

HECTOR BESSA SILVEIRA

# Uma Estratégia de Controle para Sistemas Presa-Predador

Florianópolis, Março de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

# Uma Estratégia de Controle para Sistemas Presa-Predador

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Hector Bessa Silveira**

Florianópolis, Março de 2004.

# Uma Estratégia de Controle para Sistemas Presa-Predador

Hector Bessa Silveira

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 26 de Março de 2004.

---

Prof. Daniel Juan Pagano, Dr.  
Orientador

---

Prof. Jefferson Luiz Brum Marques, Ph.D.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. Daniel Juan Pagano, Dr.  
Orientador

---

Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D.

---

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.

*Pense simples ...*

*Ao meu pai, Hamilton, pela grande amizade e pelas incontáveis conversas,  
à minha mãe, Maria Lenise,  
aos meus irmãos, Sheila e Otávio,  
e à Denise, por todo o carinho.*

## *Agradecimentos*

*Agradeço ao meu orientador, Prof. Daniel Juan Pagano, pela amizade, incentivo e por ter estado sempre disponível durante todo o trabalho.*

*Aos Professores Aginaldo Silveira e Silva, Alexandre Trofino Neto, Eduardo Camponogara, Júlio Normey Rico e Ubirajara Franco Moreno por suas contribuições.*

*Aos Professores Kay Saalfeld e Tânia Tarabini Castellani do Departamento de Ecologia e Zoologia por suas ajudas sobre conceitos de Ecologia.*

*Aos Professores Antônio Mariano Nogueira Coelho, Décio Krause e Newton C. A. da Costa do Departamento de Filosofia pelos seminários sobre Fundamentos de Matemática e Filosofia da Ciência.*

*Gostaria de agradecer também a todos os colegas da pós-graduação, especialmente César Rafael Claire Torrico, Fabiano André Hennemann e Maurício dos Santos Kaster.*

*Aos amigos André Snoeijer, Carlos Henrique Illa Font, Daniel Raizer Heller, Diego Brites Ramos, Gustavo Yugo Shinzatto Rodrigues da Cunha, Luis Felipe Schramm de Carvalho Rosa, Rafael Araújo Silva, Ricardo Luiz Alves e Rodrigo Campos de Andrade pelo companheirismo.*

*Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica por todo o suporte disponibilizado.*

*À Universidade Federal de Santa Catarina e à CAPES pelo oferecimento de uma excelente formação acadêmica.*

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

# **UMA ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA SISTEMAS PRESA-PREDADOR**

**Hector Bessa Silveira**

Orientador : Daniel Juan Pagano, Dr.

Área : Automação e Sistemas

Palavras-chave : controle de sistemas presa-predador, exploração sustentável, sinal de controle constante por partes, recuperação ambiental, controle por modos deslizantes, política de gerenciamento ambiental

Número de páginas : 124

Neste trabalho, propomos o controle de sistemas presa-predador através de sinais constantes por partes, determinados a partir da metodologia de controle por modos deslizantes desenvolvida por Slotine e da medição periódica dos tamanhos das populações, não havendo necessidade de medi-los a cada instante de tempo. A estratégia de controle que apresentaremos possibilita o seguimento de trajetórias de referência quaisquer, não estando restrita a problemas de estabilização em um ponto fixo. No entanto, assumiremos que o sistema seja completamente conhecido, invariante no tempo e que sua dinâmica seja suficientemente lenta. O método é aplicado a um modelo de sistema presa-predador similar ao modelo Rosenzweig-MacArthur; ao invés de utilizar uma resposta funcional tipo II, utiliza uma tipo IV. Partindo do pressuposto de que as trajetórias do sistema oscilem num ciclo limite estável quando o ecossistema está em equilíbrio ecológico, mostraremos que a estratégia de controle proposta permite: explorar os recursos do sistema de maneira sustentável, ao mesmo tempo em que são mantidas trajetórias periódicas no sistema controlado; e restaurar a dinâmica natural do sistema (o ciclo limite), quando o efeito de uma perturbação ameaçar a sobrevivência dos predadores. Estes objetivos serão alcançados forçando as populações de presas e de predadores a seguir trajetórias de referência que são soluções do referido modelo, mas com um conjunto adequado de valores paramétricos. Os sinais de controle constantes por partes resultantes definirão políticas de gerenciamento factíveis, precisas e adequadas, que podem ser implementadas na prática por órgãos ambientais. Para satisfazermos a hipótese de que o sistema seja completamente conhecido, mostraremos que, com apenas alguns dos parâmetros previamente determinados, é possível estimar os demais pelo método de mínimos quadrados.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the refinements for the degree of Master in Electrical Engineering.

# **A CONTROL STRATEGY FOR PREDATOR-PREY SYSTEMS**

**Hector Bessa Silveira**

Advisor : Daniel Juan Pagano, Dr.  
Area : Automation and Systems  
Keywords : control of predator-prey systems, sustainable exploitation,  
piecewise-constant control signals, ecological recovery,  
sliding mode control, environmental management policy  
Number of pages : 124

We propose the control of predator-prey systems using piecewise-constant signals, which are determined by the sliding mode control methodology developed by Slotine and by measuring the sizes of the populations periodically, without the need of measuring them at every instant of time. The presented control strategy allows tracking of any chosen reference trajectories, and is not restricted to stabilization problems at a fixed point. Nevertheless, we shall assume that the system is completely known, time-invariant and that its dynamics is sufficiently slow. The method is applied to a predator-prey system model that is similar to the Rosenzweig-MacArthur model; instead of using a type II functional response, it uses a type IV. Assuming that the trajectories of the system oscillate at a stable limit cycle when the ecosystem is in ecological balance, we will show that the proposed control strategy allows: to explore the resources of the system in a sustainable manner, while still maintaining periodic trajectories on the controlled system; and to restore the natural dynamics of the system (the limit cycle), when the effect of disturbances threatens the survival of the predators. These objectives will be achieved by forcing the prey and predator populations to track reference trajectories that are solutions of the referred model, but with an appropriate set of parameter values. The resulting piecewise-constant control signals will define feasible, precise and adequate management policies that can be implemented by environmental agencies. In order to satisfy the hypothesis that the system is completely known, we will show that, with only some of the parameters previously determined, the remaining ones can be estimated by the least-squares method.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelagem da Dinâmica de Populações em Ecologia</b>	<b>8</b>
2.1	A Importância dos Modelos Matemáticos em Ecologia . . . . .	9
2.2	A Equação Logística . . . . .	10
2.3	O Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra . . . . .	15
2.4	Oscilações “Cíclicas” de Populações na Natureza . . . . .	19
2.5	Resposta Funcional . . . . .	20
2.6	Modelo Presa-Predador com Resposta Funcional Tipo IV . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Teoria de Controle por Modos Deslizantes</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>Controle de Sistemas Presa-Predador</b>	<b>40</b>
4.1	Considerações Sobre Estratégias de Controle para Sistemas Presa-Predador	41
4.2	Limitações Práticas da Metodologia CMD em Sistemas Presa-Predador . .	43
<b>5</b>	<b>Uma Estratégia de Controle para Sistemas Presa-Predador</b>	<b>56</b>
5.1	Aproximação de Sinais de Controle Contínuos por Sinais Constantes por Partes . . . . .	57
5.2	Resultados de Simulação . . . . .	69
5.2.1	Caso 1 – Exploração Sustentável . . . . .	69
5.2.2	Caso 2 – Recuperação Ambiental . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Identificação do Sistema Presa-Predador Isolado</b>	<b>101</b>
6.1	Resultados de Simulação . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>112</b>
<b>A</b>	<b>Fundamentos de Matemática</b>	<b>116</b>

<b>B Lema da Comparação e Demonstrações</b>	<b>118</b>
B.1 Lema da Comparação . . . . .	118
B.2 Demonstração da Desigualdade (3.20) . . . . .	118
B.3 Demonstração da Lei de Controle Descontínua (3.26)–(3.29) . . . . .	119

# Lista de Figuras

2.1	Taxa de crescimento <i>per capita</i> decrescente. . . . .	11
2.2	Taxa de crescimento da equação logística. . . . .	12
2.3	Crescimento logístico. . . . .	13
2.4	Plano de fase do modelo Lotka-Volterra. . . . .	18
2.5	Trajetoórias do modelo Lotka-Volterra. . . . .	18
2.6	Respostas funcionais. . . . .	23
2.7	Conjunto de bifurcações no espaço de parâmetros $(\alpha, \gamma)$ para $\beta = 2$ (* – esperada). . . . .	27
2.8	Planos de fase ( $\circ$ – nó ou foco instável; $\bullet$ – nó ou foco estável; $\times$ – sela). . . . .	28
2.8	Planos de fase ( $\circ$ – nó ou foco instável; $\bullet$ – nó ou foco estável; $\times$ – sela). . . . .	29
4.1	Planos de fase de SR e de SI. . . . .	46
4.2	Trajetoórias de SR e de SI. . . . .	46
4.3	Planos de fase de SR e de SC usando CMD com leis de controle contínuas. . . . .	50
4.4	Trajetoórias de SR e de SC usando CMD com leis de controle contínuas. . . . .	50
4.5	Vetor erro usando CMD com leis de controle contínuas. . . . .	51
4.6	Detalhe do vetor erro usando CMD com leis de controle contínuas. . . . .	51
4.7	CMD – Sinais de controle contínuos. . . . .	52
4.8	CMD – Sinais de controle descontínuos. . . . .	52
4.9	Exemplo de um sinal de controle constante por partes. . . . .	54
5.1	Diagrama de blocos para a obtenção do sinal contínuo $\tilde{\mathbf{u}}$ pela metodologia CMD. . . . .	59
5.2	Diagrama de blocos para a implementação do sinal de controle constante por partes $\mathbf{u}$ , com $u_{k,j} = u_{k,j}^*$ . . . . .	61
5.3	Bloco SCP*. . . . .	61
5.4	Diagrama de blocos da estratégia de controle proposta. . . . .	66
5.5	Bloco SCP. . . . .	66
5.6	Planos de fase de SR e de SC para $\lambda = 1,09$ . . . . .	75

5.7	Trajетórias de SR e de SC para $\lambda = 1,09$ . . . . .	75
5.8	Vetor erro em $[0; 2, 18]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	76
5.9	Vetor erro em $[2, 014; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	76
5.10	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[0; 2, 18]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	77
5.11	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[2, 18; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	77
5.12	Vetor erro em $[0; 1, 635]$ para $\lambda = 0,545$ . . . . .	78
5.13	Vetor erro em $[1, 031; 39, 24]$ para $\lambda = 0,545$ . . . . .	78
5.14	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[0; 1, 635]$ para $\lambda = 0,545$ . . . . .	79
5.15	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[1, 635; 39, 24]$ para $\lambda = 0,545$ . . . . .	79
5.16	Comparação de $\Theta$ entre $\lambda = 1,09$ e $\lambda = 0,545$ em $[0; 2, 18]$ . . . . .	80
5.17	Comparação de $\Theta$ entre $\lambda = 1,09$ e $\lambda = 0,545$ em $[2, 18; 39, 24]$ . . . . .	80
5.18	Vetor erro em $[1, 878; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ , com a restrição de $u_1$ e $u_2$ não assumirem valores positivos. . . . .	81
5.19	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[2, 18; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ , com a restrição de $u_1$ e $u_2$ não assumirem valores positivos. . . . .	81
5.20	Planos de fase de SR e de SI. . . . .	84
5.21	Trajетórias de SR e de SI. . . . .	84
5.22	Planos de fase de SR e de SC para $\lambda = 1,09$ . . . . .	86
5.23	Trajетórias de SR e de SC para $\lambda = 1,09$ . . . . .	86
5.24	Vetor erro em $[0; 3, 27]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	87
5.25	Vetor erro em $[2, 916; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	87
5.26	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[0; 3, 27]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	88
5.27	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ em $[3, 27; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	88
5.28	Trajетórias de SR e de SC para $\lambda = 1,09$ , aplicando $\mathbf{u}^m$ . . . . .	91
5.29	Vetor erro para $\lambda = 1,09$ , aplicando $\mathbf{u}^m$ . . . . .	91
5.30	Vetor erro de aproximação em $[0; 2, 18]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	92
5.31	Vetor erro de aproximação em $[2, 18; 39, 24]$ para $\lambda = 1,09$ . . . . .	92
5.32	Planos de fase de SR e de SI, indicando o estado $\mathbf{r}_{si}$ no qual o vetor de referência está dentro do ciclo limite original do sistema isolado. . . . .	97
5.33	Trajетórias de SR e de SI, indicando $\mathbf{r}_e = [1, 3510 \ 1, 2418]'$ e $\mathbf{x}_e = [4, 1 \ 0]'$ . . . . .	97
5.34	Planos de fase de SR, de SC e de SI. Após $t_{si} = 10,9$ o sistema controlado é isolado. . . . .	98
5.35	Trajетórias de SR, de SC e de SI, indicando $\mathbf{r}_e = [1, 3510 \ 1, 2418]'$ . Após $t_{si} = 10,9$ o sistema controlado é isolado. . . . .	98
5.36	Vetor erro no intervalo de controle $I = [0; 10, 9]$ . . . . .	99
5.37	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ no intervalo de controle $I = [0; 10, 9]$ . . . . .	99

5.38	Vetor erro no intervalo de controle $I = [0; 10, 9]$ , com a restrição de $u_1$ e $u_2$ não assumirem valores positivos. . . . .	100
5.39	Sinais $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ no intervalo de controle $I = [0; 10, 9]$ , com a restrição de $u_1$ e $u_2$ não assumirem valores positivos. . . . .	100
6.1	Medições feitas no intervalo $M$ para $N = 13$ . . . . .	109

# Lista de Tabelas

5.1	Variação de $\lambda$ , $\Phi$ e $\Psi$ em função de $p$ , com $\Delta = 39,24$ . . . . .	73
6.1	Vetor de parâmetros $\mathbf{v}$ . . . . .	107
6.2	Vetor de parâmetros normalizado $\mathbf{p}$ . . . . .	107
6.3	Valores medidos no intervalo $M$ para $N = 13$ . . . . .	109
6.4	Resultados para $N = 13$ e $\bar{\mathbf{p}}_0 = [8,0000 \ 3,0000 \ 12,0000 \ 9,0000]'$ . . . . .	110
6.5	Resultados para $N = 13$ e $\bar{\mathbf{p}}_0 = [4,0000 \ 3,0000 \ 6,0000 \ 1,5000]'$ . . . . .	110
6.6	Valores medidos no intervalo $M$ para $N = 3$ . . . . .	111
6.7	Resultados para $N = 3$ e $\bar{\mathbf{p}}_0 = [4,0000 \ 3,0000 \ 6,0000 \ 1,5000]'$ . . . . .	111

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, o crescimento de movimentos mundiais preocupados com a preservação ambiental de todo o planeta tiveram grande impacto em nossa sociedade. Eles mudaram a nossa visão sobre o desenvolvimento da política, da economia e da própria organização social. Felizmente, existe hoje um grande número de pessoas que têm realmente consciência de que os recursos naturais são escassos e que o aumento da degradação do meio-ambiente vem pondo em risco a sobrevivência de nossa própria espécie. Muitas espécies de animais só podem ser vistas em páginas de livros e inúmeras outras estão à beira da extinção. Por estes motivos, o conceito de desenvolvimento sustentável torna-se fundamental para a nossa civilização. Devemos, assim, formar uma sociedade sustentável, isto é, uma sociedade que satisfaça suas necessidades sem diminuir as perspectivas das gerações futuras.

