 1 acima e analisando o compromisso entre esforço de controle e desempenho de malha-fechada no rastreamento da referência com rejeição da perturbação. Verifique também a validade da Obs 4. Note que, para $r = 0.4$, obtivemos um melhor desempenho e um menor esforço de controle com o LQR do que com o posicionamento de polos do Item 1 acima (polos repetidos em $s = -1$)!

2 (continuação).

Conclusão: Relembre da **Obs** do Procedimento 3 do Lab 5 que a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ possui ação PID para o sistema massa-mola. Desse modo, sintonizamos um controlador com ação PID para um sistema multivariável através da variação de um único parâmetro escalar $r > 0$ do LQR!

3. Para $r = 0.4$, verifique a propriedade de robustez da margem de ganho da **Obs 5** acima.

Lab 11 – Estimação Ótima e Princípio da Separação Estocástica: Filtro de Kalman e Controlador Gaussiano Quadrático Linear (LQG)

Objetivos: Vamos tratar do problema de como escolher a matriz de ganho do estimador de estado de um sistema linear na presença de ruídos do processo e de medição. Veremos que tal problema pode ser abordado por estimação ótima, a qual consiste em minimizar o erro de estimação médio quadrático assintoticamente. Mostraremos que o estimador ótimo, denominado de Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente, resulta da solução da equação algébrica Riccati. Por fim, apresentaremos o princípio da separação estocástica e o controlador gaussiano quadrático linear.

11.1. Processos Estocásticos

Um **espaço de probabilidade** é uma tripla (Ω, \mathcal{F}, P) onde:

- 1 Ω é um conjunto, denominado de **espaço amostral**
- 2 Os elementos de \mathcal{F} , denominados de **eventos**, são subconjuntos de Ω que satisfazem:
 - $\Omega \in \mathcal{F}$
 - Se $A \in \mathcal{F}$, então o complementar $A^c = (\Omega - A) \in \mathcal{F}$
 - Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \dots \in \mathcal{F}$
- 3 A **função probabilidade** $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz:
 - $P(\Omega) = 1$
 - Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots \in \mathcal{F}$ são mutuamente disjuntos, então

$$P(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \dots) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) + \dots$$

Dizemos que uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **variável aleatória** quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{X \leq x\} \triangleq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

ou seja, o conjunto $\{X \leq x\}$ é um evento.

11.1. Processos Estocásticos

Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Então, a função $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

é denominada de **função distribuição** de X . Dizemos que uma função $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função densidade de probabilidade** de X quando

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

A **média (ou valor esperado, ou esperança)** $E[X]$ de X é o número real definido por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \in \mathbb{R}$$

(assumindo que $E[X] < \infty$). A **variância** R_X de X é o número real definido por (assumindo que $E[X^2] < \infty$)

$$R_X \triangleq E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \in \mathbb{R}$$

11.1. Processos Estocásticos

Agora, considere que $X = (X_1, \dots, X_n)'$: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **vetor aleatório**, ou seja, X_1, \dots, X_n : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são variáveis aleatórias. Por simplicidade, escrevemos $X = (X_1, \dots, X_n)' \in \mathbb{R}^n$. A função $F_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$\triangleq P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x_1 \text{ e } X_2(\omega) \leq x_2 \text{ e } \dots \text{ e } X_n(\omega) \leq x_n\}) \in \mathbb{R}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, é denominada de **função distribuição** do vetor aleatório $X \in \mathbb{R}^n$. A **média** $E[X]$ de $X \in \mathbb{R}^n$ é o vetor definido como

$$E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])' \in \mathbb{R}^n$$

e a **variância** R_X de $X \in \mathbb{R}^n$ é a matriz definida por

$$R_X = ([R_X]_{ij}) = E[(X - E[X])(X - E[X])'] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Temos que $R_X \geq 0$ e

$$[R_X]_{ij} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$$

11.1. Processos Estocásticos

Sejam $X = (X_1, \dots, X_n)': \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_m)': \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ vetores aleatórios. A função $F_{X,Y}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \\ \triangleq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m) \in \mathbb{R}$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, é denominada de **função distribuição conjunta** de X, Y . Dizemos que os vetores aleatórios $X \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathbb{R}^m$ são **independentes** quando

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

11.1. Processos Estocásticos

Dizemos que $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))' \in \mathbb{R}^n$ é um **processo estocástico vetorial** quando $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório para cada $t \geq 0$. Definimos a **média** $E([X(t)])$ no instante $t \geq 0$ do processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por

$$E[X(t)] = (E[X_1(t)], \dots, E[X_n(t)])' \in \mathbb{R}^n$$

e, para cada $t, s \geq 0$, definimos a **covariância** $R_X(t, s)$ de $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por

$$R_X(t, s) = E[(X(t) - E[X(t)])(X(s) - E[X(s)])'] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Temos que $R_X(t, s) = R_X(s, t)'$ para $t, s \geq 0$, e definimos a **variância** $Q(t)$ no instante $t \geq 0$ de $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ por $Q(t) = R_X(t, t) \geq 0$.

Quando $E[X(t)] = 0$ (média nula) para todo $t \geq 0$, e

$$R_X(t, s) = V_X(s)\delta(t - s), \quad t, s \geq 0$$

onde $V_X(s) \geq 0$ (matriz semi-definida positiva) para $s \geq 0$ e $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac, dizemos que o processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é um **ruído branco** com **intensidade** $V_X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11.1. Processos Estocásticos

Dizemos que os processos estocásticos vetoriais $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são **independentes** quando, para cada $p, q \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_q \geq 0$, os vetores aleatórios $(X(t_1)', \dots, X(t_p)')' \in \mathbb{R}^{np}$ e $(Y(s_1)', \dots, Y(s_q)')' \in \mathbb{R}^{mq}$ são independentes.

Considere que $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são ruídos brancos com intensidades $V_X(\cdot)$ e $V_Y(\cdot)$, respectivamente. Quando

$$E[X(t)Y(s)'] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad t, s \geq 0,$$

dizemos que os ruídos brancos $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ são **não-correlacionados**. Em tal caso, temos que o processo estocástico vetorial $W(\cdot) = (X(\cdot), Y(\cdot)) = (X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot), Y_1(\cdot), \dots, Y_m(\cdot))' \in \mathbb{R}^{n+m}$ é um ruído branco com intensidade $V_W(\cdot)$ dada por

$$V_W(t) = \left\{ \begin{array}{cc} V_X(t) & 0 \\ 0 & V_Y(t) \end{array} \right\}, \quad t \geq 0$$

11.1. Processos Estocásticos

Dizemos que o processo estocástico vetorial $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é

Gaussiano quando, para cada $p \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_p \geq 0$, temos que a função distribuição conjunta dos vetores aleatórios $X(t_1), \dots, X(t_p) \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\begin{aligned} F_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(x_1, \dots, x_p) &\triangleq P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_p) \leq x_p) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(\xi_1, \dots, \xi_p) d\xi_1 \cdots d\xi_p \end{aligned}$$

para $x_1, \dots, x_p, \xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\int_{-\infty}^{x_i} d\xi_i \triangleq \int_{-\infty}^{x_{i,1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{i,n}} d\xi_{i,1} \cdots d\xi_{i,n}, \quad x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})', \quad \xi_i = (\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n})' \in \mathbb{R}^n$$

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_p)}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{np} \det(R)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [\xi_i - E\{X(t_i)\}]' \Lambda_{ij} [\xi_j - E\{X(t_j)\}] \right\}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_1) & R_X(t_1, t_2) & \cdots & R_X(t_1, t_p) \\ R_X(t_2, t_1) & R_X(t_2, t_2) & \cdots & R_X(t_2, t_p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_X(t_p, t_1) & R_X(t_p, t_2) & \cdots & R_X(t_p, t_p) \end{bmatrix}_{np \times np}, \quad \Lambda = R^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1p} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Lambda_{p1} & \Lambda_{p2} & \cdots & \Lambda_{pp} \end{bmatrix}_{np \times np}$$

com $\Lambda_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Motivação: Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w_2(t)\end{aligned}\tag{12}$$

onde $w_1(t) \in \mathbb{R}^n$ é o **ruído do processo**, $w_2(t) \in \mathbb{R}^p$ é o **ruído de medição**, $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são processos estocásticos vetoriais ($t \geq 0$), e a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório. Suponha que (A, C) é observável, e considere o seguinte observador de estado linear

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)\tag{13}$$

A dinâmica do erro de estimação $e = x - \hat{x}$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - LC)e(t) + w_1(t) - Lw_2(t)\end{aligned}$$

Percebemos então que a matriz de ganho L do observador afeta a dinâmica do erro de estimação $e(t)$ de 2 maneiras distintas e conflitantes:

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

- 1 Quanto mais afastados da origem estiverem os polos de $A - LC$ no SPE, mais rápida será a convergência da **resposta entrada nula** $e_{en}(t)$ para $e = 0$, ou seja, a estimação do estado será mais rápida. Em geral, quanto mais rápidos os polos de $A - LC$, maior o valor das componentes de L .
- 2 A matriz de ganho L influencia diretamente na dinâmica de $e(t)$, pois L multiplica o ruído $w_2(t)$ na equação acima. Logo, L desempenha o papel de um amplificador de ruído na dinâmica de $e(t)$ e, assim, as componentes da matriz de ganho L devem ser relativamente pequenas, ou seja, os polos de $A - LC$ não devem ser rápidos demais.