A modelagem matemática da dinâmica das populações que compõem um ecossistema é muito importante para entendermos seus comportamentos, suas interdependências, e para que previsões futuras possam ser realizadas. Somente a partir do momento que atingimos tal nível de conhecimento é que poderemos saber, com um certo grau de certeza, como o ecossistema irá reagir a perturbações naturais e à interferência humana. Neste sentido, a busca por modelos matemáticos que descrevam adequadamente a dinâmica de populações são fundamentais para que possamos explorar os recursos de um ecossistema de maneira sustentável e, no caso de existirem grandes chances de ocorrer uma catástrofe ambiental devido a perturbações naturais ou à própria ação humana, de restaurarmos o equilíbrio natural do ecossistema através de políticas de gerenciamento ambiental.

Contudo, a modelagem matemática de um ecossistema não é uma tarefa fácil, pois

se trata de um sistema vivo altamente complexo e com uma imensa capacidade de se auto-organizar. Este assunto vem sendo tratado por inúmeros autores (Aracil e Toro, 1993; Begon et al., 1996; Kot, 2000; Krebs, 1972). Um tipo de interação, objeto de muitos estudos, é a estabelecida entre uma população de presas e a população de seus predadores. Estes são os chamados *sistemas presa-predador* em Ecologia. Apesar de estes sistemas não existirem de forma isolada na natureza, mas sim como componentes de um sistema complexo formado por várias outras espécies, onde todas as populações são interdependentes e influenciadas por fatores ambientais, um entendimento aprofundado de sua dinâmica é vital para a compreensão de sistemas mais complexos e próximos da realidade encontrada na natureza.

Neste trabalho, propomos o controle de sistemas presa-predador, que são modelados por equações diferenciais em tempo contínuo, através de sinais constantes por partes determinados pela medição periódica dos tamanhos das populações, não havendo necessidade de medi-los a cada instante de tempo. Existem duas razões fundamentais que inspiraram a busca por essa estratégia de controle. A primeira é que sinais de controle constantes por partes são modelos idealizados de políticas de gerenciamento adotadas por órgãos ambientais, representando, em cada intervalo onde o sinal de controle permanece constante, taxas constantes de extração de indivíduos, se a entrada for negativa, ou taxas constantes de introdução de novos indivíduos, se a entrada for positiva. A outra razão é que, em muitas interações do tipo presa-predador encontradas na natureza como, por exemplo, as relações entre peixes (presas) e tubarões (predadores), não é possível medir o número de indivíduos a cada instante de tempo. Desse modo, o sinal de controle constante por partes, obtido pelo esquema de controle aqui proposto, permite definir uma política de gerenciamento para o ecossistema que possa ser implementada na prática por órgãos ambientais. Estas políticas ficam completamente determinadas pela medição periódica das populações de presas e de predadores, e consistem no estabelecimento de taxas constantes de extração ou de introdução de novos indivíduos para cada espécie, que devam ser cumpridas pela sociedade numa base de tempo mensal, semestral ou anual, por exemplo.

Muitas pesquisas realizadas vêm abordando maneiras de se controlar sistemas presa-predador. Nos trabalhos (Costa et al., 2000; Cunha, 2002; Meza, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002) e (Meza, Costa, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002) são apresentadas estratégias de controle que estabilizam os modelos Lotka-Volterra e Rosenzweig-MacArthur, respectivamente, os quais apresentam órbitas periódicas, em um ponto de coexistência das presas e dos predadores. No entanto, em (Meza, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002; Meza, Costa, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002), este ponto de coexistência depende dos parâmetros do sis-

tema e não pode ser selecionado livremente. Leis de controle comutadas sobre superfícies de deslizamento foram utilizadas por Corso et al. (2002) no modelo Leslie-Gower, por Cunha (2002) no modelo Lotka-Volterra, e por Costa et al. (2000) nestes dois modelos, para a estabilização dos modelos em um ponto de coexistência das espécies; mas, durante o deslizamento, a comutação na lei de controle poderá ocorrer com frequências muito elevadas, podendo, assim, não modelar a ação humana em muitos casos. Salientamos, ainda, que em todas as referências supracitadas, é exigida a medição das populações a cada instante, e os sinais de controle consistem em extrair as populações ou em mantê-las livre da ação humana.

No presente trabalho, assumiremos que as populações de presas e de predadores sejam medidas periodicamente, não sendo possível medi-las a cada instante de tempo. E, com o intuito de adequar a ação humana aos sinais de controle, sugerimos uma estratégia de controle que determine sinais de controle constantes por partes a partir de medições periódicas das populações. No entanto, para que este esquema de controle possa ser aplicado, assumiremos, ainda, que o sistema seja completamente conhecido, invariante no tempo e que sua dinâmica seja suficientemente lenta.

A estratégia de controle que apresentaremos possibilita o seguimento de trajetórias de referência quaisquer, não estando restrita a problemas de estabilização em um ponto fixo. Em poucas palavras, a abordagem proposta consiste em determinar os sinais de controle constantes por partes *off-line*, de modo a aproximar sinais contínuos conhecidos *a priori* que atendam às especificações de desempenho desejadas.

Para a obtenção desses sinais, qualquer método de controle que resulte em sinais contínuos pode ser utilizado, desde que satisfaça as exigências de desempenho. Todavia, optamos, aqui, pela metodologia de controle por modos deslizantes (CMD) desenvolvida por Slotine, pois é uma técnica geral para o problema de seguimento de uma classe de sistemas não-lineares, sendo bastante adequada para o controle de sistemas presa-predador. Para satisfazermos a hipótese de que o sistema seja completamente conhecido, mostraremos que, com apenas alguns dos parâmetros previamente determinados, será possível estimar os demais. Como assumiremos que o sistema seja invariante no tempo, poderemos utilizar o método de estimação por mínimos quadrados. Relembramos que as populações são medidas periodicamente, por hipótese, e, assim, não são aplicáveis técnicas *on-line* de estimação de parâmetros.

Vários modelos têm sido propostos para descrever as oscilações periódicas das populações de sistemas presa-predador. Este tipo de comportamento foi observado, tanto

em laboratório, quanto em campo. Um exemplo clássico é o modelo Lotka-Volterra. No entanto, este modelo possui duas grandes limitações. A primeira é que a população de presas cresce indefinidamente quando não há predadores presentes. A outra é que, apesar de dinâmicas cíclicas realmente ocorrerem na natureza, as trajetórias do modelo não convergem para um ciclo limite estável. As órbitas são de fato fechadas, porém as amplitudes de oscilação dependem da condição inicial. Mas, como os ecossistemas estão constantemente submetidos a perturbações, as mesmas inibiriam a dinâmica cíclica neste modelo. Conseqüentemente, o modelo Lotka-Volterra acaba sendo inadequado para descrever a realidade em muitas situações.

Por esses motivos, selecionaremos um modelo de sistema presa-predador em que o número de presas permaneça limitado na ausência dos predadores, e que apresente ciclos limite estáveis. O modelo utilizado neste trabalho, que atende a estes requisitos, é similar ao modelo Rosenzweig-MacArthur, utilizando uma resposta funcional tipo IV ao invés de uma tipo II (Kot, 2000). Dependendo dos valores dos parâmetros do sistema, as trajetórias podem convergir para ciclos limite estáveis ou para pontos de equilíbrio. Partiremos do pressuposto de que as trajetórias do sistema oscilem num ciclo limite estável quando o ecossistema está em equilíbrio ecológico. Mostraremos que a estratégia de controle proposta aplicada ao referido modelo possibilita: (i) explorar os recursos do sistema de maneira sustentável, ao mesmo tempo em que são mantidas trajetórias periódicas no sistema controlado; e (ii) restaurar a dinâmica natural do sistema (o ciclo limite), quando o efeito de uma perturbação ameaçar a sobrevivência dos predadores. Estes objetivos serão alcançados forçando os tamanhos das populações de presas e de predadores a seguir trajetórias de referência adequadamente selecionadas.

O trabalho está organizado como descrito a seguir. O Capítulo 2 trata da modelagem da dinâmica de populações em Ecologia. O principal objetivo deste capítulo é descrever o modelo de sistema presa-predador que será objeto de estudo do restante do trabalho. Este modelo, que é uma modificação do modelo Rosenzweig-MacArthur, será apresentado na Seção 2.6. No entanto, entendemos que é necessária uma explanação prévia de uma série de fundamentos e conceitos de Ecologia, tanto para dar sustentação teórica e prática ao modelo, quanto para que o mesmo seja assimilado com relativa facilidade. Em razão disto, abordaremos nas seções precedentes: a importância dos modelos matemáticos em Ecologia; a curva de crescimento logístico, que é usada no modelo, juntamente com uma discussão sobre sua validade em experimentos de laboratório e em observações de campo; as limitações do modelo Lotka-Volterra na descrição de sistemas presa-predador com oscilações periódicas; uma breve discussão sobre a existência de oscilações cíclicas

em interações do tipo presa-predador, em laboratório e em campo, pois o modelo escolhido apresenta ciclos limite estáveis; e, finalmente, o conceito de resposta funcional e seus principais modelos matemáticos utilizados em Ecologia.

No Capítulo 3, realizaremos uma compilação da metodologia de controle por modos deslizantes (CMD) desenvolvida por Slotine para o problema de seguimento de uma classe de sistemas não-lineares incertos e em ambientes com perturbações. Desde já, ressaltamos que este método não é diretamente aplicável aos sistemas presa-predador considerados neste trabalho, pois sua implementação requer a medição das populações a cada instante de tempo e os sinais de controle não são constantes por partes. Contudo, a estratégia de controle proposta, descrita no Capítulo 5, consiste em determinar sinais de controle constantes por partes que aproximem os sinais de controle obtidos *off-line* pela abordagem CMD, assumindo que o sistema seja completamente conhecido, invariante no tempo e que sua dinâmica seja suficientemente lenta.

Existem inúmeros problemas de engenharia onde a metodologia CMD pode ser diretamente empregada, de modo que seguimento robusto de trajetórias de referência é alcançado, tanto na presença de perturbações, quanto de variações paramétricas. Por este motivo, uma descrição detalhada e auto-contida será apresentada nesse capítulo.

O método utiliza o conceito de superfícies de deslizamento variantes no tempo. Através da definição de leis de controle descontínuas ou comutadas, as trajetórias do sistema atingem a superfície de deslizamento em tempo finito e nela permanecem (modo deslizante). Em decorrência disto, o erro de seguimento convergirá exponencialmente para zero. Contudo, para que as trajetórias do sistema permaneçam na superfície, as leis de controle descontínuas devem ser, idealmente, comutadas com frequências infinitas.

Para a aplicação deste método no presente trabalho, essa situação tem que ser evitada devido aos aspectos matemáticos exigidos na estratégia de controle proposta. No entanto, Slotine mostrou que é possível substituir as leis de controle descontínuas (comutadas) por leis de controle contínuas e, neste caso, o erro de seguimento não converge para zero, porém fica próximo de zero. Esta alternativa possibilita a utilização da abordagem CMD para a obtenção de sinais de controle constantes por partes.

Em seguida, no Capítulo 4, será discutido o controle de sistemas presa-predador. Inicialmente, serão levantados alguns pontos que devam ser considerados nas estratégias de controle para esses sistemas, com ênfase nos objetivos de exploração sustentável e recuperação ambiental. Entendemos que as dinâmicas do sistema controlado e do sistema

*isolado*, isto é, do sistema livre de interferência humana, devam apresentar características similares. Por exemplo, assumindo que as trajetórias do sistema isolado oscilem num ciclo limite estável, sugerimos que as trajetórias do sistema controlado devam convergir para trajetórias de referência periódicas selecionadas adequadamente. Toda a nossa argumentação tomará como caso ilustrativo o modelo presa-predador descrito na Seção 2.6, que é o modelo utilizado em todo o trabalho. Na seqüência, aplicaremos a metodologia CMD tratada no Capítulo 3 para forçar as trajetórias do sistema presa-predador a seguir determinadas trajetórias de referência, considerando que as do sistema isolado estejam oscilando num ciclo limite estável. Como exigiremos, aqui, similaridade entre as dinâmicas dos sistemas controlado e isolado, as trajetórias de referência serão selecionadas como trajetórias do modelo Rosenzweig-MacArthur modificado, mas com um conjunto apropriado de valores paramétricos, de modo que as mesmas também oscilem num ciclo limite estável. Mostraremos que, a exemplo de outros métodos de controle, os sinais de controle da abordagem CMD não possibilitam a definição de políticas de gerenciamento ambiental em muitas interações do tipo presa-predador encontrados na natureza, pois é preciso medir as populações a cada instante de tempo e os sinais de controle poderão não modelar a ação humana. Para contornarmos estas limitações, uma estratégia de controle alternativa, que resulta em sinais de controle constantes por partes a partir de medição periódica das populações, será formulada no capítulo seguinte. No entanto, para que a mesma possa ser aplicada, assumiremos que: (i) o sistema seja completamente conhecido e invariante no tempo; (ii) as populações sejam medidas periodicamente; e (iii) que a dinâmica do sistema seja suficientemente lenta.

No Capítulo 5 descreveremos a estratégia de controle proposta para sistemas presa-predador. Esta metodologia determina sinais de controle constantes por partes a partir da medição periódica dos tamanhos das populações de presas e de predadores, permitindo que as trajetórias do sistema controlado sigam trajetórias de referência escolhidas arbitrariamente. A idéia fundamental é a aproximação de sinais contínuos conhecidos *a priori*, que atendam as especificações de desempenho desejadas, por sinais constantes por partes. Neste trabalho, os sinais contínuos serão obtidos *off-line* com base no método CMD.

A validade do esquema de controle proposto será então constatada por simulação em dois casos. No primeiro, assumiremos que, uma vez mais, as trajetórias do sistema isolado, o qual é descrito pelo modelo Rosenzweig-MacArthur modificado, estejam oscilando num ciclo limite estável. Apesar de as trajetórias de referências poderem ser escolhidas de maneira arbitrária, elas serão especificadas também como trajetórias que oscilem num ciclo limite, para que as dinâmicas dos sistemas controlado e isolado sejam similares. Especi-

ficaremos as trajetórias de referência como trajetórias do modelo Rosenzweig-MacArthur modificado, mas com valores paramétricos apropriados. A aplicação da estratégia de controle permitirá uma exploração sustentável dos recursos do sistema. No segundo caso, consideraremos que uma perturbação faça com que as trajetórias do sistema deixem o domínio de estabilidade do ciclo limite estável. Se não houver interferência humana, os predadores serão extintos. As trajetórias de referência serão escolhidas como trajetórias do modelo Rosenzweig-MacArthur modificado que atinjam a bacia de atração do ciclo limite. Forçaremos então as trajetórias do sistema controlado a seguir estas trajetórias de referência. Alcançado o domínio de estabilidade do ciclo limite, a ação humana será suspensa e a dinâmica original do sistema restaurada. Em ambos os casos, sinais de controle constantes por partes serão obtidos pela medição das condições iniciais das populações, sem a necessidade de medí-las a cada instante de tempo do intervalo em que o sistema será controlado. Acrescentamos, ainda, que estes sinais definirão políticas de gerenciamento ambiental factíveis, precisas e adequadas, que podem ser implementadas por órgãos ambientais.

O método de estimação paramétrica por mínimos quadrados será tratado no Capítulo 6. Mostraremos que, com o conhecimento prévio de apenas alguns dos parâmetros do modelo do sistema presa-predador, poderemos estimar os demais a partir de poucas medições periódicas das populações de presas e de predadores. Conseqüentemente, a hipótese de que o sistema seja completamente conhecido é factível, e a estratégia de controle proposta poderá ser aplicada.

No Capítulo 7, serão apresentadas as considerações finais sobre o trabalho e sugestões para futuras pesquisas.

Finalmente, os Apêndices A e B contêm, respectivamente, os principais fundamentos de Matemática que serão utilizados no decorrer do trabalho e as demonstrações de alguns resultados que serão aplicados na descrição da metodologia CMD no Capítulo 3.

De maneira geral, as principais contribuições deste trabalho são: (i) a formulação de uma estratégia de controle para sistemas presa-predador que determina sinais de controle constantes por partes a partir da medição periódica das populações, possibilitando o seguimento de trajetórias de referência arbitrárias; e (ii) a especificação das trajetórias de referência como trajetórias de um modelo de sistema presa-predador isolado, para que as dinâmicas dos sistemas controlado e isolado sejam similares.

## Capítulo 2

# Modelagem da Dinâmica de Populações em Ecologia

Neste capítulo, descreveremos o modelo de sistema presa-predador que será objeto de estudo da presente pesquisa. Como veremos, este modelo utiliza uma resposta funcional tipo IV, e, dependendo dos valores dos parâmetros do sistema, as trajetórias podem convergir para ciclos limite estáveis ou para pontos de equilíbrio. Todavia, uma explanação prévia de uma série de fundamentos e conceitos de Ecologia é necessária, tanto para dar sustentação teórica e prática a esse modelo, quanto para que o mesmo seja assimilado com relativa facilidade. Em razão disto, serão abordados nas cinco primeiras seções os seguintes assuntos: a importância dos modelos matemáticos em Ecologia; a curva de crescimento logístico, que é usada no modelo, juntamente com uma discussão sobre sua validade em experimentos de laboratório e em observações de campo; as limitações do modelo Lotka-Volterra na descrição de sistemas presa-predador com oscilações periódicas; uma breve discussão sobre a existência de oscilações cíclicas em interações do tipo presa-predador, em laboratório e em campo, pois o modelo escolhido apresenta ciclos limite estáveis; e, finalmente, o conceito de resposta funcional e seus principais modelos matemáticos utilizados em Ecologia. Na Seção 2.6, o referido modelo será introduzido.

## 2.1 A Importância dos Modelos Matemáticos em Ecologia

A Matemática desempenha um papel de extrema importância na Ecologia. São os modelos matemáticos que muitas vezes servem de base para a formulação de regras gerais para o entendimento de sistemas ecológicos. Pode parecer um tanto estranho a dedicação de vários ecologistas em reconstruir o mundo vivo da natureza na forma artificial da linguagem matemática. No entanto, existem algumas razões que justificam essa busca (Begon et al., 1996).

A primeira é que modelos matemáticos podem sintetizar, em termos de poucos parâmetros, algumas das principais propriedades compartilhadas por uma grande variedade de sistemas ecológicos. Desse modo, um modelo permite que cada um destes sistemas seja descrito e analisado através de uma “linguagem comum”. Além disso, as propriedades de cada sistema em relação aos demais e, possivelmente, em relação a algum padrão ideal, podem se tornar mais evidentes. Estas idéias são bem conhecidas em outros contextos. Por exemplo, Newton nunca teve contato com um corpo sem atrito e Boyle nunca viu um gás ideal, a não ser de forma abstrata em suas mentes, e, no entanto, as leis físicas por eles descobertas tiveram impactos revolucionários.

Acrescentamos, ainda, que um modelo matemático pode apresentar propriedades que não eram antes conhecidas no sistema real. Em outras palavras, determinadas hipóteses feitas no modelo poderão indicar as prováveis conseqüências no sistema real. Considere, por exemplo, um modelo no qual o comportamento da dinâmica de determinada população animal depende das propriedades dos indivíduos integrantes. Se assumirmos que somente ocorra migração (saída e retorno periódicos) dos indivíduos jovens, o modelo poderá então nos mostrar quais serão as implicações sobre o comportamento de toda a população. Ademais, o modelo poderá evidenciar quais são os experimentos e observações mais relevantes a serem feitos em campo. Assim, se de acordo com o modelo a taxa de migração dos indivíduos jovens é de grande importância na dinâmica da população, a mesma deverá ser monitorada na prática.

Mas, um modelo só tem validade quando descreve de maneira adequada dados e situações reais de campo ou laboratório. É claro que somente o próprio mundo real pode descrever perfeitamente o mundo real. Contudo, consideramos que um modelo apresenta uma descrição adequada da realidade quando o mesmo atende aos nossos propósitos. Porém, em muitos casos, os experimentos e observações exigidos para se verificar a vali-

dade dos modelos não podem ser realizados, impedindo-nos, assim, de fornecer explicações baseadas nos modelos de determinada observação feita em campo, por exemplo. Citamos aqui uma importante colocação feita por Begon et al. (1996): “A confirmação das previsões de um modelo constitui consolidação; refutação seguida de explicação constitui progresso.”

No que se segue, apresentaremos alguns modelos de dinâmica de populações utilizados em Ecologia. Ressaltamos, todavia, que estes são modelos mecanicistas simples que oferecem hipóteses e explicações interessantes, e não modelos complexos que nos dão previsões detalhadas (Kot, 2000).

## 2.2 A Equação Logística

Mostraremos, agora, um modelo matemático relativamente simples, que descreve a dinâmica de uma população situada em um ambiente favorável.

Seja  $N$  o número de indivíduos de determinada população. Considere que sua taxa de crescimento *per capita*, em relação ao tempo  $T$ , decresce linearmente com o tamanho da população, ou seja, de acordo com a função (Kot, 2000)

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dT} = F(N) \triangleq r \left( 1 - \frac{N}{K} \right), \quad (2.1)$$

onde  $r$  é a *taxa intrínseca de crescimento*, sendo igual à diferença entre a taxa de nascimento *per capita* e a taxa de mortalidade *per capita*, e  $K$  é a *capacidade de suporte*. Assim sendo, cada indivíduo acrescentado à população diminui a taxa de crescimento uniformemente, e, portanto, a taxa de crescimento depende do tamanho da população (Krebs, 1972). Os parâmetros  $r$  e  $K$  são assumidos positivos. O gráfico de  $F$  em (2.1) é mostrado na Figura 2.1. Note que a taxa de crescimento *per capita* se anula quando  $N = K$ , correspondendo ao número máximo de indivíduos que pode ser sustentado em determinado espaço geográfico finito com uma base de recursos finita (Odum, 1988; Monteiro, 2002). Observamos que a taxa de crescimento *per capita* decrescente em (2.1) é um modelo simplificado para a descrição da competição intra-específica<sup>1</sup> de determinada espécie (Begon et al., 1996).

---

<sup>1</sup>Competição entre indivíduos de mesma espécie.

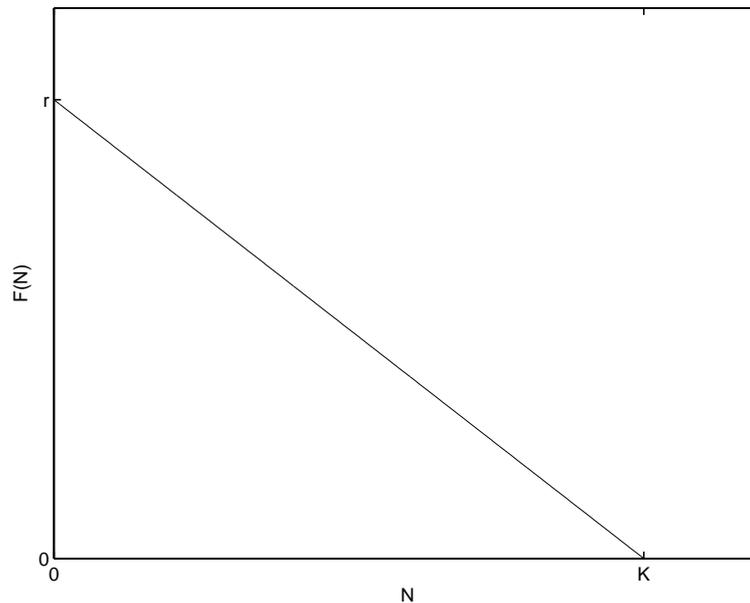


Figura 2.1: Taxa de crescimento *per capita* decrescente.

A partir de (2.1), obtemos a taxa de crescimento populacional

$$\frac{dN}{dT} = G(N) \triangleq N \cdot F(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (2.2)$$

que é uma função quadrática em relação ao tamanho da população  $N$ , como pode ser visto pelo gráfico mostrado na Figura 2.2. Esta equação foi sugerida originalmente por Verhulst em 1838 para descrever o crescimento de populações humanas (Krebs, 1972; Monteiro, 2002). Ele a denominou de *equação logística*, nome pelo qual é popularmente conhecida nos dias de hoje (Kot, 2000; Krebs, 1972; Monteiro, 2002). No entanto, a proposta de Verhulst ficou obscurecida durante algumas décadas, sendo redescoberta por Pearl e Reed no início do século XX para descrever o crescimento populacional nos Estados Unidos, quando foi então amplamente divulgada (Kot, 2000; Krebs, 1972; Monteiro, 2002).

A equação logística apresenta dois equilíbrios,  $N^* = 0$  e  $N^* = K$  (Kot, 2000; Monteiro, 2002). O primeiro é instável e o segundo é assintoticamente estável. Numa vizinhança suficientemente pequena de  $N^* = 0$ , temos

$$\frac{dN}{dT} \approx rN, \quad (2.3)$$

de modo que, para pequenas perturbações em torno de  $N^* = 0$ , a população cresce exponencialmente. Para  $N^* = K$ , podemos mostrar analiticamente que, para pequenas perturbações em torno do equilíbrio,  $N$  converge exponencialmente para a capacidade de

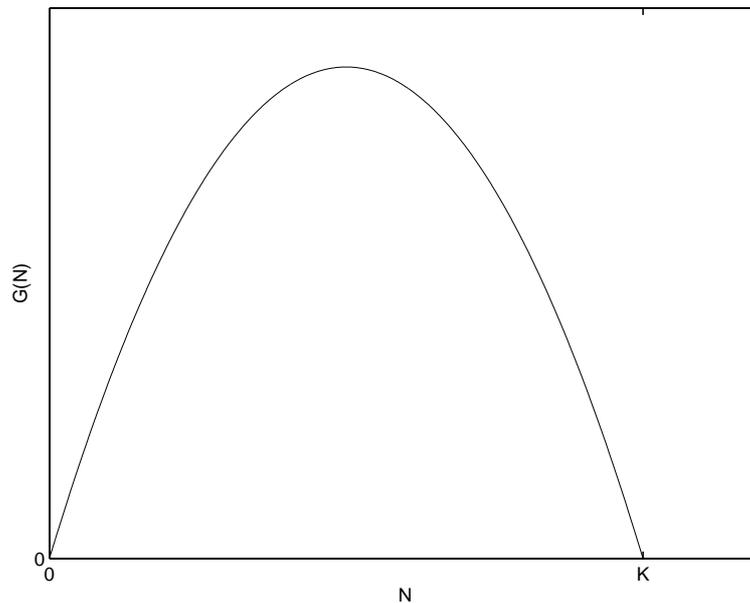


Figura 2.2: Taxa de crescimento da equação logística.

suporte  $K$ . Mais precisamente, a solução analítica de (2.2) é dada por (Kot, 2000)

$$N(T) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) e^{-rT}}. \quad (2.4)$$

Algumas soluções da equação logística são mostradas na Figura 2.3. Note que o comportamento previsto em torno dos dois pontos de equilíbrio são de fato verificados. Além do mais, para qualquer  $N(0) \neq 0$ , (2.4) nos dá

$$\lim_{T \rightarrow \infty} N(T) = K. \quad (2.5)$$

Por este motivo,  $K$  é também denominado *assíntota superior* (Odum, 1988). Acrescentamos, ainda, que, pela equação logística,  $dN/dT$  é negativo quando  $N(0) > K$ , indicando que a população decresce enquanto converge para a capacidade de suporte  $K$ . Se  $N(0) < K$ , então  $dN/dT$  é positivo e a população cresce convergindo para  $K$  (Monteiro, 2002). Salientamos que o modelo logístico é uma representação simples de curvas de crescimento em forma sigmoidal, isto é, em forma de “S” (Odum, 1988). Nestas curvas, a população aumenta lentamente num primeiro momento (fase de estabelecimento ou aceleração positiva), passa por período em que a taxa de crescimento é mais elevada e, finalmente, diminui (fase de aceleração negativa) até atingir um ponto de equilíbrio. Resaltamos que outros modelos matemáticos, além da equação logística, também apresentam

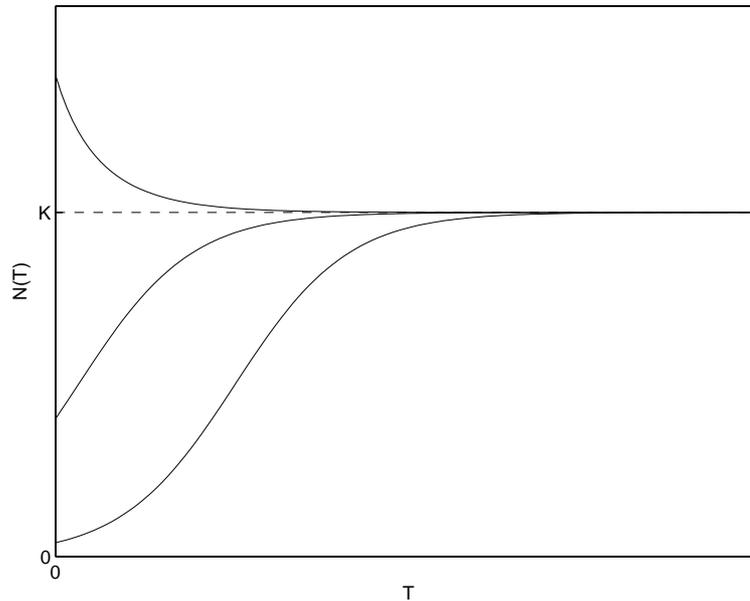


Figura 2.3: Crescimento logístico.

um comportamento sigmoidal (Begon et al., 1996; Kot, 2000; Odum, 1988).