Portanto, concluímos que a matriz de ganho L do observador de estado deve ser escolhida de modo a se obter um bom compromisso entre rapidez de estimação (rapidez dos polos de $A - LC$) e atenuação do ruído $w_2(t)$.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Dizemos que uma matriz de ganho L é **admissível** para o observador de estado linear (13) quando todos os polos de $A - LC$ estão no SPE e o **erro médio quadrático**

$$\begin{aligned} E\{e'(t)e(t)\} &= E\{[x(t) - \hat{x}(t)]'[x(t) - \hat{x}(t)]\} \\ &= E\{[x_1(t) - \hat{x}_1(t)]^2 + \cdots + [x_n(t) - \hat{x}_n(t)]^2\} \\ &= E\{\|e(t)\|^2\} \end{aligned}$$

converge assintoticamente para um valor constante finito que independe de $e(0)$ (mas depende de $L!$), ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{e'(t)e(t)\} \triangleq E_L \in \mathbb{R}$$

Dizemos que uma matriz de ganho admissível L^* é **ótima** quando

$$E_{L^*} \leq E_L < \infty$$

para toda matriz de ganho admissível L . Neste caso, denominamos (13) com $L = L^*$ de **estimador (ou observador) de estado linear ótimo**.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Teorema 1: Sejam A, C, V_1, V_2 matrizes dadas. Suponha que $V_1 \geq 0$, $V_2 > 0$, (A, C) é detectável e (A, D) é estabilizável, onde $V_1 = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então, a **equação algébrica de Riccati**

$$AP + PA' - PC'V_2^{-1}CP + V_1 = 0$$

possui uma única solução semidefinida positiva $P^* \geq 0$, e todos os polos da matriz

$$A - P^*C'V_2^{-1}C$$

estão no SPE. Além disso, se P e L são matrizes dadas tais que P é simétrica, $A - LC$ possui todos os polos no SPE e

$$(A - LC)P + P(A - LC)' + LV_2L' + V_1 = 0$$

então $P \geq P^*$ (i.e. $P - P^* \geq 0$).

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Teorema 2 (Filtro de Kalman): Considere a planta (12) com uma dada entrada **determinística** $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. Suponha que $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1(t)$ e $w_2(t)$, para todo $t \geq 0$. Assuma que (A, C) é detectável e (A, D) é estabilizável, onde $V_1 = \overline{D}'\overline{D}$ com $\overline{D} \in \mathbb{R}^{\overline{q} \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati acima. Então,

$$L^* = P^* C' V_2^{-1}$$

é uma matriz de ganho **ótima** para o estimador de estado linear (13) e os polos de $A - L^* C = A - P^* C' V_2^{-1} C$ estão no SPE, com

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - L^* C)\bar{e}(t), \quad \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0)$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ a média do erro de estimação no instante $t \geq 0$. Além disso, $E_{L^*} = \text{tr}[P^*]$.

Denominamos o **estimador de estado linear ótimo** (13) com $L = L^* = P^* C' V_2^{-1}$ de **Filtro de Kalman (Pred. em Reg. Per.)**. .227 / 300

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Prova: Considere que as hipóteses do teorema foram atendidas. Seja L uma matriz de ganho arbitrária para o observador de estado linear (13) tal que os polos de $A - LC$ estejam no SPE. Logo,

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + w_1(t) - Lw_2(t), \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

onde $e = x - \hat{x}$ é o erro de estimação. Sejam $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ e $Q(t) = E\{[e(t) - \bar{e}(t)][e(t) - \bar{e}(t)]'\}$ a média e a variância de $e(\cdot)$ no instante $t \geq 0$, respectivamente. Desse modo,

$$E\{e(t)'e(t)\} = \bar{e}(t)'\bar{e}(t) + \text{tr}[Q(t)], \quad t \geq 0$$

(relembre que $\text{tr}(M)$ é igual à soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada M). Pode-se mostrar que:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - LC)\bar{e}(t), \quad \text{com } \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = P$$

onde \bar{x}_0 é a média de $x(0)$ e $P \geq 0$ é a única solução de

$$(A - LC)P + P(A - LC)' + LV_2L' + V_1 = 0 \quad (14)$$

Em particular,

$$E_L \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e(t)'e(t)\} = \overbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t)'\bar{e}(t)}^{=0} + \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}[Q(t)] = \text{tr}[P]$$

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Agora, seja $P^* \geq 0$ a única solução da equação algébrica de Riccati do Teorema 1 acima, e defina

$$L^* = P^* C' V_2^{-1}$$

Temos que os polos de

$$A - L^* C = A - P^* C' V_2^{-1} C$$

estão no SPE. Como

$$(L^*)' = (V_2^{-1})'(C')'(P^*)' = (V_2')^{-1} C P^* = V_2^{-1} C P^*$$

obtemos pela equação algébrica de Riccati que:

$$\begin{aligned} & (A - L^* C)P^* + P^*(A - L^* C)' + L^* V_2 (L^*)' + V_1 \\ &= AP^* - L^* C P^* + P^* A' - P^* C' (L^*)' + L^* V_2 (L^*)' + V_1 \\ &= AP^* + P^* A' - P^* C' V_2^{-1} C P^* - P^* C' V_2^{-1} C P^* + P^* C' V_2^{-1} V_2 V_2^{-1} C P^* + V_1 \\ &= AP^* + P^* A' - P^* C' V_2^{-1} C P^* + V_1 = 0 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que (14) é satisfeita para $L = L^*$ e $P = P^*$.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Portanto, quando $L = L^*$, concluímos que

$$E_{L^*} \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e'(t)e(t)\} = \text{tr}[P^*]$$

O Teorema 1 estabelece ainda que

$$P^* \leq P$$

Desse modo,

$$E_{L^*} = \text{tr}[P^*] \leq \text{tr}[P] = E_L$$

Isto significa que L^* é uma matriz de ganho **ótima** para estimador de estado linear (13), o que encerra a demonstração.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Obs 1: No Matlab, o comando `kalman` determina a matriz de ganho L^* do Filtro de Kalman. Alternativamente, pode-se utilizar dualidade e o comando `lqr`, ou seja, $Lfk = lqr(A', C', V1, V2)'$.

Obs 2: Nas hipóteses do Teorema 2 acima, assumamos adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Então, pode-se mostrar que o Filtro de Kalman é um estimador de estado **ótimo** mesmo dentre estimadores **não-lineares** que determinam uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ a partir de $y(\tau)$, $u(\tau)$, para $0 \leq \tau \leq t$.

Obs 3: Na prática, sempre haverá incertezas no modelo (12) da planta. Assim, em (12), o ruído do processo w_1 procura incorporar também incertezas na equação de estado da planta, e o ruído de medição w_2 tem como objetivo capturar também incertezas no sensor de saída. Conseqüentemente, é comum em situações práticas não conhecermos as matrizes de intensidade constantes nominais $V_1^{nominal} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V_2^{nominal} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ de $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$, respectivamente.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Obs 3 (continuação): Em tal caso, devemos buscar sintonizar o ganho $L = PC'V_2^{-1}$ do Filtro de Kalman de modo a se alcançar um compromisso razoável entre rapidez de estimação (rapidez dos polos de $A - LC$) e atenuação dos ruídos através da variação de $V_1 \geq 0, V_2 > 0$ na equação algébrica de Riccati acima.

Ressaltamos, no entanto, que apesar de tal L ser admissível, L **não é ótimo!** De fato, não estamos utilizando as intensidades nominais $V_1^{nominal} \geq 0, V_2^{nominal} > 0$ dos ruídos na equação algébrica de Riccati e, conseqüentemente, L é **subótimo**, ou seja, $E_{L^*} \leq E_L$, onde $L^* = P^*C'(V_2^{nominal})^{-1}$ é o ganho ótimo.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Obs 3 (continuação): Uma prática usual é consideramos que $V_1 = \overline{V}_1$ e $V_2 = r\overline{V}_2$ na equação algébrica de Riccati, onde $\overline{V}_1 \geq 0$, $\overline{V}_2 > 0$ estão fixadas e $r > 0$ é o parâmetro de projeto a ser variado com o objetivo de se atingir um bom compromisso. Por simplicidade, é comum se escolher $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ como matrizes diagonais. Como primeira tentativa, é natural escolhermos $\overline{V}_1 = 0$ ou $\overline{V}_1 = I$, e $\overline{V}_2 = I$. Com base em dualidade (operação transposta de matrizes) e nas propriedades do controlador LQR vistas no capítulo anterior (veja a **Obs 4** da Seção 10.2), concluimos que polos do Filtro de Kalman possuem o seguinte comportamento assintótico³:

³Suponha que $V_1 = r_1\overline{V}_1$ e $V_2 = r_2\overline{V}_2$, com $r_1, r_2 > 0$. Pode-se mostrar que os polos de $A - LC$ só dependem do quociente $r = r_2/r_1$. Desse modo, sempre podemos considerar que $r_1 = 1$.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Obs 3 (continuação):

- Quando $r \rightarrow \infty$ (maior intensidade do ruído de medição em relação a do processo, ou seja, maior confiança na equação de estado da planta do que no sensor de saída), temos que os polos de $A - LC$ se aproximam dos polos de A (malha-aberta) que estão no SPE e da reflexão em relação ao eixo imaginário dos polos de A que estão no SPD (se $s = a + jb$ com $a > 0$ é um polo de malha-aberta no SPD, então o polo de $A - LC$ correspondente no SPE é $s = -a + jb$).
- Quando $r \rightarrow 0$ (menor intensidade do ruído de medição em relação a do processo, ou seja, maior confiança no sensor de saída do que na equação de estado da planta), temos que ρ polos de $A - LC$ se aproximam de localizações **finitas** no SPE (pode-se ter polos de $A - LC$ relativamente lentos dependendo do sistema!), enquanto que os $n - \rho$ polos restantes tendem assintoticamente ao **infinito** formando diversas configurações Butterworth de diferentes ordens e raios.

11.2. Filtro de Kalman Preditivo em Regime Permanente

Obs 3 (continuação):

Portanto, quando as matrizes A, B, C do sistema (12) correspondem à linearização de um sistema não-linear num ponto de equilíbrio, deve-se variar $r > 0$ (por tentativa e erro!) de modo a se buscar obter um bom compromisso entre rapidez de estimação, atenuação dos ruídos e tamanho da região de atração do sistema não-linear em malha-fechada! Ressaltamos que tal compromisso é determinado pelo polos de $A - LC$.

Obs 4: Relembre do Teorema 2 acima que:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - L^*C)\bar{e}(t), \quad \bar{e}(0) = \bar{x}_0 - \hat{x}(0)$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x(0)\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}(t) = E\{e(t)\}$ a média do erro de estimação no instante $t \geq 0$. Portanto, os polos de $A - L^*C$ determinam a velocidade convergência de $\bar{e}(t)$ para zero. Além disso, se \bar{x}_0 for conhecido e escolhermos $\hat{x}(0) = \bar{x}_0$, teremos que $\bar{e}(0) = 0$ e, conseqüentemente,

$$\bar{e}(t) = 0, \quad t \geq 0$$

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Considere novamente a planta (12):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w_2(t)\end{aligned}\tag{15}$$

onde $w_1(t) \in \mathbb{R}^n$ é o **ruído do processo**, $w_2(t) \in \mathbb{R}^p$ é o **ruído de medição**, $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são processos estocásticos vetoriais ($t \geq 0$), e a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório.

Dizemos que um controlador da forma

$$u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$$

é **admissível** para o sistema (15) quando f for linear em relação à saída y e, para qualquer condição inicial $x(0)$, a solução correspondente $x(t)$ do sistema em malha-fechada é única e está definida para $t \geq 0$. O conjunto dos controladores admissíveis f é denotado por \mathcal{F} .

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Agora, introduzimos o **funcional custo** $J: \mathbb{R}^n \times F \rightarrow [0, \infty]$ definido por

$$J(x_0, f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{F} \quad (16)$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, e $x(t)$, $t \geq 0$, é a única solução do sistema em malha-fechada com o controlador admissível

$u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$ e a condição inicial $x(0) = x_0$. Dizemos que um controlador admissível $f^* \in \mathcal{F}$ é **ótimo** em relação ao funcional custo (16) quando f^* minimiza (16) no seguinte sentido:

- $J(x_0, f^*) < \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $J(x_0, f^*) \leq J(x_0, f)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}$

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Teorema 3 (LQG): Considere a planta (15) e o funcional custo (16). Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$. Assuma que $w_1(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1(t)$ e $w_2(t)$, para todo $t \geq 0$. Suponha que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Então, a configuração controlador-observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - L^*C)\hat{x}(t) + Bu(t) + L^*y(t) \\ u(t) &= -K^*\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{17}$$

é o **único controlador ótimo** de (16) quando a matriz de ganho K^* (realimentação) é projetada independentemente de L^* (observador) e dos ruídos $w_1(t)$, $w_2(t)$ da seguinte maneira (**princípio da separação estocástica**):

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Teorema 3 (continuação):

- 1 Encontre K^* pelo LQR (veja o Lab 10) como se o estado x pudesse ser medido na realimentação $u = K^*x$, o funcional custo fosse $J(x_0, \phi) = \int_0^\infty x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t) dt$, e a planta (15) fosse determinística, ou seja, $w_1(t) = w_2(t) = 0$, $t \geq 0$. Mais precisamente, determine a única solução semidefinida positiva $P_r^* \geq 0$ da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

e tome

$$K^* = R^{-1}B'P_r^*$$

- 2 Encontre L^* pelo Filtro de Kalman (veja o Teorema 2 acima). Mais precisamente, determine a única solução semidefinida positiva $P_o^* \geq 0$ da equação algébrica de Riccati

$$AP + PA' - PC'V_2^{-1}CP + V_1 = 0$$

e tome

$$L^* = P_o^*C'V_2^{-1}$$

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Obs 1: Nas hipóteses do teorema acima, assuma adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Em tal caso, denominamos o controlador ótimo (17) de **controlador quadrático linear Gaussiano (LQG – Linear Quadratic Gaussian)**. Pode-se mostrar que o controlador LQG é o **único controlador ótimo** do funcional custo (16) mesmo dentre controladores **não-lineares** em relação a y da forma $u(t) = f(y(\tau), 0 \leq \tau \leq t)$.

Obs 2: No Matlab, o comando `lqg` determina as matrizes de ganho K^* e L^* do controlador LQG.

Obs 3: O controlador LQG **não** possui propriedades de robustez em malha-fechada similares às do LQR.

Obs 4: **A sintonia do ganho K de realimentação pelo LQR e do Filtro de Kalman deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e atenuação de ruído!**

11.3. Princípio da Separação Estocástica

Obs 5: Em situações práticas, há sempre a presença de ruídos. Suponha que todos os estados da planta podem ser medidos, ou seja, $y = x + w_2(t)$ ($C = I$). Teremos então a presença de ruídos no sinal de controle $u(t) = -Kx(t)$ e, dependendo de suas intensidades, poderão resultar numa deterioração do atuador e da planta, além de degradar o desempenho do sistema em malha-fechada. Portanto, mesmo quando todos os estados podem ser medidos, ainda assim a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman poderá exercer um papel crucial no desempenho do sistema em malha-fechada e na preservação do atuador e da planta, devido à atenuação dos ruídos presentes no sinal de controle $u(t) = -K\hat{x}(t)$.

11.4. Procedimentos

1. Considere o sistema massa-mola da Seção 5.5 do Lab 5. Assuma que as variáveis de estado não podem ser realimentadas e que os ruídos do processo $w_1(t)$ e de medição $w_2(t)$ possuem matrizes de intensidade **nominais** $V_1 = 0.0005 I$ e $V_2 = 0.001 I$. Repita novamente as simulações do Item 2 nos Procedimentos do Lab 6 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação, comparando em cada caso o desempenho do sistema em malha-fechada (rastreamento, rejeição, controle, erro de estimação, estado estimado) com o obtido pela utilização do ganho L^* do Filtro de Kalman no estimador de estado. **Dica:** para que $w_1(\cdot)$ e $w_2(\cdot)$ sejam não-correlacionados, utilize valores diferentes no campo Seed do bloco Random Number no Simulink.

Conclusão: Há menos ruído no sinal de controle $u = -K\hat{x} - K_m x_m$ com o Filtro de Kalman do que com o estimador de estado por alocação de polos! No entanto, o sobressinal durante o regime transitório da rejeição da perturbação é maior com o Filtro de Kalman. Isto era esperado? Justifique sua resposta. **Dica:** determine os polos de $A - L^*C$.

11.4. Procedimentos

2. Agora, considere o controlador LQG. Para isto, escolha $Q = I > 0$ e $R = rI > 0$ (veja o primeiro método da **Obs 3** do Lab 10) com: $r = 0.01$, $r = 0.4$, $r = 40$. Compare o desempenho obtido em malha-fechada (rastreamento, rejeição, controle, erro de estimação) pelo LQG com o encontrado por imposição de polos no item anterior, assumindo que: $x(0) = \hat{x}(0) = 0$, polos de $A_a - B_a K_a$ em $s = -1$, e polos de $A - LC$ em $s = -2$ (duas vezes mais rápido).