Tendo como base a equação logística, o belga Verhulst estimou que a capacidade de suporte de seu país de origem seria  $K = 9.400.000$  pessoas. A população da Bélgica em 1998 era de 10.200.000 habitantes. Projeções feitas para o ano de 2010 estimam que a população reduzir-se-á para 10.150.000 habitantes (Monteiro, 2002). Relembramos que Verhulst propôs o modelo (2.2) em 1838.

Pesquisadores observaram em laboratório que, em ambientes de espaço físico constante e com fornecimento de alimentos constante, colônias de diversos organismos apresentam crescimento sigmoidal como, por exemplo, paramécios, leveduras, bactérias e outros organismos com ciclos de vida simples. Com a interpolação dos dados experimentais na equação logística, eles obtiveram resultados positivos em alguns casos. O biólogo Pearl chegou inclusive a afirmar que a equação logística seria a lei universal de crescimento populacional, quando constatou que o modelo logístico fornecia resultados satisfatórios em seus experimentos com a mosca *Drosophila melanogaster*, a qual é conhecida popularmente como mosca da fruta (Krebs, 1972). Mas, Sang criticou o seu trabalho e levantou algumas questões sobre a *Drosophila* que Pearl não havia considerado em seus experimentos (Krebs, 1972).

Várias observações foram feitas em laboratório de besouros que vivem na farinha (*Tribolium*) e no trigo (*Calandra*). Chapman, por exemplo, que foi um dos pionei-

ros na utilização do *Tribolium* em estudos de ecologia em laboratório, constatou que as colônias cresciam logisticamente (Krebs, 1972). Mas, muitos pesquisadores cessavam suas observações assim que a população parecia ter atingido a assíntota superior. Thomas Park, ao contrário, fez um longo acompanhamento do crescimento do *Tribolium* por vários anos e concluiu que o tamanho da população não se estabilizava em torno de uma assíntota (Krebs, 1972). No início, a população crescia de forma sigmoideal, mas depois ia diminuindo de tamanho. Birch fez pesquisas semelhantes com a *Calandra oryzae* e notou que, apesar de inicialmente haver crescimento logístico, a população apresentava grandes flutuações, sem indícios de que permaneceria próxima de uma assíntota (Krebs, 1972).

Odum (1988) afirma que o modelo logístico provavelmente está restrito à descrição de pequenos organismos, apesar de se ter observado crescimento sigmoideal em organismos maiores introduzidos em ilhas não ocupadas. O ecologista Krebs (1972) ressalta que o modelo logístico representa adequadamente o crescimento populacional em laboratório de organismos com ciclos de vida simples. No caso de organismos com ciclos de vida complexos, geralmente a curva logística não se ajusta muito bem ao crescimento populacional, e o regime permanente na assíntota superior pode não ser alcançado.

Com relação a dados de campo, foi observado que algumas populações podem ser descritas pelo modelo logístico devido ao seu crescimento ser de forma sigmoideal, mas, em inúmeros outros casos, isto não ocorre. A assíntota superior da equação logística raramente é atingida por populações encontradas na natureza, havendo flutuações no número de indivíduos. Em alguns casos, tais flutuações são de amplitudes relativamente pequenas e ocorrem em torno de um valor aproximadamente constante.

Dessa forma, o modelo logístico (2.2) possui várias limitações e desvantagens, não sendo possível caracterizá-lo como um modelo geral de crescimento populacional. E, salientamos, ainda, que para o crescimento de uma população ser descrito pelo referido modelo, um certo número de hipóteses devem ser satisfeitas<sup>2</sup>.

Existem outras linhas alternativas de modelagem da dinâmica de populações que vêm sendo muito estudadas (Krebs, 1972; Kot, 2000). Uma delas é a incorporação de retardos de tempo no modelo logístico, para que se obtenha uma descrição mais adequada da realidade de organismos complexos. Observe que, por (2.2), a taxa de crescimento responde instantaneamente a variações no tamanho da população. Em alguns modelos que consideram retardos de tempo, a população pode apresentar: convergência não-oscilatória para

---

<sup>2</sup>Para maiores detalhes, veja (Krebs, 1972).

um ponto de equilíbrio; convergência oscilatória amortecida para um ponto de equilíbrio; e oscilações periódicas estáveis em torno de um ponto de equilíbrio (Krebs, 1972). Para uma discussão sobre modelos discretos que, além dos comportamentos citados, apresentam também comportamento caótico, veja (Begon et al., 1996; Kot, 2000). Outra linha é a de modelos estocásticos. Conforme comentado em (Kot, 2000), efeitos estocásticos são muito importantes quando se trata de pequenas populações<sup>3</sup>.

Assim, após termos analisado nesta seção um modelo de dinâmica populacional que leva em consideração a competição intra-específica de determinada espécie, trataremos a seguir de modelos matemáticos de interações populacionais do tipo presa-predador entre duas espécies. Muitos estudos, tantos teóricos, quanto práticos, estão sendo realizados para entender o efeito da predação em populações, haja vista os impactos econômicos em nossa sociedade.

## 2.3 O Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra

Lotka e Volterra propuseram, de forma independente, um modelo matemático para descrever as interações entre populações de presas e de predadores, sendo conhecido por modelo Lotka-Volterra (Krebs, 1972). A motivação de Lotka foi a de obter oscilações periódicas das concentrações químicas de uma reação química hipotética (Monteiro, 2002). Já Volterra, estava preocupado em explicar o motivo pelo qual os níveis de pesca de peixes no Mar Adriático oscilavam durante o primeiro quarto do século passado (Murray, 1993)<sup>4</sup>.

O modelo Lotka-Volterra é dado por (Kot, 2000; Krebs, 1972)

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dT} &= rN - cNP, \\ \frac{dP}{dT} &= bNP - mP,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde  $N$  é o número de presas,  $P$  o número de predadores e  $T$  o tempo. O parâmetro  $r$  é a *taxa intrínseca de crescimento* das presas e  $m$  a taxa de mortalidade *per capita* dos predadores (Kot, 2000). A habilidade das presas em escapar dos predadores é medida por  $c$ , e a destreza dos predadores em apanhar as presas por  $b$  (Krebs, 1972). É assumido que  $b$ ,  $c$ ,  $m$  e  $r$  são positivos (Murray, 1993).

<sup>3</sup>Para uma abordagem sobre estes modelos, veja (Kot, 2000; Krebs, 1972).

<sup>4</sup>Para mais informações sobre a história de Volterra, veja (Kot, 2000).

Pelo lado direito da primeira equação, vemos que, quando não há predadores presentes, a população de presas cresce exponencialmente e indefinidamente. O segundo termo desta mesma equação corresponde ao efeito da predação em diminuir a taxa de crescimento das presas. Observe que esse decréscimo é proporcional ao número de presas e de predadores. Na segunda equação, notamos que a população da espécie predadora decai exponencialmente na ausência das presas e que, pelo primeiro termo do lado direito, a taxa de crescimento dos predadores é proporcional ao tamanho das duas populações (Kot, 2000; Murray, 1993).

De acordo com a análise feita em (Kot, 2000), o sistema (2.6) apresenta dois pontos de equilíbrio: um na origem  $[0 \ 0]'$ , que é um ponto de sela; e o outro em  $[m/b \ r/c]'$ , que, no modelo linearizado, é um equilíbrio do tipo centro. Porém, conforme mostrado em (Haberman, 1998; Kot, 2000; Murray, 1993), as soluções do sistema (2.6) são trajetórias periódicas fechadas para condições iniciais no primeiro quadrante do plano cartesiano. Temos, ainda, que, apesar de a condição inicial determinar a amplitude de oscilação, os valores médios das populações de presas e de predadores são iguais, respectivamente, aos valores da primeira e da segunda componentes do ponto de equilíbrio  $[m/b \ r/c]'$ . O plano de fase e as trajetórias são mostrados nas Figuras 2.4 e 2.5, respectivamente, para  $m = 0,5$ ,  $b = 0,02$ ,  $r = 1,0$  e  $c = 0,1$ , onde o símbolo “ $\times$ ” representa o ponto de sela na origem e o símbolo “ $+$ ” o ponto de equilíbrio em  $[m/b \ r/c]' = [25 \ 10]'$ . Veja que as trajetórias dos predadores seguem as das presas, havendo um acoplamento entre os comportamentos oscilatórios das duas espécies (Begon et al., 1996; Kot, 2000). Estes valores paramétricos foram baseados em (Krebs, 1972).

Como para cada condição inicial no primeiro quadrante, temos uma trajetória periódica fechada, perturbações externas do tipo degrau que incidirem sobre o número de indivíduos das populações, colocarão o sistema numa nova trajetória de amplitude diferente. Mas, em ecossistemas reais, o ambiente está em constante mudança. Conseqüentemente, perturbações estariam constantemente transferindo a dinâmica das populações para novas trajetórias. Portanto, para um sistema presa-predador supostamente descrito por (2.6), perturbações externas não permitiriam que as populações apresentassem um comportamento periódico, pois assim que elas iniciassem uma trajetória periódica, seriam deslocadas para uma outra de diferente amplitude (Begon et al., 1996; Kot, 2000). Desse modo, para que um modelo de sistema presa-predador descreva adequadamente oscilações periódicas em populações encontradas na natureza, as mesmas devem ser estáveis. Em outras palavras, um modelo deve apresentar ciclos limite estáveis (Begon et al., 1996).

Outra grande limitação do modelo Lotka-Volterra é que, conforme mencionamos anteriormente, as presas crescem de forma exponencial na ausência de predadores, ou seja, crescem indefinidamente (Murray, 1993).

Apesar de esses problemas, o modelo Lotka-Volterra (2.6) possui grande valor, no sentido de que levantou questões de extrema importância, servindo assim de referência na busca de modelos mais adequados para descrever a realidade observada na natureza (Murray, 1993). Um comportamento bastante relevante sugerido pelo modelo Lotka-Volterra é que as oscilações periódicas da população de predadores seguem as oscilações periódicas da população de presas. Contudo, ressaltamos que populações de presas e predadores não existem de forma isolada na natureza, mas sim como componentes de um sistema formado por várias outras espécies, onde todas as populações são interdependentes e afetadas por mudanças ambientais. Inobstante desta complexidade inerente, justificamos a importância do estudo de sistemas presa-predador pelo fato de que, a exemplo de outros sistemas complexos investigados pela ciência, para podermos explicar algumas das propriedades e características do todo, precisamos entender também algumas das propriedades e características do que conceitualmente identificamos como partes (Begon et al., 1996).

Na Seção 2.6 será apresentado um modelo de sistema presa-predador que contorna as limitações supracitadas do modelo Lotka-Volterra. No referido modelo, as presas apresentam crescimento logístico na ausência de predadores, de forma que a população não aumentará indefinidamente como no modelo Lotka-Volterra. Além do mais, para determinados valores paramétricos, existem ciclos limite estáveis. Porém, antes de descrevermos esse modelo, constataremos a existência de oscilações “cíclicas” em populações encontradas na natureza, com o intuito de dar sustentação ao modelo, e introduziremos o conceito de resposta funcional, que é necessário para o entendimento do mesmo.

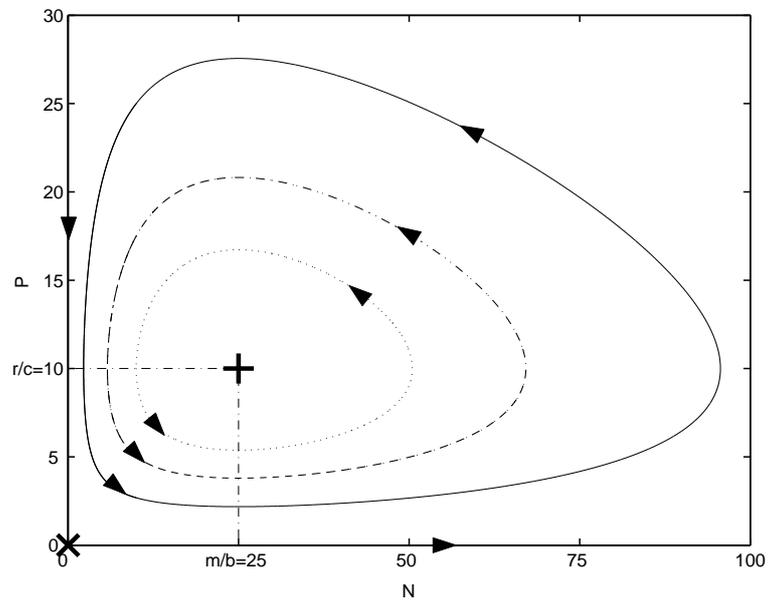


Figura 2.4: Plano de fase do modelo Lotka-Volterra.

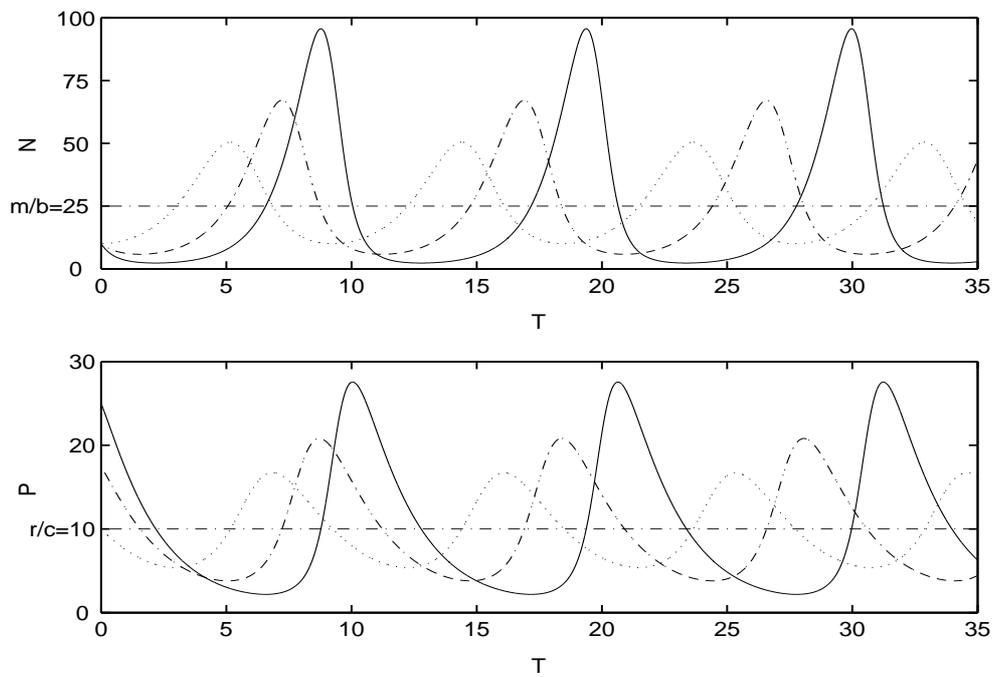


Figura 2.5: Trajetórias do modelo Lotka-Volterra.