Conclusão: Para $r = 0.4$, obtivemos um melhor desempenho no rastreamento da referência com rejeição de perturbação e um menor esforço de controle com o LQG do que por imposição de polos! E isto ainda foi alcançado com menos ruído no estado estimado \hat{x} e no sinal de controle $u = -K\hat{x} - K_m x_m!$

11.4. Procedimentos

3. Por fim, considere novamente o controlador LQG com $r = 0.4$ como acima, mas assumindo que as intensidade **nominais** de V_1 e V_2 são **desconhecidas**. Sintonize o Filtro de Kalman de modo que o sobressinal máximo da saída y_1 devido à perturbação não ultrapasse a amplitude de 4.35. **Dica:** escolha $V_1 = \bar{V}_1 = I > 0$ e $V_2 = r_{fk} \bar{V}_2 = r_{fk} I > 0$, e varie $r_{fk} > 0$ por tentativa e erro, mas não se esquecendo de levar em conta o ruído resultante no estado estimado e no sinal de controle (veja a **Obs 3** da Seção 11.2 acima).

Conclusão: Sintonizamos uma configuração controlador-observador para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação de um sistema multivariável na presença de ruídos através da variação de 2 parâmetros reais: r (LQR) e r_{fk} (Filtro de Kalman)!

Objetivos: Vamos estudar sistemas em tempo discreto e o sistema digital equivalente de uma planta linear em tempo contínuo. Veremos que basicamente todos conceitos e resultados já abordados para sistemas lineares em tempo contínuo permanecem válidos em tempo discreto (com as adaptações óbvias): estabilidade, controlabilidade, observabilidade, realimentação de estado, estimador de estado, LQR, Filtro de Kalman, LQG, etc.

12.1. Sistema Discreto Equivalente

Considere uma planta linear modelada por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{18}$$

Suponha que a planta será controlada por um computador. Seja $T_s > 0$ o período de amostragem. A cada instante de amostragem $t = kT_s$, $k \in \mathbb{N}$, um algoritmo programado no computador determina o controle $u[k] = u(kT_s)$, e então $u[k]$ é enviado ao conversor D/A (ZOH). Desse modo, o controle aplicado na planta é constante por partes e dado por

$$u(t) = u[k], \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s,$$

para $k \in \mathbb{N}$. Vamos determinar na sequência o sistema efetivamente “visto” pelo computador a partir do conversor D/A nos instantes de amostragem $t = kT_s$ (conversor A/D).

12.1. Sistema Discreto Equivalente

Relembre que:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Logo, para $t = kT_s$, temos:

$$x[k] \triangleq x(kT_s) = e^{AkT_s}x(0) + \int_0^{kT_s} e^{A(kT_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Em particular, para $t = (k+1)T_s$:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= e^{A(k+1)T_s}x(0) + \int_0^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{AT_s} \underbrace{\left[e^{AkT_s}x(0) + \int_0^{kT_s} e^{A(kT_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau \right]}_{=x[k]} \\ &\quad + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}Bu(\tau) d\tau\end{aligned}$$

12.1. Sistema Discreto Equivalente

Desse modo, fazendo a mudança de variável $\alpha = (k + 1)T_s - \tau$ na segunda integral acima e utilizando o fato de que $u(t) = u[k]$ para $kT_s \leq t < (k + 1)T_s$, obtemos:

$$x[k + 1] = \underbrace{e^{AT_s}}_{=A_d} x[k] + \underbrace{\left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B}_{=B_d} u[k] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

$$y[k] \triangleq y(kT_s) = Cx(kT_s) = Cx[k]$$

Concluimos assim que, ao aplicarmos uma entrada constante por partes $u(t)$ via computador na planta, então, nos instantes de amostragem $t = kT_s$, o estado $x[k] = x(kT_s)$ evolui de acordo com a **equação a diferenças**

$$x[k + 1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

e a saída $y[k] = y(kT_s)$ é determinada pela equação algébrica

$$y[k] = Cx[k]$$

12.1. Sistema Discreto Equivalente

Denominamos

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= Cx[k]\end{aligned}\tag{19}$$

onde

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B$$

de **sistema discreto equivalente** da planta (18).

Obs 1: No Matlab, o comando `c2d` determina as matrizes A_d e B_d do sistema discreto equivalente.

Obs 2: Pode-se mostrar que, se os polos (autovalores) da matriz A são $s = p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$, então os polos de A_d são $z = e^{p_1 T_s}, \dots, e^{p_n T_s} \in \mathbb{C}$.

12.1. Sistema Discreto Equivalente

Obs 3: Não há na literatura uma metodologia geral para a especificação do período de amostragem $T > 0$. Um dos métodos é tomar (como primeira escolha!):

$$T_s = \frac{3\tau_\ell}{20} = \frac{3}{20|p_\ell|}$$

onde $\tau_\ell = -1/p_\ell$ é a constante de tempo do polo desejado p_ℓ **mais lento** de **malha-fechada** (no SPE!).

Na sequência, vamos tratar de sistemas em tempo discreto da forma

$$\begin{aligned}x[k + 1] &= Ax[k] + Bu[k] \\y[k] &= Cx[k]\end{aligned}$$

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Considere uma sistema linear em tempo discreto modelado por (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\y[k] &= Cx[k]\end{aligned}\tag{20}$$

Fixada uma condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ e uma entrada $u[k] \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, pode-se mostrar a que solução correspondente $x[k]$ e a saída associada $y[k]$, $k \in \mathbb{N}$, são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}x[k] &= A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u[j] \\y[k] &= \underbrace{CA^k x[0]}_{y_0[k]} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \overbrace{CA^{k-1-j} B}^{=\mathcal{G}[k-j]} u[j]}_{y_{esn}[k]=\mathcal{G}[k]*u[k]}\end{aligned}$$

Logo, (20) é de fato um sistema **linear** (i.e. satisfaz o **princípio da superposição**)! Note que a **propriedade de decomposição** também é válida: $y[k] = y_0[k] + y_{esn}[k]$

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Denominamos $\mathcal{G}[k] = CA^k B$, $k \in \mathbb{N}$, de **matriz resposta ao impulso** do sistema.

Agora, aplicando a transformada \mathcal{Z} em ambos os lados de

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k]\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}zX[z] - zx[0] &= AX[z] + BU[z] \\ Y[z] &= CX[z]\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}X[z] &= (X_1[z], \dots, X_n[z])' = \mathcal{Z}\{x[k]\} = (\mathcal{L}\{x_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{x_n[k]\})' \\ U[z] &= (U_1[z], \dots, U_m[z])' = \mathcal{Z}\{u[k]\} = (\mathcal{L}\{u_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{u_m[k]\})' \\ Y[z] &= (Y_1[z], \dots, Y_p[z])' = \mathcal{Z}\{y[k]\} = (\mathcal{L}\{y_1[k]\}, \dots, \mathcal{L}\{y_p[k]\})'\end{aligned}$$

Portanto, $(zI - A)X[z] = zx[0] + BU[z]$ e, assim,

$$\begin{aligned}X[z] &= z(zI - A)^{-1}x[0] + (zI - A)^{-1}BU[z] \\ Y[z] &= Cz(zI - A)^{-1}x[0] + C(zI - A)^{-1}BU[z]\end{aligned}$$

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Mas, para $k \in \mathbb{N}$,

$$x[k] = A^k x[0] + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u[j]$$

$$y[k] = \underbrace{CA^k x[0]}_{y_0[k]} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \overbrace{CA^{k-1-j} B}^{=G[k-j]} u[j]}_{y_{esn}[k]=G[k]*u[k], \text{ com } G[0]=0}$$

Concluimos então que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\} = A^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$Y[z] = \underbrace{Cz(zI - A)^{-1}x[0]}_{=Y_0[z]} + \underbrace{C(zI - A)^{-1}B U[z]}_{=Y_{esn}[k] = G[z]U[z]} = G[z] = \mathcal{Z}\{G[k]\}$$

onde

$$G[z] = \mathcal{Z}\{G[k]\} \in \mathbb{R}^{p \times m} = C(zI - A)^{-1}B$$

é denominada de **matriz de transferência** do sistema.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Logo, para $x[0] = 0$ (condições iniciais nulas), temos

$$Y[z] = Y_{esn}[z] = G[z]U[z]$$

Dizemos que $\gamma \in \mathbb{C}$ é um **polo** da matriz da transferência $G[z]$ quando γ é um polo de **algum** elemento de $G[z]$. Assim, cada polo de cada elemento de $G[z]$ é um polo da matriz de transferência $G[z]$. Como os autovalores da matriz A são as raízes de $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$, concluímos que **todo polo** da matriz de transferência $G[z]$ é um **autovalor** da matriz A . No entanto, nem todo autovalor de A é um polo de $G[z]$ devido a possíveis cancelamentos polo-zero nos elementos de $G[z]$.

Na sequência, vamos abordar estabilidade, controlabilidade, observabilidade, estabilização por realimentação de estado, observadores de estado, configuração controlador-observador, controlador LQR, Filtro de Kalman e controlador LQG para sistemas lineares em tempo discreto. Veremos que os resultados são análogos aos de sistema lineares em tempo contínuo.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Definição (Estabilidade Interna): Assuma que $u[k] = 0$, $k \in \mathbb{N}$ (entrada nula). Dizemos que a origem $x^e = 0$ do sistema (20) é **estável** quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x[0]\| < \delta \Rightarrow \|x[k]\| < \epsilon, \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

Quando $x^e = 0$ não é estável, dizemos que $x^e = 0$ é **instável**. Dizemos que $x^e = 0$ é **globalmente assintoticamente estável** do sistema quando $x^e = 0$ é estável e, além disso, dada qualquer condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x[0] = 0$.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Definição (Estabilidade Externa): Assuma que $x[0] = 0$ (condição inicial nula). Dizemos que o sistema (20) é **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) estável** quando, para qualquer entrada limitada $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, temos que a **resposta estado nulo** $y[k] = y_{esn}[k] = \mathcal{G}[k] * u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, é limitada. Quando o sistema não é BIBO estável, dizemos que o mesmo é **BIBO instável**. Isto significa que existe ao menos uma entrada limitada $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, para a qual a resposta estado nulo $y[k] = y_{esn}[k] = \mathcal{G}[k] * u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, **não é limitada**.

Teorema 1: Considere um sistema da forma (20). Então:

- 1 A origem $x^e = 0$ é instável caso a matriz A possua **algum** polo (autovalor) **fora** do círculo unitário (i.e. módulo maior que 1)
- 2 A origem $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** a matriz A possui **todos** os polos (autovalores) **dentro** do círculo unitário (i.e. módulo menor que 1)
- 3 O sistema é BIBO estável **se e somente se** cada elemento $G_{ij}[z]$ da matriz de transferência $G[z]$ é BIBO estável, ou seja, todos os polos de $G[z]$ estão dentro do círculo unitário

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Obs 1: Relembre que todo polo de $G[z]$ é um polo (autovalor) da matriz A . Portanto: (a) se $G[z]$ possui algum polo fora do círculo unitário, então o sistema é BIBO instável e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio instável; e (b) se todos os polos da matriz A estão dentro do círculo unitário, então o $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, além disso, o sistema é BIBO estável. No entanto, um sistema pode ser BIBO estável mas $x^e = 0$ não ser globalmente assintoticamente estável (devido a cancelamentos polo-zero instáveis nos elementos de $G[z]$).

Obs 2: Relembre que a solução de $x[k+1] = Ax[k]$ para a condição inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$x[k] = A^k x[0], \quad k \in \mathbb{N}$$

com

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z(z-A)^{-1}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z \text{Adj}(zI-A)/\det(zI-A)\} = A^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Portanto, quanto mais afastados de $z = \pm 1$ estiverem os polos da matriz A dentro do círculo unitário, mais rápida será a convergência da solução $x[k]$ para $x^e = 0$.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Definição: Dizemos que o sistema (20) é **controlável** quando, para cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada estado final $x_N \in \mathbb{R}^n$, existe uma entrada $u: \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que a solução $x: \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema para a condição inicial $x[0] = x_0$ satisfaz $x[N] = x_N$, para algum inteiro positivo N . Isto significa que sempre podemos levar o sistema de todo estado inicial para qualquer estado final desejado em tempo finito através de uma entrada adequada. Dizemos que o sistema é **não-controlável** quando ele não for controlável.

Definição: Dizemos que o sistema é **observável** quando, para todo estado inicial $x[0] \in \mathbb{R}^n$ desconhecido, existe um inteiro positivo N tal que o conhecimento de **qualquer** entrada aplicada $u[k] \in \mathbb{R}^m$ e da saída correspondente $y[k] \in \mathbb{R}^p$ no intervalo de tempo $\{0, \dots, N\}$ é suficiente para determinar de maneira única o estado inicial $x[0]$. Dizemos que o sistema é **não-observável** quando ele não for observável.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Teorema 2: Considere um sistema da forma (20). Então:

- 1 O sistema é controlável **se e somente se** o par (A, B) é controlável
- 2 O sistema é observável **se e somente se** o par (A, C) é observável

Em particular, quando o sistema (20) é controlável, sempre podemos encontrar uma realimentação de estado da forma $u[k] = -Kx[k]$ (assumindo que todas as variáveis de estado podem ser realimentadas/medidas) de modo que todos os polos do sistema em malha-fechada

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k] = (A - BK)x[k]$$

sejam posicionados (arbitrariamente) dentro círculo unitário (e a origem $x^e = 0$ do sistema em malha-fechada é globalmente assintoticamente estável).

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

E, quando o sistema (20) é observável, sempre podemos determinar a matriz de ganho L do observador de estado⁴

$$\begin{aligned}\hat{x}[k+1] &= A\hat{x}[k] + Bu[k] + L(y[k] - C\hat{x}[k]) \\ &= (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k]\end{aligned}$$

de modo que todos os polos de $A - LC$ sejam posicionados (arbitrariamente) dentro do círculo unitário. Consequentemente, a dinâmica do erro de estimação $e[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ é dada por

$$\begin{aligned}e[k+1] &= x[k+1] - \hat{x}[k+1] \\ &= (A - LC)e[k]\end{aligned}$$

e, quando todos os polos de $A - LC$ estão dentro do círculo unitário, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0$$

para qualquer condição inicial $e[0] = x[0] - \hat{x}[0]$.

⁴Temos que $\hat{y}[k] = C\hat{x}[k]$ pode ser visto como uma estimativa da saída $y[k] = Cx[k]$. Logo: $\hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + L(y[k] - \hat{y}[k])$.

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Considere a seguinte configuração controlador-observador para o sistema (20):

$$\begin{aligned}\hat{x}[k + 1] &= (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k] \\ u[k] &= -K\hat{x}[k]\end{aligned}$$

Como matricialmente o sistema (20) em malha-fechada com a configuração controlador-observador acima é exatamente o mesmo como em tempo contínuo, também é válido em tempo discreto o **princípio da separação (determinística)**: os polos de malha-fechada são a união (com repetição) dos polos de $A - BK$ (realimentação) com o polos de $A - LC$ (observador).

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Agora, considere a planta (em tempo contínuo) (18) e o sistema discreto equivalente (19). Os próximos resultados tratam da preservação de controlabilidade e observabilidade entre os dois sistemas.

Teorema 3: Se a planta (em tempo contínuo) (18) não é controlável (respectivamente, observável), então o sistema discreto equivalente (19) não é controlável (respectivamente, observável) para qualquer período de amostragem $T_s > 0$.

Teorema 4: Se a planta (em tempo contínuo) (18) é controlável (respectivamente, observável), então o sistema discreto equivalente (19) será controlável (respectivamente, observável) quando o período de amostragem $T_s > 0$ satisfizer, para $i, j = 1, \dots, n$:

$$|\operatorname{Im}(p_i - p_j)| \neq 2\pi m / T_s, \text{ para } m = 1, 2, \dots, \text{ sempre que } \operatorname{Re}(p_i) = \operatorname{Re}(p_j)$$

onde p_i são os polos da matriz A da planta (18).

Isto significa que o sistema discreto equivalente pode perder controlabilidade/observabilidade por uma escolha inadequada do período de amostragem!

12.2. Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Os conceitos de estabilizabilidade e detectabilidade para sistemas em tempo discreto são análogos aos que vimos para sistemas em tempo contínuo, pois as decomposições canônicas e os teoremas apresentados na Seção 2.10 da Teoria permanecem válidos (com as adaptações óbvias, e.g. trocar \dot{x} por $x[k + 1]$, $t \geq 0$ por $k \in \mathbb{N}$, etc).

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Os próximos resultados tratam do LQR, Filtro Kalman e LQG em tempo discreto.

Teorema 1 (LQR): Considere o sistema (20) e o funcional custo

$$\begin{aligned} J(x_0, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]' Q x[k] + \phi(x[k])' R \phi(x[k]) & (21) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]' Q x[k] + u[k]' R u[k], \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \phi \in \Phi \end{aligned}$$

onde $x[k]$ é a solução correspondente do sistema em malha-fechada para a condição inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e realimentação de estado $u[k] = \phi[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$ com $D \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Teorema 1 (continuação): Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da **equação algébrica de Riccati discreta**

$$P = A'PA - A'PB(B'PB + R)^{-1}B'PA + Q$$

Então, a realimentação de estado **linear**

$$u^*[k] = -K^*x[k] = -\underbrace{(B'P^*B + R)^{-1}B'P^*A}_{=K^*}x[k]$$

é a **única realimentação ótima**⁵ de (21), e os polos de

$$A - BK^* = A - B(B'P^*B + R)^{-1}B'P^*A$$

(sistema em malha-fechada) estão dentro do círculo unitário.

Denominamos $u^*[k] = -K^*x[k]$ de **regulador quadrático linear (LQR – Linear Quadratic Regulator)**.

⁵Ressaltamos que $u^*[k] = -K^*x[k] = \phi^*(x[k])$ é ótima no sentido de que $J(x_0, \phi^*) < \infty$ e $J(x_0, \phi^*) \leq J(x_0, \phi)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\phi \in \Phi$, onde Φ é o conjunto das realimentações admissíveis, ou seja, das realimentações $u = \phi(x)$ tais que $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $\phi(0) = 0$, e em que a origem do sistema em malha-fechada correspondente seja globalmente assintoticamente estável.