## 2.4 Oscilações “Cíclicas” de Populações na Natureza

Em muitas populações, o valor médio de suas taxas de crescimento é aproximadamente zero durante um período de tempo relativamente longo e o número de indivíduos flutua em torno de um valor praticamente constante. Mudanças sazonais ou anuais na disponibilidade de recursos são freqüentes causas de tais flutuações. No entanto, algumas flutuações são vistas como sendo tão regulares, que podem ser consideradas como oscilações “cíclicas” ou “periódicas” (Odum, 1988).

Esse comportamento dinâmico foi gerado em experimentos de laboratório, onde foi possível obter oscilações “cíclicas” para sistemas presa-predador que habitam ambientes complexos (Begon et al., 1996). Em particular, foram constatadas oscilações “periódicas” acopladas entre a população de carunchos do feijão azuki e a de vespas branconídeas parasitóides, com um período que envolvia várias de suas gerações (Begon et al., 1996; Krebs, 1972). Mas, para a maioria dos sistemas mais simples, as espécies acabavam se extinguindo (Krebs, 1972).

Com relação a dados de campo, diversos tipos de comportamento foram constatados para interações do tipo presa-predador. Existem muitos exemplos em que, apesar de consideráveis flutuações no tamanho da população de presas, o número de indivíduos predadores apresenta variações relativamente pequenas. Além disso, foram detectados vários casos em que as variações no tamanho da população de predadores segue as variações no tamanho da população de sua presa, não obstante esta variar devido a algum outro fator. Acrescentamos, ainda, que existem pesquisas sobre levantamentos realizados em campo que indicam possíveis oscilações “cíclicas” acopladas entre presas e predadores. Finalmente, existem diversas outras situações em que o número de indivíduos de presas e de predadores sofrem flutuações, mas tal comportamento ocorre de maneira independente (Begon et al., 1996).

Oscilações cíclicas em interações do tipo presa-predador foram observadas diversas vezes em campo (Begon et al., 1996). Desde os anos de 1920 que ecologistas discutem tais oscilações na população de lebres. Caçadores, no entanto, já haviam feito tal constatação pelo menos um século antes. Um exemplo clássico de oscilação cíclica é entre a lebre americana (presa) e o linco (predador) (Begon et al., 1996; Krebs, 1972; Odum, 1988). A empresa canadense Hudson Bay Company mantém registros das peles comercializadas de animais capturados desde o ano de 1800, aproximadamente. Com base nestes dados, a análise feita por Charles Elton mostrou que a população de lebres americanas e a

população de linces apresentavam oscilações cíclicas acopladas, com uma constância de mais de 200 anos (Krebs, 1972). O período de oscilação foi estimado entre 9 e 10 anos, e a lebre apresentou variações no número de indivíduos de 10 a 30 vezes. Pesquisadores acreditam que este comportamento cíclico ocorra em razão das interações entre a lebre, o lince e as plantas que servem de alimento para a lebre (Begon et al., 1996). Ademais, estudos matemáticos mostraram que a série temporal dos dados é realmente cíclica, e não uma série com flutuações aleatórias.

Um outro exemplo de oscilação periódica acontece entre certas espécies de roedores que habitam regiões frias, como lemingues e camundongos, e seus predadores, que são principalmente as corujas-das-neves e as raposas. A estimativa para o período de oscilação é de 3 a 4 anos (Odum, 1988).

Podemos mencionar, ainda, interações entre plantas e animais. Frequentemente, a produção de sementes em coníferas ocorre de maneira cíclica, de modo que animais que se alimentam das mesmas podem vir a apresentar oscilações correspondentes.

Apesar de que os exemplos que acabamos de apresentar realmente comprovarem a existência de oscilações periódicas na natureza, ressaltamos que geralmente é muito difícil identificar as causas de tais comportamentos (Begon et al., 1996). Na natureza, existem inúmeros fatores ambientais pelos quais as populações estão relacionadas, de modo que as mesmas não são influenciadas somente pelo seu predador ou sua presa. Conseqüentemente, isto dificulta a determinação de uma correspondência direta com modelos relativamente simples de dinâmica populacional.

## 2.5 Resposta Funcional

A relação entre a taxa de consumo de presas *per capita* dos predadores e o tamanho da população de presas é conhecida como a *resposta funcional*<sup>5</sup> dos predadores (Begon et al., 1996; Kot, 2000). Três diferentes modelos de respostas funcionais foram propostos por Holling (Kot, 2000).

A resposta funcional *tipo I* é dada por

$$\phi(N) = cN, \quad (2.7)$$

---

<sup>5</sup>O termo em inglês é *functional response*.

onde  $N$  é o tamanho da população de presas,  $c$  uma constante de proporcionalidade e  $\phi$  denota a taxa de consumo de presas *per capita* dos predadores, a qual é proporcional ao número de presas. O gráfico de  $\phi$  pode ser ilimitado ou apresentar um limite superior, conforme mostrado na Figura 2.6.a. Observe que, no modelo Lotka-Volterra (2.6), é utilizado este tipo de resposta funcional, pois podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dT} &= rN - cNP = rN - \phi(N)P, \\ \frac{dP}{dT} &= bNP - mP = \frac{b}{c}\phi(N)P - mP.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Temos também a resposta funcional *tipo II*, que é definida por

$$\phi(N) = \frac{cN}{a + N}.\tag{2.9}$$

Como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi(N) = c,\tag{2.10}$$

o parâmetro  $c$  é denominado de *taxa máxima de consumo per capita* dos predadores. Este tipo de resposta funcional é uma função hiperbólica que satura devido à consideração do tempo despendido pelo indivíduo predador na captura de cada presa. A dedução do modelo (2.9) pode ser vista em (Kot, 2000). Como  $\phi(a) = c/2$ , o parâmetro  $a$  é denominado de *constante de meia-saturação*. O gráfico de (2.9) é mostrado na Figura 2.6.b.

Finalmente, a resposta funcional *tipo III* é da forma

$$\phi(N) = \frac{cN^2}{a^2 + N^2}.\tag{2.11}$$

Mostramos na Figura 2.6.c o gráfico de  $\phi$ . Note que esta é uma curva sigmoidal e, portanto, os predadores são menos eficientes na captura quando o número de presas é pequeno<sup>6</sup>.

Contudo, alguns autores consideram também a resposta funcional *tipo IV*, que é dada por (Kot, 2000)

$$\phi(N) = \frac{cN}{\frac{N^2}{i} + N + a}.\tag{2.12}$$

De acordo com este tipo de resposta funcional, quando o tamanho da população de pre-

---

<sup>6</sup>Para uma discussão mais aprofundada sobre esses três tipos de respostas funcionais, juntamente com exemplos de espécies que são caracterizadas pelos mesmos, veja (Begon et al., 1996; Kot, 2000).

presas é suficientemente alta, a taxa de captura *per capita* dos predadores decresce devido à defesa em grupo das presas ou à toxicidade delas. Citamos, como exemplo, o fato de uma determinada espécie de gado se defender melhor do ataque de lobos quando estão em rebanho do que quando estão sozinhos. A Figura 2.6.d mostra as mudanças no comportamento de (2.12) em decorrência de variações do parâmetro  $i$ , o qual é visto como uma medida da imunidade dos predadores em relação às presas ou da tolerância dos predadores em relação às presas. Observe que, à medida que  $i$  aumenta, a eficiência da captura dos predadores também aumenta e, em particular, (2.12) reduz-se ao modelo (2.9) da resposta funcional tipo II quando  $i \rightarrow \infty$ . Assim,  $a$  e  $c$  podem ser vistos como a constante de meia-saturação e taxa máxima de consumo *per capita* dos predadores, respectivamente, quando não existem efeitos inibitórios (Kot, 2000).

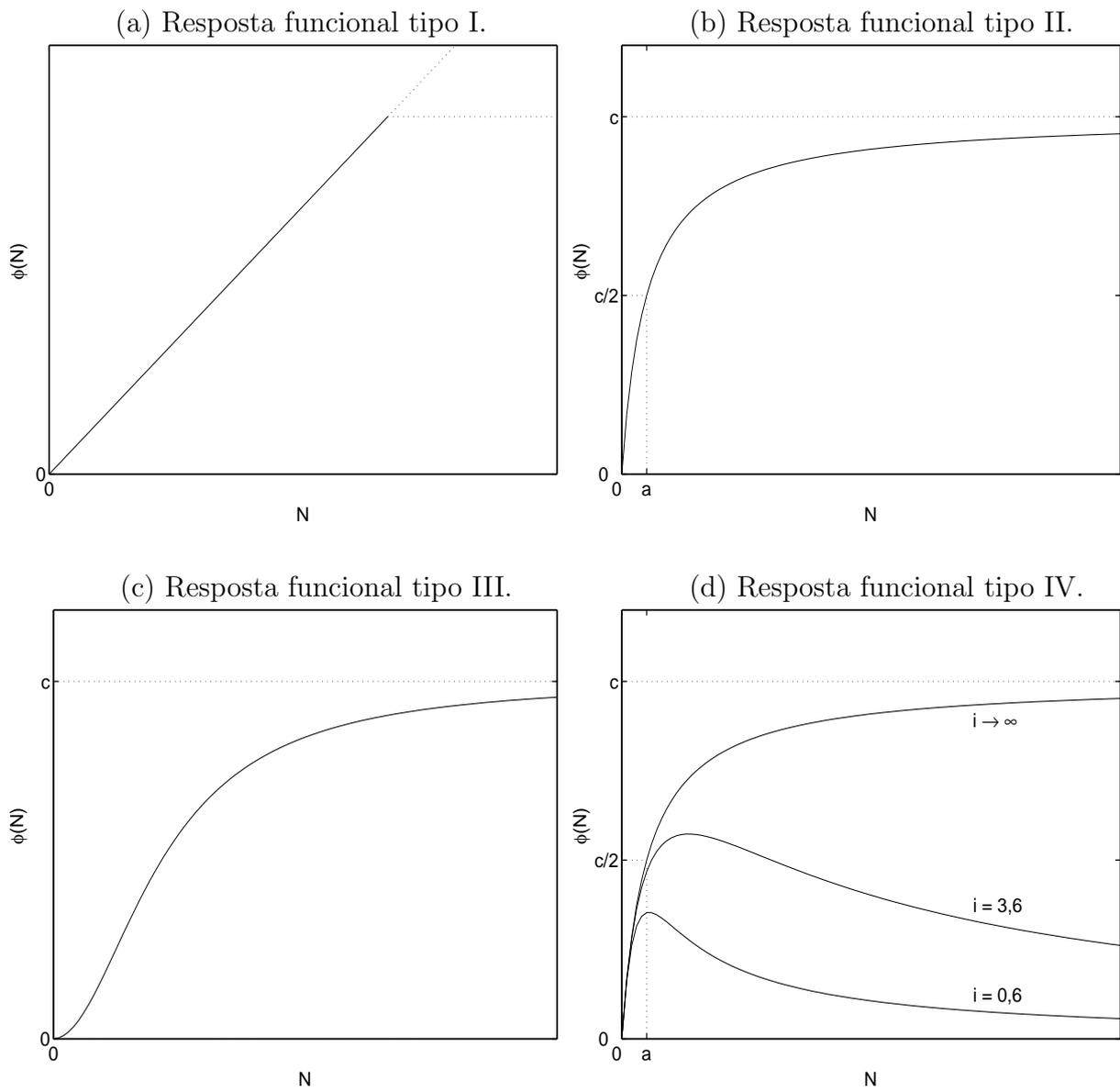


Figura 2.6: Respostas funcionais.

## 2.6 Modelo Presa-Predador com Resposta Funcional Tipo IV

Considere o modelo presa-predador *isolado*, isto é, livre de interferência humana (Kot, 2000),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}N &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \phi(N)P, \\ \frac{d}{dT}P &= b\phi(N)P - mP,\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde

$$\phi(N) = \frac{cN}{\frac{i}{N} + N + a}.\tag{2.14}$$

$N$  e  $P$  representam o número de presas e de predadores, respectivamente, e  $T$  é o tempo. Note que as presas apresentam crescimento logístico na ausência dos predadores, com taxa intrínseca de crescimento  $r$  e capacidade de suporte  $K$ . A mortalidade *per capita* dos predadores é denotada por  $m$  e (2.14) é uma resposta funcional tipo IV como em (2.12), representando sua taxa de consumo de presas *per capita*. A eficiência de conversão das presas consumidas em novos predadores é dada por  $b$ . É assumido que  $N$  e  $P$  são não-negativos e que os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $i$ ,  $K$ ,  $m$  e  $r$  são positivos<sup>7</sup>.

Com o intuito de reduzir o número de parâmetros do sistema (2.13)–(2.14) e, com isso, simplificar sua análise qualitativa, definimos as variáveis adimensionais (Kot, 2000)

$$x_1 \triangleq \frac{N}{a}, \quad x_2 \triangleq \frac{c}{ra}P, \quad t \triangleq rT.\tag{2.15}$$

É imediato verificarmos que (2.13)–(2.15), juntamente com a Regra da Cadeia, nos dá

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= f_1(\mathbf{x}) \triangleq x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\gamma}\right) - \frac{x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1}, \\ \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\beta\delta x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2,\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$  e

$$\alpha \triangleq \frac{i}{a}, \quad \beta \triangleq \frac{bc}{m}, \quad \gamma \triangleq \frac{K}{a}, \quad \delta \triangleq \frac{m}{r}.\tag{2.17}$$

<sup>7</sup>Para maiores detalhes, veja (Kot, 2000).

Note que  $x_1$ ,  $x_2$  e  $t$  são normalizações de  $N$ ,  $P$  e  $T$ , respectivamente. Reduzimos assim o número de parâmetros de sete para quatro, observando que  $\alpha$  é proporcional à  $i$  (imunidade dos predadores em relação às presas ou tolerância dos predadores em relação às presas) e  $\gamma$  à  $K$  (capacidade de suporte das presas) (Kot, 2000).

A Figura 2.7<sup>8</sup> mostra o conjunto de bifurcações do sistema (2.16) no espaço de parâmetros  $(\alpha, \gamma)$ , para  $\beta = 2$ . As curvas indicadas foram obtidas pela análise da estabilidade local dos pontos de equilíbrio, ou seja, pela análise dos autovalores da matriz Jacobiana, ou matriz *comunidade* (usando-se a terminologia usual de Ecologia), calculada em cada ponto de equilíbrio. O parâmetro  $\delta$  não é considerado no conjunto de bifurcações apresentado devido ao fato de não exercer influência, tanto na localização dos equilíbrios no plano de fase, quanto no seu tipo de estabilidade local. Comentamos, ainda, que para qualquer escolha de  $\beta > 1$ , o conjunto de bifurcações apresenta o mesmo comportamento qualitativo do mostrado na Figura 2.7 para  $\beta = 2$  (Kot, 2000). Além disso, a bifurcação de Hopf é somente esperada, e não temos certeza de que irá ocorrer, pois sua curva correspondente no conjunto de bifurcações foi obtida pela determinação dos valores paramétricos para os quais a estabilidade local de um ponto de equilíbrio mudou de um foco assintoticamente estável para um instável.

No entanto, o conjunto de bifurcações apresentado obviamente não indica se o modelo presa-predador (2.16) apresenta ou não bifurcações globais. Numa tentativa de se detectar algumas delas, simulamos o sistema (2.16) com os valores paramétricos correspondentes aos pontos  $a$ – $g$  indicados na Figura 2.7, para  $\beta = 2, 0$  e  $\delta = 2, 5$ , de modo a investigarmos as cinco regiões distintas I–V (Kot, 2000). Os planos de fase correspondentes são mostrados nas Figuras 2.8.a–2.8.g<sup>9</sup>, respectivamente. Em cada um deles, o símbolo “o” representa um nó ou foco instável; “•” representa um nó ou foco estável, e “x” representa um ponto de sela. Os planos de fase das Figuras 2.8.a e 2.8.b falam por si próprios, não sendo necessárias quaisquer descrições adicionais. Na Figura 2.8.c, existem dois equilíbrios estáveis e as variedades estáveis do ponto de sela não-trivial dividem o plano de fase em duas regiões de atração, ou seja, são separatrizes. Portanto, percebemos que, dependendo da condição inicial, os predadores não irão sobreviver. Agora, na Figura 2.8.d, observamos que uma bifurcação de Hopf supercrítica de fato ocorre quando vamos dos pontos  $b$  ou  $c$  para o ponto  $d$  na Figura 2.7, e todas as trajetórias com condição inicial no primeiro quadrante convergem para o ciclo limite estável. Mas, ao atravessarmos uma das curvas de bifurcações transcíticas, quando nos deslocamos do ponto  $d$  para

<sup>8</sup>Baseada em (Kot, 2000).

<sup>9</sup>Baseadas em (Kot, 2000).

e na Figura 2.7, o que corresponde a um aumento no valor do parâmetro  $\gamma$ , vemos pelo plano de fase da Figura 2.8.e que novamente há duas bacias de atração separadas pelas variedades estáveis do ponto de sela não-trivial. Uma delas corresponde ao ciclo limite estável e a outra ao ponto de equilíbrio estável no eixo  $x_1$ . Portanto, a condição inicial determina se ambas as espécies coexistirão oscilando periodicamente ou se a extinção dos predadores será inevitável nesse sistema isolado. À medida que continuamos a aumentar  $\gamma$ , indo de  $e$  para  $f$ , a Figura 2.8.f nos mostra que o ciclo limite colide com o ponto de sela não-trivial e surge uma órbita homoclínica<sup>10</sup> (Kot, 2000). Porém, ao aumentarmos um pouco mais o valor de  $\gamma$ , quando nos deslocamos de  $f$  para  $g$ , a órbita homoclínica deixa de existir, e todas as trajetórias no primeiro quadrante convergem para o equilíbrio estável no eixo  $x_1$ , como pode ser visto pela Figura 2.8.g. Em outras palavras, os predadores não sobreviverão (Kot, 2000).

Desse modo, acabamos de encontrar uma bifurcação global, mais especificamente, uma bifurcação homoclínica<sup>11</sup>, que, naturalmente, não foi prevista pelo conjunto de bifurcações. Contudo, ao lembrarmos que o parâmetro  $\gamma$  é proporcional à  $K$ , para  $a$  fixo, concluímos que o aumento da capacidade de suporte das presas pode ser extremamente perigoso para esse sistema. Este é um resultado muito importante e, de certa forma, contradiz nossa noção intuitiva, pois para aumentarmos a capacidade de suporte das presas, temos que aumentar a área habitada pelas presas ou aumentar a disponibilidade dos recursos utilizadas por elas<sup>12</sup>.

Ressaltamos que o modelo presa-predador (2.13) não apresenta as duas grandes limitações do modelo Lotka-Volterra explanadas na Seção 2.3. De fato, o crescimento da população de presas na ausência dos predadores é descrito pela equação logística (2.2) e, portanto, o tamanho da população não crescerá indefinidamente como no modelo Lotka-Volterra. Além disso, como acabamos de ver, dependendo dos valores paramétricos do modelo (2.13), as populações de presas e de predadores podem oscilar periodicamente num ciclo limite estável, mostrando-se, assim, um modelo mais adequado do que o modelo Lotka-Volterra.

A única diferença entre o modelo (2.13) e o modelo Rosenzweig-MacArthur é que o primeiro utiliza uma resposta funcional tipo IV, enquanto que o último utiliza uma

<sup>10</sup>Uma *órbita homoclínica* é uma trajetória que é, simultaneamente, a variedade estável e a variedade instável de um ponto de sela (Kot, 2000; Monteiro, 2002).

<sup>11</sup>Uma *bifurcação homoclínica* ocorre quando um ciclo limite colide com um ponto de sela, forma uma órbita homoclínica, e desaparece (Kot, 2000).

<sup>12</sup>A definição de capacidade de suporte foi apresentada na Seção 2.2.

tipo II. Assim, o modelo (2.13) pode ser visto como sendo uma modificação do modelo Rosenzweig-MacArthur. Mas, conforme afirmado na seção anterior, uma resposta funcional tipo IV é reduzida a uma tipo II quando  $i \rightarrow \infty$  em (2.14). Conseqüentemente, o modelo (2.13) pode ser visto como uma generalização do modelo Rosenzweig-MacArthur. Este modelo apresenta, dependendo dos valores de seus parâmetros, apenas dois tipos de comportamentos qualitativos no plano de fase: ou um ponto de equilíbrio estável de coexistência das espécies ou um ciclo limite estável. Em ambos os casos, o domínio de atração é todo o primeiro quadrante (Kot, 2000).

Portanto, concluímos que o modelo (2.13) é mais adequado do que o modelo Lotka-Volterra na descrição de órbitas periódicas, e que o mesmo apresenta uma maior gama de comportamentos possíveis do que o modelo Rosenzweig-MacArthur. Conforme vimos, órbitas periódicas são realmente observadas na natureza em interações do tipo presa-predador. Estes argumentos justificam a escolha deste modelo no presente trabalho.

No próximo capítulo, descreveremos a metodologia de controle por modos deslizantes (CMD) desenvolvida por Slotine para o problema de seguimento de uma classe de sistemas não-lineares. Relembramos que a estratégia de controle proposta nesta pesquisa consiste em determinar sinais de controle constantes por partes que aproximem os sinais de controle obtidos *off-line* com base na abordagem CMD.

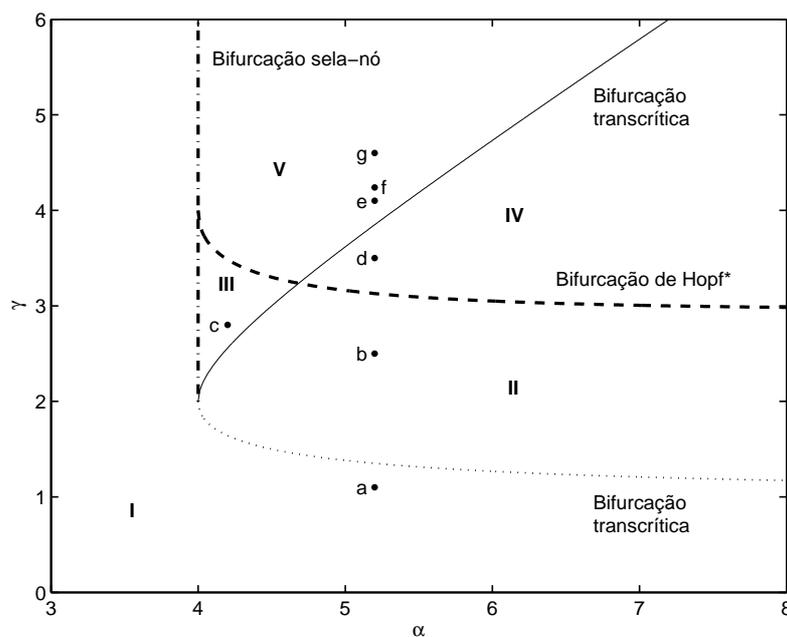


Figura 2.7: Conjunto de bifurcações no espaço de parâmetros  $(\alpha, \gamma)$  para  $\beta = 2$  (\* – esperada).

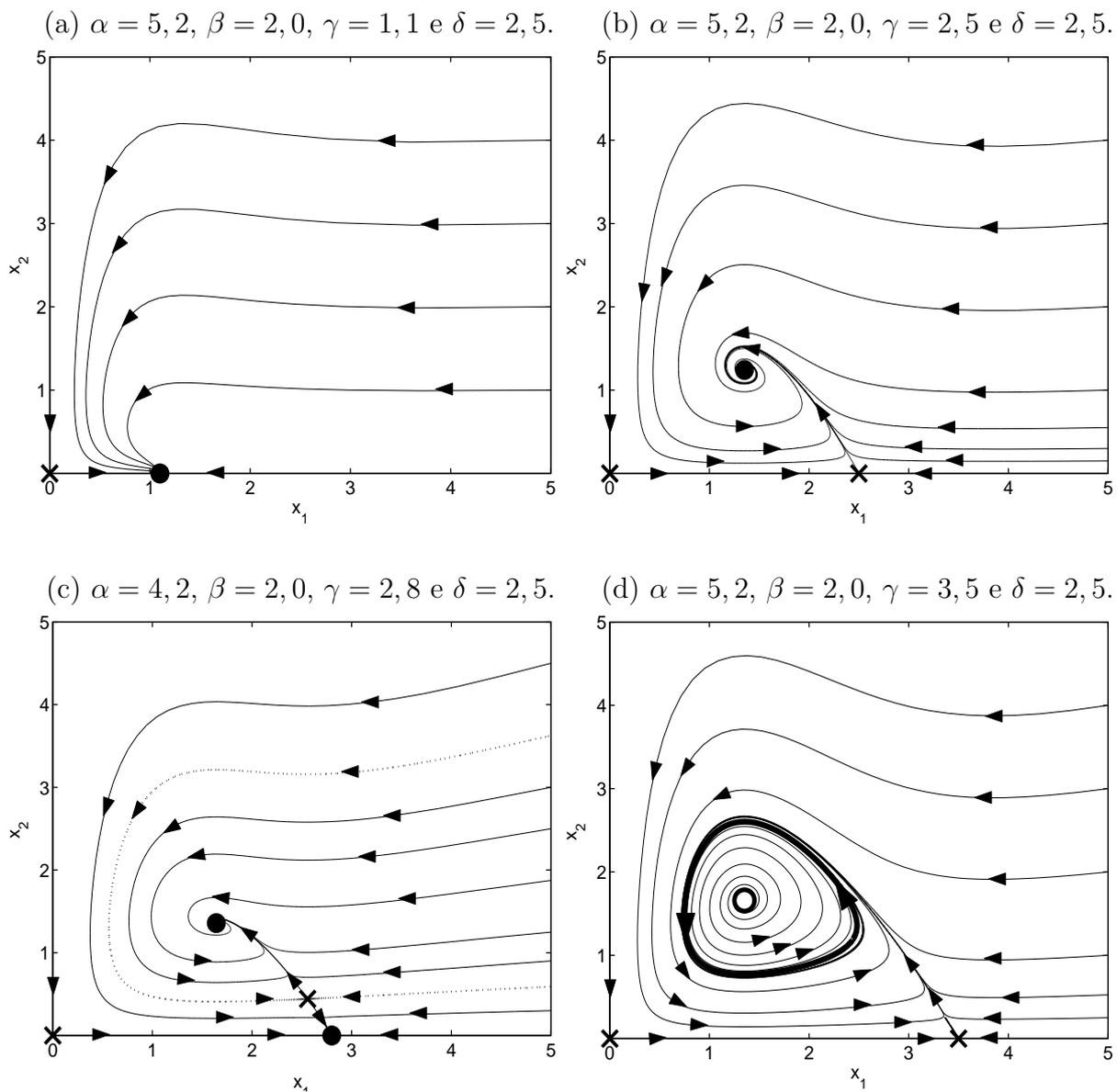


Figura 2.8: Planos de fase ( $\circ$  – nó ou foco instável;  $\bullet$  – nó ou foco estável;  $\times$  – sela).