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Obs: No Matlab, o comando `dlqr` determine a matriz de ganho K^* do LQR em tempo discreto. Para a escolha de $Q \geq 0$ e $R > 0$, veja a Obs 3 do Lab 11.

Teorema 2 (Filtro de Kalman): Considere o sistema linear em tempo discreto (n estados, m entradas, p saídas)

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + v_1[k] \\y[k] &= Cx[k] + v_2[k]\end{aligned}\tag{22}$$

com uma dada entrada **determinística** $u[k] \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$.

Suponha que $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes**

$V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Assuma que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$ com $\bar{D} \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times n}$. Seja $P^* \geq 0$ a única solução semidefinida positiva da **equação algébrica de Riccati discreta**

$$P = APA' - APC'(CPC' + V_2)^{-1}CPA' + V_1$$

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Teorema 2 (continuação): Então,

$$L^* = AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}$$

é uma matriz de ganho **ótimo** para o estimador de estado linear⁶

$$\hat{x}[k+1] = (A - LC)\hat{x}[k] + Bu[k] + Ly[k]$$

e os polos de $A - L^*C = A - AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}C$ estão dentro do círculo unitário, com

$$\bar{e}[k+1] = (A - L^*C)\bar{e}[k], \quad \bar{e}[0] = \bar{x}_0 - \hat{x}[0],$$

onde $\bar{x}_0 = E\{x[0]\}$ é a média de $x(0)$ e $\bar{e}[k] = E\{e[k]\}$ a média do erro de estimação no instante $k \geq 0$. Além disso, $E_{L^*} = \text{tr}[P^*]$.

Denominamos o **estimador de estado linear ótimo** com

$L = L^* = AP^*C'(CP^*C' + V_2)^{-1}$ de **Filtro de Kalman (Preditivo em Regime Permanente)**.

⁶Dizemos que um ganho L é **admissível** quando os polos de $A - LC$ estão dentro do círculo unitário, e $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{e'(t)e(t)\} = E_L \in \mathbb{R}$ é finito e independente de $e[0]$. Assim, L^* é **ótima** quando for admissível e $E_{L^*} \leq E_L < \infty$ para qualquer outro L admissível. Além disso, as **Obs 1 a 4** da Seção 11.2 do Lab 11 permanecem válidas em tempo discreto (com adaptações óbvias).

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Obs: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Então, pode-se mostrar que o Filtro de Kalman é um estimador de estado **ótimo** mesmo dentre estimadores **não-lineares** que determinam uma estimativa $\hat{x}[k]$ de $x[k]$ a partir de $y[\tau]$, $u[\tau]$, $0 \leq \tau \leq k - 1$.

Teorema 3 (LQG): Considere o sistema (22) e o funcional custo $J: \mathbb{R}^n \times F \rightarrow [0, \infty]$ dado por

$$J(x_0, f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x[k]' Q x[k] + u[k]' R u[k] dt \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{F} \quad (23)$$

onde $Q \geq 0$, $R > 0$, $x[k]$, $k \in \mathbb{N}$, é a solução do sistema em malha-fechada com o controlador admissível

$u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k)$ e a condição inicial $x(0) = x_0$, e \mathcal{F} é conjunto das realimentações admissíveis, ou seja, das realimentações $u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k)$ tais que f é linear em relação à saída y . Suponha que $Q \geq 0$, $R > 0$, (A, B) é estabilizável e (A, D) é detectável, onde $Q = D'D$.

12.3. Controle de Sistemas Lineares em Tempo Discreto

Teorema 3 (continuação): Assuma que $w_1[k] \in \mathbb{R}^n$ e $w_2[k] \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, são ruídos brancos não-correlacionados com matrizes de intensidade **constantes** $V_1 \geq 0$ e $V_2 > 0$, respectivamente, e que o vetor aleatório inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ é independente de $w_1[k]$ e $w_2[k]$, $k \in \mathbb{N}$. Suponha que (A, C) é detectável e (A, \bar{D}) é estabilizável, onde $V_1 = \bar{D}'\bar{D}$. Então, a configuração controlador-observador

$$\begin{aligned}\hat{x}[k+1] &= (A - L^*C)\hat{x}[k] + Bu[k] + L^*y[k] \\ u[k] &= -K^*\hat{x}[k]\end{aligned}\tag{24}$$

é o **único controlador ótimo**⁷ de (23) quando a matriz de ganho K^* (realimentação) é projetada independentemente de L^* (observador) e dos ruídos $w_1[k]$, $w_2[k]$ da seguinte maneira (**princípio da separação estocástica**):

- 1 Determine K^* como no LQR (Teorema 5 acima);
- 2 Determine L^* como no Filtro no Kalman (Teorema 6 acima).

⁷Dizemos que um controlador admissível $f^* \in \mathcal{F}$ é **ótimo** em relação ao funcional custo (23) quando f^* minimiza (23) no seguinte sentido: $J(x_0, f^*) < \infty$ e $J(x_0, f^*) \leq J(x_0, f)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{F}$.

Obs 1: Nas hipóteses do teorema acima, assumamos adicionalmente que $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$, x_0 são processos estocásticos Gaussianos. Em tal caso, denominamos o controlador ótimo (17) de **controlador quadrático linear Gaussiano (LQG – Linear Quadratic Gaussian)**. Pode-se mostrar que o controlador LQG é o **único controlador ótimo** do funcional custo (16) mesmo dentre controladores **não-lineares** em relação a y da forma $u[k] = f(y[\tau], 0 \leq \tau \leq k - 1)$.

Obs 2: A sintonia do ganho K de realimentação pelo LQR e do Filtro de Kalman deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e atenuação de ruído!

Obs 3: Em situações práticas, há sempre a presença de ruídos. Suponha que todos os estados da planta podem ser medidos, ou seja, $y = x + w_2[k]$ ($C = I$). Teremos então a presença de ruídos no sinal de controle $u(t) = -Kx[k]$ e, dependendo de suas intensidades, poderão resultar numa deterioração do atuador e da planta, além de degradar o desempenho do sistema em malha-fechada. Portanto, mesmo quando todos os estados podem ser medidos, ainda assim a configuração controlador-observador com o Filtro de Kalman poderá exercer um papel crucial no desempenho do sistema em malha-fechada e na preservação do atuador e da planta, devido à atenuação dos ruídos presentes no sinal de controle $u[k] = -K\hat{x}[k]$.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Os próximos dois resultados mostram como podemos estabilizar um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear em tempo contínuo através de um computador. O algoritmo de controle a ser implementado no computador é determinado pelo sistema discreto equivalente correspondente ao sistema linearizado associado.

Teorema 1: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x, u)$. Escolha um período de amostragem $T_s > 0$ qualquer, e considere a equação de estado do sistema digital equivalente correspondente ao sistema linearizado associado

$$x_\delta[k+1] = A_d x_\delta[k] + B_d u_\delta[k], \quad A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e)$$

Suponha que o par (A_d, B_d) é controlável/estabilizável, e escolha uma matriz de ganho K_d de forma que todos os polos de $A_d - B_d K_d$ estejam dentro do círculo unitário.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Teorema 1 (continuação): Então, a realimentação **linear** de estado

$$u_d[k] = -K_d(x[k] - x^e) + u^e, \quad \text{com } x[k] = x(kT_s)$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada controlado por computador

$$\dot{x} = f(x, u(t))$$

$$u(t) = u_d[k] = -K_d(x(kT_s) - x^e) + u^e, \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

Obs: O algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

- 1 Leia $x_k = x(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
- 2 Calcule $u_k = -K_d(x_k - x^e) + u^e$
- 3 Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
- 4 Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 1.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Teorema 2: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema não-linear em tempo contínuo

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

Escolha um período de amostragem $T_s > 0$ qualquer, e considere a equação de estado do sistema digital equivalente correspondente ao sistema linearizado associado

$$x_\delta[k+1] = A_d x_\delta[k] + B_d u_\delta[k], \quad A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \left(\int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha \right) B$$

$$y_\delta[k] = C x_\delta[k]$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e)$$

Suponha que (A_d, B_d) é controlável/estabilizável e que (A_d, C) é observável/detectável. Escolha K_d e L_d de forma que todos os polos de $A_d - B_d K_d$ e $A_d - L_d C$ estejam dentro do círculo unitário.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Teorema 2 (continuação): Então, a configuração controlador-observador **linear**

$$\begin{aligned}\hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) \\ &\quad + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e \\ u_d[k] &= -K_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e, \quad \text{com } y[k] = y(kT_s)\end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja,

$\tilde{x}^e = (x^e, x^e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada controlado por computador com vetor de estado $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = f(x, u(t))$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) \\ &\quad + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e\end{aligned}$$

$$u(t) = u_d[k] = -K_d(\hat{x}[k] - x^e) + u^e, \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$

$$y = h(x)$$

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Obs 1: O algoritmo de controle a ser implementado no computador é dado por:

- 1 $\hat{x}_k = \hat{x}(0)$ (inicialização – condição inicial do observador de estado);
- 2 Calcule $u_k = -K_d(\hat{x}_k - x^e) + u^e$;
- 3 Aplique u_k na planta (conversor D/A – ZOH);
- 4 Leia $y_k = y(kT_s)$ (conversor A/D – amostrador);
- 5 Calcule
$$\hat{x}_{k+1} = (A_d - L_d C)(\hat{x}_k - x^e) + B_d(u_k - u^e) + L_d(y_k - h(x^e)) + x^e;$$
- 6 Atualize $\hat{x}_k = \hat{x}_{k+1}$;
- 7 Espere até completar T_s segundos e volte ao Passo 2.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Obs 1 (continuação): Note que, quanto menor for o período de amostragem $T_s > 0$, maior será o custo computacional envolvido, e maior a possibilidade de acumulação de erros numéricos devido à precisão numérica finita nos computadores. Além disso, o custo computacional é proporcional à ordem n da planta em decorrência do cálculo do controle e do estado estimado. Relembramos que restrições técnicas nos conversores A/D e D/A impõem um valor mínimo $T_{s_{min}}$ para T_s , de modo que devemos ter $T_s \geq T_{s_{min}}$. Por outro lado, como a planta está em malha-aberta entre os instantes de amostragem, T_s também não deve ser muito grande na prática.

12.4. Controle por Computador de Sistemas Não-Lineares em Tempo Contínuo

Obs 2: A escolha do período de amostragem $T_s > 0$ pode afetar o tamanho da região de atração do ponto de equilíbrio $\bar{x}^e = (x^e, x^e)$ de malha-fechada. **Concluimos, assim, que a escolha de T_s e dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração (e atenuação de ruído)!**

12.5. Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com

$x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração). 279 / 300

12.5. Procedimentos

2. Determine as matrizes de ganho $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $K_d \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $L_d \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ de modo que o controlador-observador em tempo contínuo (projetado via sistema linearizado associado)

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= (A - LC)(\hat{x} - x^e) + B(u - u^e) + L(y - h(x^e)) \\ u &= -K(\hat{x} - x^e) + u^e\end{aligned}$$

e o controlador-observador em tempo discreto (projetado via discretização do sistema linearizado associado)

$$\begin{aligned}\hat{x}_d[k+1] &= (A_d - L_d C)(\hat{x}_d[k] - x^e) + B_d(u_d[k] - u^e) \\ &\quad + L_d(y[k] - h(x^e)) + x^e \\ u_d[k] &= -K_d(\hat{x}_d[k] - x^e) + u^e\end{aligned}$$

estabilizem assintoticamente o ponto de equilíbrio

$\tilde{x}^e = (x^e, x^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de malha-fechada, considerando:

12.5. Procedimentos

- (a) Polo duplo de $A - BK$ em $s = -4$, polo duplo de $A - LC$ em $s = -12$ (3 vezes mais rápido), polo duplo de $A_d - B_d K_d$ em $z = e^{-4T_s}$, polo duplo de $A_d - L_d C$ em $z = e^{-12T_s}$. Compare o desempenho (saída, estado, estado estimado, controle) do sistema em malha-fechada com o controlador em tempo contínuo e o controlador em tempo discreto, supondo que: $x(0) = 0$, $\hat{x}(0) = \hat{x}_d(0) = 0$, $x(0) = (3.12 + \pi/4, 5)$, e $T_s = 3/80$ (veja a **Obs 3** da Seção 12.1), $T_s = 3/400$ (cinco vezes menor), $T_s = 15/80$ (cinco vezes maior).
- (b) Repita o item (a), mas agora considerando: polo duplo de $A - LC$ em $s = -20$ (5 vezes mais rápido), polo duplo de $A_d - L_d C$ em $z = e^{-20T_s}$.

Conclusão: A escolha de T_s e dos polos de malha-fechada afeta o tamanho da região de atração! Assim, escolha de T_s e dos polos de malha-fechada deve levar em conta o compromisso entre desempenho dinâmico do sistema em malha-fechada, esforço de controle e tamanho da região de atração (e atenuação de ruído)!

Objetivos: Faremos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos quânticos em dimensão finita. Primeiramente, vamos revisar certos resultados de Álgebra Linear, para então apresentarmos os principais postulados da mecânica quântica em dimensão finita. Em seguida, veremos como analisar matematicamente partículas de spin-1/2. Por fim, ilustraremos alguns dos principais aspectos de sistemas quânticos tomando como exemplo partículas de spin-1/2.

13.1. Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n

Sejam

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)' \in \mathbb{C}^n$$

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)' \in \mathbb{C}^n$$

onde $\psi_1, \phi_1, \dots, \psi_n, \phi_n \in \mathbb{C}$. Então:

Produto interno: $\langle \psi, \phi \rangle = \psi_1^* \phi_1 + \dots + \psi_n^* \phi_n \in \mathbb{C}$

Vetores ortogonais: quando $\langle \psi, \phi \rangle = 0$

Norma: $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \sqrt{|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2} \geq 0$

Vetor unitário: quando $\|\psi\| = 1$

Conjunto ortonormal: Um conjunto $S \subset \mathbb{C}^n$ é **ortonormal** quando: (i) cada vetor de S é unitário ($\|\psi\| = 1$); e (ii) vetores distintos de S são ortogonais ($\langle \psi, \phi \rangle = 0$)

13.1. Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n

Seja $\widehat{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz quadrada complexa de ordem n . Então:

Matriz transposta conjugada: $\widehat{Q}^\dagger = (q_{ji}^*)$

Matriz hermitiana: quando $\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$

Matriz unitária: quando $\widehat{Q}^\dagger \widehat{Q} = I$, ou seja, $\widehat{Q}^\dagger = \widehat{Q}^{-1}$

Propriedades:

- 1 Suponha que \widehat{Q} é uma matriz hermitiana. Temos que os autovalores de \widehat{Q} são **reais** e, se ψ e ϕ são autovetores de \widehat{Q} associados a autovalores **distintos**, então $\langle \psi, \phi \rangle = 0$. Além disso, \mathbb{C}^n possui uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de \widehat{Q} . Em particular, todo vetor $\psi \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito como
$$\psi = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad \text{com } a_i = \langle v_i, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n$$
e $\|\psi\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$.
- 2 Se \widehat{Q} é um matriz unitária, então $\|\widehat{Q}\psi\| = \|\psi\|$ (preservação da norma)

13.2. Postulados da Mecânica Quântica

Observável: grandeza física que pode ser medida por um experimento no qual os resultados possíveis são números reais como, por exemplo, posição, velocidade e spin de uma partícula

- 1 Todo vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ representa um estado possível do sistema quântico. Se $k \in \mathbb{C}$ é unitário ($|k| = 1$), então $k\psi$ e ψ representam o mesmo estado do sistema. Além disso, todo estado possível do sistema é representado por um vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ e por seus múltiplos unitários, e somente por eles.
- 2 O espaço de estado de um sistema composto por dois subsistemas é $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{mn}$ (produto tensorial).
- 3 A cada observável Q (com um número finito de resultados possíveis) está associado uma matriz hermitiana $\hat{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$). Quando o sistema está no estado correspondente ao vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então o valor esperado de Q , no sentido usual de probabilidade, é dado por $\langle \psi, \hat{Q}\psi \rangle \in \mathbb{R}$.

13.2. Postulados da Mecânica Quântica

- 4 As medições possíveis de um observável Q são os autovalores (reais) de \hat{Q} . Se o resultado de Q é α (real), então **imediatamente** após a medição o estado do sistema corresponderá ao autovetor unitário $\psi_\alpha \in \mathbb{C}^n$ de \hat{Q} associado ao autovalor α (**colapso do estado**). Quando o sistema está no estado unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então a probabilidade de medirmos o valor α é dada por $|\langle \psi_\alpha, \psi \rangle|^2 \in \mathbb{R}$ (e, se de fato medirmos α , teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_\alpha$)
- 5 Caso o sistema esteja **isolado** e **não seja perturbado** por nenhum experimento, a dinâmica do estado do sistema é determinada pela **equação de Schrödinger** (linear!)

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = (-\frac{j}{\hbar}\hat{H})\psi(t)$$

onde $\hbar = h/2\pi \in \mathbb{R}$, h é a constante de Planck, $j \in \mathbb{C}$ é a unidade imaginária, e H é o observável correspondente à energia total do sistema (**Hamiltoniano**).