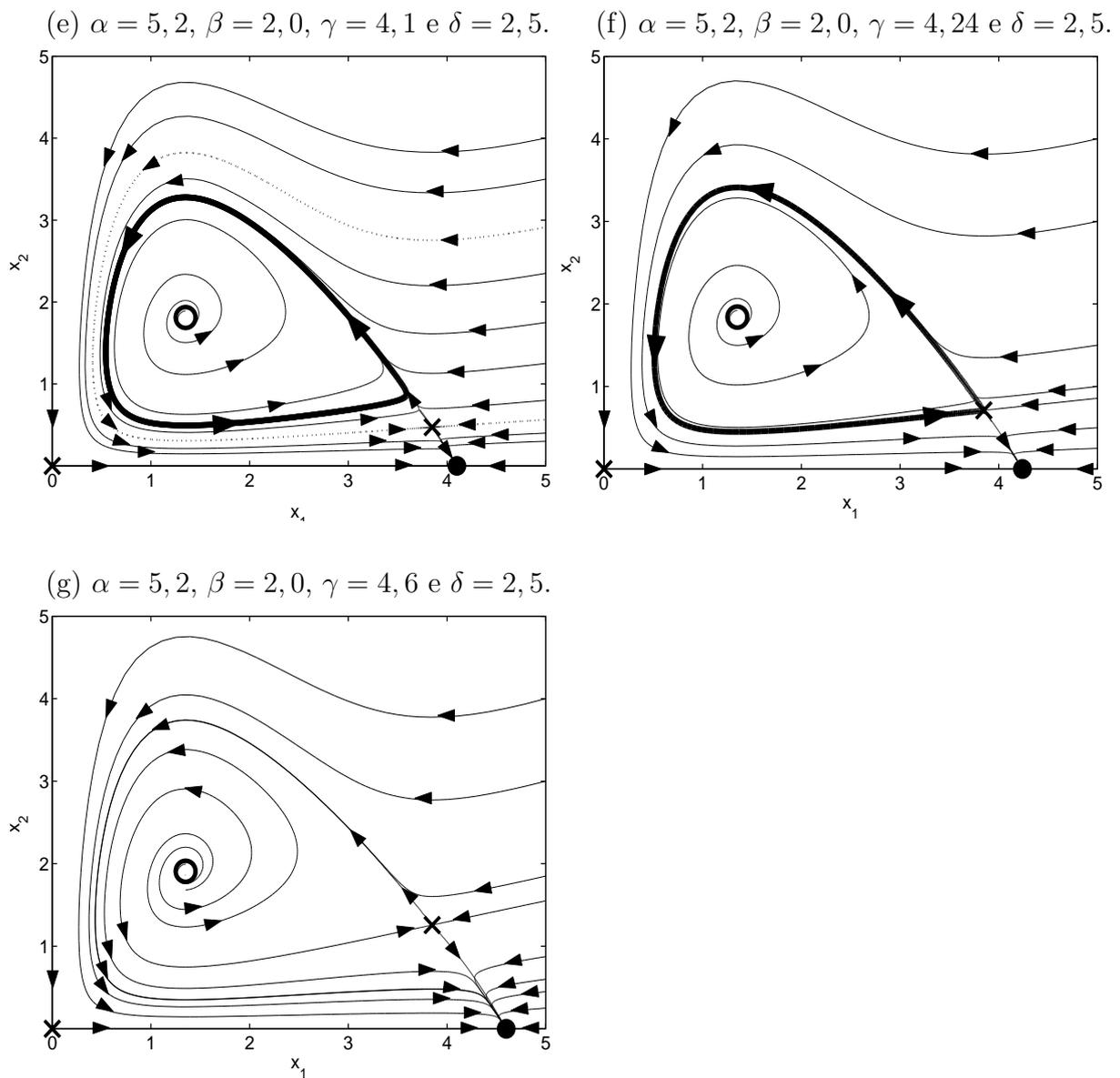


Figura 2.8: Planos de fase ( $\circ$  – nó ou foco instável;  $\bullet$  – nó ou foco estável;  $\times$  – sela).

## Capítulo 3

# Teoria de Controle por Modos Deslizantes

Neste capítulo, realizaremos uma compilação da metodologia de controle por modos deslizantes (CMD) desenvolvida por Slotine para o problema de seguimento de uma classe de sistemas não-lineares incertos e em ambientes com perturbações, de acordo com (Slotine e Sastry, 1983; Slotine, 1983; Slotine, 1984; Slotine, 1985; Slotine e Coetsee, 1986; Slotine, 1991)<sup>1</sup>. Desde já, ressaltamos que este método não é diretamente aplicável aos sistemas presa-predador considerados neste trabalho, pois sua implementação requer a medição das populações a cada instante de tempo e os sinais de controle não são constantes por partes. Estas limitações ficarão evidentes quando aplicarmos a abordagem CMD ao modelo de sistema presa-predador (2.16) no próximo capítulo. Contudo, a estratégia de controle proposta, que será formulada no Capítulo 5, consiste em determinar sinais de controle constantes por partes que aproximem os sinais de controle obtidos *off-line* pela metodologia CMD, assumindo que o sistema seja completamente conhecido, invariante no tempo e que sua dinâmica seja suficientemente lenta.

Existem inúmeros problemas de engenharia onde a abordagem CMD pode ser diretamente empregada, de modo que seguimento robusto de trajetórias de referência é alcançado, tanto na presença de perturbações, quanto de variações paramétricas. Por este motivo, um tratamento auto-contido utilizando leis de controle descontínuas e contínuas é apresentado, e em grande detalhe onde julgamos adequado.

---

<sup>1</sup>A referência (Slotine, 1983) pode ser vista no endereço eletrônico <http://theses.mit.edu>.

Ao longo de todo o trabalho,  $\|\cdot\|$  denotará a norma do máximo em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\|\cdot\|_2$  a norma euclidiana, salvo menção contrária<sup>2</sup>. Além disto, adotaremos a seguinte terminologia utilizada por Lang (1968) para diferenciar aplicação de função: seja  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação; se  $B = \mathbb{R}$ , então  $f$  é denominada de *função*. Utilizaremos, ainda, as seguintes notações (Dieudonné, 1969)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^* &\triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}, \\ \mathbb{R}_+ &\triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \\ \mathbb{R}_+^* &\triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Considere a classe de sistemas não-lineares, variantes no tempo e com múltiplas entradas, descritos por (Slotine e Sastry, 1983; Slotine, 1984)

$$\dot{x}_j^{(n_j)} = f_j(\mathbf{x}, t) + b_j(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x}, t) + d_j(t), \quad j = 1, \dots, p,\tag{3.2}$$

onde “ $x_j^{(n_j)}$ ” denota a derivada de ordem  $n_j$  da variável de estado  $x_j$ ,  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado dado por

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad \dots \quad x_1^{(n_1-1)} \quad \dots \quad x_p \quad \dot{x}_p \quad \dots \quad x_p^{(n_p-1)}]^\top \in \mathbb{R}^q \triangleq \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p},\tag{3.3}$$

$\mathbf{u} = [u_1 \quad \dots \quad u_p]^\top \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de controle e  $d_j$  são perturbações. Permitimos que  $f_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $d_j: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  não sejam completamente conhecidas. Se este for o caso, é então assumido que  $b_j$  não sofre mudanças de sinal e que essas funções satisfaçam algumas propriedades gerais (Fernández e Hedrick, 1987; Slotine, 1984; Slotine, 1991)

$$|f_j - \widehat{f}_j| \leq F_j,\tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\beta_j} \leq \frac{\widehat{b}_j}{b_j} \leq \beta_j,\tag{3.5}$$

$$|d_j| \leq D_j,\tag{3.6}$$

onde “ $\widehat{\cdot}$ ” denota valores nominais e  $\widehat{f}_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\widehat{b}_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta_j: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $D_j: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas<sup>3</sup> (Slotine, 1984; Slotine e Coetsee,

<sup>2</sup>Seja  $\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ . Temos que  $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  e  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

<sup>3</sup>Veja a Definição A.2 no Apêndice A.

1986). Note que (3.5) implica que  $\beta_j \geq 1$ , no qual  $\mathbf{1}: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$\mathbf{1}(\mathbf{x}, t) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^q \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.7)$$

No caso de  $b_j$  ser limitada por

$$b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, \quad (3.8)$$

onde  $b_j^-: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b_j^+: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas com o mesmo sinal que  $b_j$ , definimos  $\widehat{b}_j$  e  $\beta_j$  em (3.5) da seguinte maneira (Slotine e Coetsee, 1986; Slotine, 1991)

$$\begin{aligned} \widehat{b}_j &\triangleq (b_j^- b_j^+)^{\frac{1}{2}}, \\ \beta_j &\triangleq (b_j^+ / b_j^-)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O problema de controle é obter uma lei de controle  $u_j$  tal que o erro de seguimento entre  $x_j$  e uma dada trajetória de referência  $r_j$  de classe  $\mathcal{C}^{n_j}$  se anule independentemente de variações em  $f_j$ ,  $b_j$  e  $d_j$  que satisfaçam (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente, para cada  $j = 1, \dots, p$  (Fernández e Hedrick, 1987; Slotine, 1984; Slotine, 1991). Uma solução para este problema foi encontrada de maneira elegante por Slotine, sendo apresentada na seqüência. Comentamos que a metodologia é aplicada de forma independente para cada  $j = 1, \dots, p$ , ou seja, apesar de o sistema (3.2) ter  $p$  entradas, o problema de controle é tratado como  $p$  problemas de uma única entrada (Slotine, 1984; Slotine e Sastry, 1983).

Definimos o *erro de seguimento* (Slotine, 1984; Slotine, 1991)

$$e_j = x_j - r_j, \quad (3.10)$$

o *vetor trajetória de referência*

$$\mathbf{r}_j = [r_j \quad \dot{r}_j \quad \dots \quad r_j^{(n_j-1)}]', \quad (3.11)$$

e o *vetor erro de seguimento*

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{r}_j = [e_j \quad \dot{e}_j \quad \dots \quad e_j^{(n_j-1)}]', \quad (3.12)$$

onde

$$\mathbf{x}_j = [x_j \quad \dot{x}_j \quad \dots \quad x_j^{(n_j-1)}]' \in \mathbb{R}^{n_j}. \quad (3.13)$$

Considere as *superfícies de deslizamento variantes no tempo* em  $\mathbb{R}^{n_j}$  dadas por (Slotine,

1983; Slotine, 1984; Slotine, 1991; Slotine e Sastry, 1983)

$$S_j(t) = \{\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j} \mid s_j(\mathbf{x}_j, t) = 0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.14)$$

onde  $s_j: \mathbb{R}^{n_j} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como

$$s_j(\mathbf{x}_j, t) \triangleq (D + \lambda_j)^{n_j-1}(x_j - r_j(t)) = \mathbf{C}_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_j(t)), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}_+^*, \quad (3.15)$$

com  $D$  denota o operador diferencial e

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j &= [c_{j1}, \dots, c_{jn_j}], \\ c_{ji} &= \binom{n_j - 1}{i - 1} \lambda_j^{n_j - i} = \frac{(n_j - 1)!}{(i - 1)!(n_j - i)!} \lambda_j^{n_j - i}, \quad i = 1, \dots, n_j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definimos também o conjunto  $\mathcal{S}_j = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} S_j(t)$ . Assuma, por agora, que a lei de controle  $u_j$  foi de alguma maneira determinada, de modo que a *condição global de deslizamento* (Slotine, 1984; Slotine e Sastry, 1983)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_j^2(\mathbf{x}_j, t) \leq -\eta_j |s_j(\mathbf{x}_j, t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \forall \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j} - S_j(t), \quad \eta_j \in \mathbb{R}_+^*, \quad (3.17)$$

seja satisfeita para  $f_j$ ,  $b_j$  e  $d_j$  dentre os limites (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente. A desigualdade (3.17) implica que (Khalil, 1996; Slotine, 1984):

- (i)  $\mathcal{S}_j$  é um conjunto invariante de (3.2)<sup>4</sup>, isto é, se  $\mathbf{x}_j(t_0) \in S_j(t_0) \subset \mathcal{S}_j$  para um dado  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , então  $\forall t \geq t_0 \mathbf{x}_j(t) \in S_j(t) \subset \mathcal{S}_j$  (modo deslizante);
- (ii) Se  $\mathbf{x}_j(t_0) \notin S_j(t_0)$  para um dado  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , então a trajetória  $\mathbf{x}_j$  atingirá a superfície de deslizamento  $S_j(t_{rj})$  em um tempo finito  $t_{rj}$  que satisfaz a desigualdade

$$t_{rj} \leq \hat{t}_{rj} \triangleq \frac{|s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)|}{\eta_j} + t_0. \quad (3.18)$$

Denominaremos, aqui,  $t_{rj}$  de *tempo de alcance* e  $\hat{t}_{rj}$  de *tempo de alcance estimado*. A prova de (i) é evidente, pois para que a trajetória  $\mathbf{x}_j$  saia do conjunto  $\mathcal{S}_j$ , é exigido que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_j^2(\mathbf{x}_j(t), t) = s_j(\mathbf{x}_j(t), t) \frac{d}{dt} s_j(\mathbf{x}_j(t), t) > 0 \quad (3.19)$$

---

<sup>4</sup>Veja a Definição A.5.

para algum  $t > t_0$ , contradizendo (3.17) (Khalil, 1996). O item (ii) é uma consequência direta da seguinte desigualdade

$$|s_j(\mathbf{x}_j(t), t)| \leq |s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)| - \eta_j(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.20)$$

a qual é obtida pela aplicação do Lema da Comparação<sup>5</sup> (Khalil, 1996). Com efeito, para  $t = \hat{t}_{r_j}$  obtemos

$$|s_j(\mathbf{x}_j(\hat{t}_{r_j}), \hat{t}_{r_j})| \leq |s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)| - \eta_j(\hat{t}_{r_j} - t_0) = 0, \quad (3.21)$$

de (3.18) e (3.20). Assim,  $s_j(\mathbf{x}_j(\hat{t}_{r_j}), \hat{t}_{r_j}) = 0$ , o que implica que  $t_{r_j} \leq \hat{t}_{r_j}$  pela desigualdade (3.20).

Portanto, a partir de (i) e (3.15), se  $\mathbf{x}_j(t_0) \in S_j(t_0)$  para um dado  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , ou seja,  $s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0) = 0$ , temos que (Slotine e Sastry, 1983)

$$s_j(\mathbf{x}_j(t), t) = (D + \lambda_j)^{n_j-1} e_j(t) = \mathbf{C}_j \mathbf{e}_j(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.22)$$

Segue da unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias que se  $\mathbf{e}_j(t_0) = \mathbf{0}$  ou, de forma equivalente, se  $\mathbf{x}_j(t_0) = \mathbf{r}_j(t_0)$ , então a solução única de (3.22) é  $\mathbf{e}_j(t) = 0$  para todo  $t \geq t_0$  (Slotine e Sastry, 1983). Caso contrário, se  $\mathbf{e}_j(t_0) \neq \mathbf{0}$ , então (Slotine, 1984; Slotine e Sastry, 1983)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_j(t) = 0, \quad (3.23)$$

devido ao fato do polinômio característico em  $z$

$$(z + \lambda_j)^{n_j-1} = z^{n_j-1} + \sum_{i=1}^{n_j-1} c_{ji} z^{i-1} \quad (3.24)$$

da equação diferencial (3.22) ser Hurwitz, isto é, possuir todas as raízes com parte real negativa. Com efeito,  $\lambda_j > 0$  por hipótese. É imediato de (3.24) que o transitório do vetor erro de seguimento  $\mathbf{e}_j$  é determinado por  $\lambda_j$ .