Consequências

- Técnicas de controle por realimentação não podem ser aplicadas diretamente
- Controle em malha-aberta
- Controle em malha-fechada pode ser realizado considerando o efeito das medições no sistema: o sistema em malha-fechada é modelado por equações diferenciais estocásticas no caso de tempo contínuo, e por equações a diferenças estocásticas no caso de tempo discreto (cadeias de Markov)

13.3. Partículas de Spin-1/2

Descrição

- Exemplos de partículas de spin-1/2: elétron, próton
- Medições possíveis: $\pm 1/2$
- Espaço de estado: \mathbb{C}^2
- $\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z)
- $\psi_+ = (1 \ 0)'$, $\psi_- = (0 \ 1)'$: base ortonormal
- ψ_+, ψ_- são autovetores de \hat{S}_z , pois:

$$\hat{S}_z \psi_+ = +\frac{1}{2} \psi_+$$

$$\hat{S}_z \psi_- = -\frac{1}{2} \psi_-$$

13.3. Partículas de Spin-1/2

Descrição (continuação)

- Estado unitário geral (**spinor**):

$$\psi = (\alpha \ \beta)' = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \in \mathbb{C}^2, \text{ onde}$$

$$\alpha = \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\beta = \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: **amplitudes de probabilidade**
- $p_z(+1/2) = |\alpha|^2 = |\langle \psi_+, \psi \rangle|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $+1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_+$
- $p_z(-1/2) = |\beta|^2 = |\langle \psi_-, \psi \rangle|^2 = 1 - |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção z quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $-1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_-$

13.3. Partículas de Spin-1/2

Importância

- **Qubit (quantum bit)**: análogo quântico do bit usual da teoria de computação clássica
- Partículas de spin-1/2: modelo de qubit (**informação**). O estado quântico ψ_- corresponde ao bit clássico 0, e ψ_+ ao bit clássico 1. No entanto, a **superposição** $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_-$ pode assumir um número infinito de estado quânticos e não há uma correspondência direta com bits clássicos!
- Teoria da computação quântica e da informação quântica: computadores quânticos processando algoritmos quânticos são mais eficientes computacionalmente que computadores clássicos
- IBM: implementou a primeira plataforma de computação quântica, a qual utiliza um processador quântico de 5 qubits
⇒ <http://www.research.ibm.com/quantum>

13.3. Partículas de Spin-1/2

Duas partículas de spin-1/2 (2 qubits)

- Espaço de estado: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$

- Estado unitário geral:

$$\psi = \alpha[\psi_{++}] + \beta[\psi_{+-}] + \gamma[\psi_{-+}] + \delta[\psi_{--}] \in \mathbb{C}^4, \text{ onde}$$

$$\alpha = \langle \psi_{++}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle \psi_{+-}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\gamma = \langle \psi_{-+}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \delta = \langle \psi_{--}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula
- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula
- $|\gamma|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula
- $|\delta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Considere uma partícula de spin-1/2. Vimos na seção anterior que

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z , e que todo spinor pode ser escrito como

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \in \mathbb{C}^2, \quad \text{com } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Agora, considere a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção x :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})', \quad \psi_-^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2})'$$

é uma base ortonormal de autovetores de \hat{S}_z , pois:

$$\hat{S}_x\psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2}\psi_+^{(x)}, \quad \hat{S}_x\psi_-^{(x)} = -\frac{1}{2}\psi_-^{(x)}$$

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Por exemplo, para se determinar um autovetor unitário

$\psi_+^{(x)} = (c \ d)' \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $+\frac{1}{2}$:

$$\widehat{S}_x \psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2} \psi_+^{(x)} \Rightarrow \widehat{S}_x \psi_+^{(x)} - \frac{1}{2} \psi_+^{(x)} = (\widehat{S}_x - \frac{1}{2} I) \psi_+^{(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} -c/2 + d/2 = 0 \\ c/2 - d/2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c = d$$

Portanto, podemos escolher $c = 1 \in \mathbb{R}$. Mas, como

$\psi_+^{(x)} = (c \ d) = (c \ c) = (1 \ 1)' \in \mathbb{C}^2$ deve ser unitário, basta fazermos a **normalização** de $\psi_+^{(x)}$:

$$\psi_+^{(x)} = \frac{1}{\|(c \ d)\|} (c \ d) = \frac{1}{\|(1 \ 1)\|} (1 \ 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) = (1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2})$$

(note que $\|\psi_+^{(x)}\| = \|(c \ d)\|/\|(c \ d)\| = 1$).

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Desse modo, todo spinor pode ser escrito como (mudança de base ortonormal)

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- = \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\alpha_x} \psi_+^{(x)} + \underbrace{\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\beta_x} \psi_-^{(x)}$$

onde⁸:

$$\alpha = \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$
$$\alpha_x = \langle \psi_+^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta_x = \langle \psi_-^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

Assim:

- $p_z(+1/2) = |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z (quando a partícula está no estado ψ)
- $p_z(-1/2) = |\beta|^2$: prob. de medirmos $-1/2$ na direção z
- $p_x(+1/2) = |\alpha_x|^2$: prob. de medirmos $+1/2$ na direção x
- $p_x(-1/2) = |\beta_x|^2$: prob. de medirmos $-1/2$ na direção x

⁸Por exemplo, como $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- = (\alpha \ \beta)'$ e $\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2})'$, temos que $\alpha_x = \langle \psi_+^{(x)}, \psi \rangle = \alpha/\sqrt{2} + \beta/\sqrt{2} = (\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 1: Suponha que o estado quântico de uma partícula de spin-1/2 é

$$\psi = \psi_+$$

ou seja, $\alpha = 1, \beta = 0$. Logo, se formos medir o spin da partícula na direção z , então é certo que vamos obter $+1/2$, i.e. com probabilidade igual a 1. No entanto, como

$$\alpha_x = \beta_x = 1/\sqrt{2}$$

se formos medir o spin da partícula na direção x , então vamos obter $+1/2$ com probabilidade $p_x(+1/2) = |\alpha_x|^2 = 1/2$, e $-1/2$ com probabilidade $p_x(-1/2) = |\beta_x|^2 = 1/2$, ou seja, temos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$.

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 1 (continuação): Assuma que de fato medimos $+1/2$ na direção x (a partícula estava no estado $\psi = \psi_+$). Então, imediatamente após tal medição, o estado quântico da partícula passou a ser $\psi_+^{(x)}$ (colapso do estado: $\psi = \psi_+ \rightsquigarrow \psi_+^{(x)}$!), ou seja, $\alpha_x = 1, \beta_x = 0$ e, portanto, $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Desse modo, se neste momento formos medir o spin da partícula na direção z (que agora está no estado $\psi_+^{(x)}$), então teremos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$! Concluimos assim que **a medição do spin da partícula na direção x alterou significativamente a probabilidade das possíveis medições do spin da partícula na direção z : a probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z passou de 100% para 50%!**

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2: Suponha que a dinâmica de uma partícula de spin-1/2 é determinada pela seguinte **equação de Schrödinger** (enquanto a partícula não é perturbada por nenhum experimento/medição)

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \left(-\frac{j}{\hbar}\hat{H}\right)\psi(t)$$

onde

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assuma que o spinor inicial da partícula é dado por

$$\psi(0) = \alpha(0)\psi_+ + \beta(0)\psi_- = (\alpha(0), \beta(0))' \in \mathbb{C}^2$$

com $|\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1$. Então, a dinâmica $\psi(t)$, $t \geq 0$, do spinor é:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t\right)^k}{k!}\right)\psi(0) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-jt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{jt/\hbar} \end{pmatrix}\psi(0) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2 (continuação): Note que $\psi(t)$ é de fato um vetor unitário, já que

$$\|\psi(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1$$

Isto era esperado, pois pode-se mostrar que, sempre que \hat{H} for uma matriz hermitiana, então $e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}$ será uma matriz unitária para todo $t \geq 0$. Em particular,

$$\|\psi(t)\| = \|e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0)\| = \|\psi(0)\| = 1$$

Mostramos acima que

$$\psi(t) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)} \psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)} \psi_- \in \mathbb{C}^2$$

Logo, concluímos que as **amplitudes de probabilidade** $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}$ de $\psi(t)$ são calculadas a partir da solução da **equação de Schrödinger**, que é uma **EDO linear determinística!** Em outras palavras, **as amplitudes de probabilidade seguem uma lei determinística ao longo do tempo!**

13.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2 (continuação): Por fim, ressaltamos que

$$|\alpha(t)|^2 = |\alpha(0)e^{-jt/\hbar}|^2 = |\alpha(0)|^2$$

$$|\beta(t)|^2 = |\beta(0)e^{jt/\hbar}|^2 = |\beta(0)|^2$$

ou seja, as amplitudes de probabilidades iniciais foram preservadas. No entanto, como (veja o Exemplo 1 acima)

$$|\alpha_x(t)|^2 = \left| \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} + \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2$$

$$|\beta_x(t)|^2 = \left| \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} - \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2$$

isto não ocorre para as amplitudes de probabilidade $|\alpha_x(t)|^2$ e $|\beta_x(t)|^2$.

Livros:

- 1 Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, 2010. Capítulos 1 e 2
- 2 David J. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics”, 2nd Edition, Prentice-Hall, 2005. Capítulos 1 a 4
- 3 Jim Baggott, “The Quantum Story: A History in 40 Moments”, Oxford University Press, 2011.

Paradoxo EPR:

https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox

Teorema de Bell:

https://en.wikipedia.org/wiki/Bell's_theorem