Em particular, se  $\mathbf{e}_j(0) = \mathbf{0}$ , segue que  $\mathbf{e}_j(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . E, caso  $\mathbf{e}_j(0) \neq 0$ , então  $\mathbf{x}_j(t_{r_j}) \in S_j(t_{r_j}) \subset \mathcal{S}_j$ . Conseqüentemente,  $\mathbf{x}_j(t) \in S_j(t) \subset \mathcal{S}_j$  para todo  $t \geq t_{r_j}$ , isto é, existe modo deslizante para todo  $t \geq t_{r_j}$ , com  $\mathbf{e}_j$  convergindo exponencialmente

<sup>5</sup>Veja as Seções B.1 e B.2 do Apêndice B.

para a origem de  $\mathbb{R}^{n_j}$  de acordo com a dinâmica dada por (3.22)

$$(D + \lambda_j)^{n_j-1} e_j(t) = \mathbf{C}_j \mathbf{e}_j(t) = 0, \quad \forall t \geq t_{r_j}. \quad (3.25)$$

Dessa maneira, durante um modo deslizante, a trajetória  $\mathbf{x}_j$  não poderá ser perturbada por possíveis variações paramétricas em  $f_j$  e  $b_j$ , e pela perturbação externa  $d_j$ , pois estas funções não aparecem em (3.25). Portanto, seguimento robusto com rejeição de perturbações é de fato alcançado (Slotine e Sastry, 1983). Ressaltamos, ainda, que a condição global de deslizamento (3.17) assegura que o vetor  $\mathbf{x}_j(t_0)$  aponte em direção à  $S_j(t_0)$  quando  $\mathbf{x}_j(t_0) \notin S_j(t_0)$  em um dado instante  $t_0$ , ou seja, as trajetórias  $\mathbf{x}_j$  estão voltadas para as superfícies de deslizamento variantes no tempo  $S_j$  quando estão fora delas (Slotine, 1985; Slotine, 1991).

Portanto, concluímos que a condição global de deslizamento (3.17) é uma condição suficiente para que o problema de seguimento seja completamente solucionado. Conforme ressaltado em (Slotine, 1991), tudo se passa como se convertêssemos um problema de seguimento de ordem  $n_j$  em  $\mathbf{x}_j$  num problema de estabilização de primeira ordem em  $s_j$ .

Agora, resta-nos determinar a lei de controle  $u_j$ . É demonstrado na Seção B.3 que uma lei de controle  $u_j$  que satisfaz a condição global de deslizamento (3.17) é (Fernández e Hedrick, 1987; Slotine, 1984; Slotine, 1991)

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} [\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t) - K_j(\mathbf{x}, t) \operatorname{sgn}(s_j(\mathbf{x}, t))], \quad (3.26)$$

onde

$$\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t) = -\widehat{f}_j(\mathbf{x}, t) + r_j^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^{n_j-1} \binom{n_j-1}{i} \lambda_j^i e_j^{(n_j-i)}(t) \quad (3.27)$$

$$K_j(\mathbf{x}, t) = \beta_j(\mathbf{x}, t) [F_j(\mathbf{x}, t) + D_j(\mathbf{x}, t) + \eta_j] + (\beta_j - \mathbf{1})(\mathbf{x}, t) |\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t)|, \quad (3.28)$$

e  $\operatorname{sgn}: \mathbb{R}^* \rightarrow \{-1, 1\}$  é a *função sinal* definida por

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0, \\ -1 & \text{para } y < 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Destacamos que esta lei de controle atende (3.17) para imprecisões em  $f_j$ ,  $b_j$  e  $d_j$  limitadas

por (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente<sup>6</sup>. Em (3.26), o termo

$$\frac{\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t)}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} \quad (3.30)$$

considera a parte conhecida da dinâmica de  $s_j$ , enquanto que o termo

$$-\frac{K_j(\mathbf{x}, t)}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} \operatorname{sgn}(s_j(\mathbf{x}_j, t)) \quad (3.31)$$

leva em conta as incertezas paramétricas em  $f_j$  e  $b_j$ , e a perturbação  $d_j$  (Slotine, 1985).

Note que, em (3.18), o tempo de alcance estimado  $\widehat{t}_{rj}$  é determinado pela escolha arbitrária de  $\eta_j \in \mathbb{R}_+^*$  em (3.28) da lei de controle  $u_j$ . Observe, ainda, que, por (3.26), a lei de controle  $u_j$  é descontínua ao longo do conjunto  $\mathcal{S}_j$  devido à função sinal  $\operatorname{sgn}$  (Slotine, 1984; Slotine, 1991). De acordo com (3.2) e (3.26)–(3.28), a dinâmica de  $x_j$  é dada por

$$x_j^{(n_j)} = \begin{cases} f_j(\mathbf{x}, t) + b_j(\mathbf{x}, t)u_j^+(\mathbf{x}, t) + d_j(t) & \text{se } s_j(\mathbf{x}_j, t) > 0, \\ f_j(\mathbf{x}, t) + b_j(\mathbf{x}, t)u_j^-(\mathbf{x}, t) + d_j(t) & \text{se } s_j(\mathbf{x}_j, t) < 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned} u_j^+(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} [\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t) - K_j(\mathbf{x}, t)], \\ u_j^-(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} [\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t) + K_j(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (3.33)$$

que é um sistema de estrutura variável (Slotine e Sastry, 1983; Utkin, 1978). Assim, a lei de controle descontínua  $u_j$  é comutada ao longo de  $\mathcal{S}_j$ . Todavia,  $u_j^+$  e  $u_j^-$  são contínuas pelas hipóteses feitas anteriormente. Como (3.32)–(3.33) é uma equação diferencial com lado direito descontínuo, a teoria convencional de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias não pode ser aplicada. A definição usual de solução não é aplicável e, assim, a definição proposta pelo matemático russo Filippov deve ser utilizada (Slotine e Sastry, 1983). Segundo a teoria desenvolvida por Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo, a dinâmica de  $x_j$  durante um modo deslizante é descrita por

$$x_j^{(n_j)} = f_j(\mathbf{x}, t) + b_j(\mathbf{x}, t)u_j^{eq}(\mathbf{x}, t) + d_j(t), \quad (3.34)$$

---

<sup>6</sup>No caso de sabermos *a priori* que  $|r_j^{(n_j)}| \leq v_j$ , onde  $v_j: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, podemos substituir  $r_j^{(n_j)}(t)$  por  $v_j(t)$  em (3.27) (Slotine, 1984; Slotine, 1985).

onde

$$u_j^{eq}(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x}, t)u_j^+(\mathbf{x}, t) + (1 - \alpha(\mathbf{x}, t))u_j^-, \quad 0 \leq \alpha(\mathbf{x}, t) \leq 1, \quad (3.35)$$

é denominado de *controle equivalente* (Slotine, 1991; Slotine e Sastry, 1983; Utkin, 1978).

Contudo, a dinâmica (3.34)–(3.35) é apenas uma abstração matemática, pois assume que a comutação da lei de controle descontínua  $u_j$  ocorra de maneira infinitamente rápida ao longo do conjunto  $\mathcal{S}_j$  (Slotine, 1991; Utkin, 1978). É possível mostrar que o controle equivalente  $u_j^{eq}$  assegura que (Slotine e Sastry, 1983)

$$\frac{d}{dt}s_j(\mathbf{x}_j(t), t) = 0 \quad (3.36)$$

durante um modo deslizante, como era de se esperar<sup>7</sup>.

Destacamos um importante aspecto matemático da lei de controle  $u_j$  obtida. Como o sinal de controle  $u_j$  é descontínuo um durante modo deslizante, é possível que a integral de Riemann não exista em um dado intervalo de tempo de interesse. Mas, devido aos aspectos matemáticos exigidos na estratégia de controle proposta no Capítulo 5, essa situação tem que ser evitada. No entanto, Slotine mostrou que é possível substituir as leis de controle descontínuas (comutadas)  $u_j$  por leis de controle contínuas e, neste caso, o vetor erro de seguimento  $\mathbf{e}_j$  não converge para zero, porém permanece numa pequena vizinhança da origem. Com esta alternativa, o sinal  $u_j$  poderá ser integrado em um dado intervalo de tempo pelo fato de ser contínuo. Isto permitirá que a metodologia CMD seja aplicada para a obtenção de sinais de controle constantes por partes, que é o que desejamos neste trabalho.

Considere as *camadas de fronteira variantes no tempo* de largura  $\epsilon_j$  dadas por (Slotine, 1983; Slotine, 1984)

$$B_j(t) = \{\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j} \mid |s_j(\mathbf{x}_j, t)| \leq \lambda^{n_j-1}\epsilon_j\}, \quad \epsilon_j \in \mathbb{R}_+, \quad (3.37)$$

onde  $\epsilon_j$  é a *largura das camadas de fronteira*. Definimos o conjunto  $\mathcal{B}_j = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} B_j(t)$ .

Redefinindo a lei de controle  $u_j$  por

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\widehat{b}_j(\mathbf{x}, t)} [\widehat{u}_j(\mathbf{x}, t) - K_j(\mathbf{x}, t) \text{sat}(s_j(\mathbf{x}_j, t)/(\lambda^{n_j-1}\epsilon_j))], \quad (3.38)$$

<sup>7</sup>Para uma boa exposição sobre equações diferenciais com lado direito descontínuo, veja (Slotine e Sastry, 1983).

juntamente com (3.27)–(3.28), onde  $sat: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$sat(y) = \begin{cases} y & \text{para } |y| \leq 1, \\ sgn(y) & \text{para } |y| > 1, \end{cases} \quad (3.39)$$

fica assegurado que a *condição global de quasi-deslizamento*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_j^2(\mathbf{x}_j, t) \leq -\eta_j |s_j(\mathbf{x}_j, t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \forall \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j} - B_j(t), \quad \eta_j \in \mathbb{R}_+^*, \quad (3.40)$$

seja satisfeita para  $f_j$ ,  $b_j$  e  $d_j$  limitadas por (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente (Fernández e Hedrick, 1987; Slotine, 1984). A desigualdade acima implica que (Fernández e Hedrick, 1987; Khalil, 1996; Slotine, 1984):

- (i)  $\mathcal{B}_j$  é um conjunto invariante de (3.2)<sup>8</sup>;
- (ii) Se  $\mathbf{x}(t_0) \notin B_j(t_0)$  para um dado  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , então a trajetória  $\mathbf{x}_j$  atingirá a camada de fronteira  $B_j(t_{rj})$  em um tempo finito  $t_{rj}$  que satisfaz a desigualdade

$$t_{rj} \leq \hat{t}_{rj} \triangleq \frac{|s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)|}{\eta_j} + t_0. \quad (3.41)$$

Estes resultados seguem do mesmo raciocínio feito anteriormente (Khalil, 1996; Slotine, 1984). Observe que a lei de controle  $u_j$  definida por (3.38)–(3.39) é de fato contínua, e que a única diferença em relação à lei de controle descontínua (3.26)–(3.29) é a substituição de  $sgn(s_j(\mathbf{x}_j, t))$  por  $sat(s_j(\mathbf{x}_j, t)/(\lambda_j^{n_j-1} \epsilon_j))$  (Slotine e Sastry, 1983; Slotine, 1984). Conseqüentemente, pela definição de  $sat$  em (3.39), temos que (3.26) coincide com (3.38) quando  $\mathbf{x}_j(t) \notin \mathcal{B}_j$  para um dado  $t \in \mathbb{R}_+$ , ou seja, as leis de controle descontínua e contínua coincidem fora das camadas de fronteira variantes no tempo  $B_j$ . Colocado de outra maneira, se tivermos  $\mathbf{x}_j(t) \notin \mathcal{B}_j$ , então a lei de controle contínua  $u_j$  fica determinada por (Slotine e Sastry, 1983)

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u_j^+(\mathbf{x}, t), & \text{para } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q \mid s_j(\mathbf{x}_j, t) > \lambda_j^{n_j-1} \epsilon_j\}, \\ u_j^-(\mathbf{x}, t), & \text{para } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q \mid s_j(\mathbf{x}_j, t) < -\lambda_j^{n_j-1} \epsilon_j\}, \end{cases} \quad (3.42)$$

onde  $u_j^+$  e  $u_j^-$  são dadas por (3.33). A função  $sat$  faz então uma interpolação contínua entre  $u_j^+$  e  $u_j^-$  dentro das camadas de fronteira variantes no tempo  $B_j$  (Slotine e Sastry,

---

<sup>8</sup>Veja a Definição A.5.

1983; Slotine, 1984). Assim, a lei de controle contínua pode ser vista como sendo uma aproximação suave da lei de controle descontínua (Slotine, 1991).

Slotine (1983) mostrou que, dado  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , se  $\mathbf{e}_j(t_0) \in B_j(t_0)$  é tal que

$$\begin{aligned} |e_j^{(i)}(t_0)| &= 0, & i = 0, \dots, n_j - 2, \\ |e_j^{(n_j-1)}(t_0)| &\leq \lambda_j^{n_j-1} \epsilon_j, \end{aligned} \quad (3.43)$$

então

$$|e_j^{(i)}(t)| \leq (2\lambda_j)^i \epsilon_j, \quad \forall t \geq t_0, \quad i = 0, \dots, n_j - 1. \quad (3.44)$$

Mas, caso  $\mathbf{e}_j(t_0) \in B_j(t_0)$  não satisfaça (3.43), segue que

$$|e_j^{(i)}(t)| \leq (2\lambda_j)^i \epsilon_j + P_{ji}(t) \|\mathbf{e}_j(t_0)\| e^{-\lambda_j(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0, \quad i = 0, \dots, n_j - 1 \quad (3.45)$$

onde  $P_{ji}$  são polinômios em  $t$ . Conseqüentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_j^{(i)}(t)| \leq (2\lambda_j)^i \epsilon_j. \quad (3.46)$$

Observe que, a partir de (3.38), (3.44) e (3.46), o valor  $(2\lambda_j)^i \epsilon_j$  pelo qual  $e_j^{(i)}$  é limitado é determinado pela escolha de  $\epsilon_j$  em (3.38) da lei de controle contínua  $u_j$  e, em particular, o vetor erro de seguimento  $\mathbf{e}_j$  tende para zero quando  $\epsilon_j$  tende para zero.

Relembramos que nosso interesse em obter um sinal de controle contínuo  $u_j$  foi somente em razão de considerações matemáticas. Na realidade, o desenvolvimento de Slotine foi motivado por limitações práticas na implementação das leis de controle descontínuas. A abordagem deste assunto é muito mais extensa do que a apresentada neste capítulo. Ela inclui, por exemplo, critérios de escolha para a largura das camadas de fronteira  $e_j$  e para  $\lambda_j$ , de modo a se levar em consideração a frequência de amostragem do estado, no caso de implementação digital das leis de controle, e dinâmicas não-modeladas de alta frequência. Veja (Slotine, 1983; Slotine, 1984; Slotine, 1991) para o tratamento completo em detalhe.

Para aplicarmos a metodologia CMD descrita acima no controle do sistema presa-predador (2.16), temos antes que incorporar o vetor de controle, representando a ação humana. Isto será feito no capítulo seguinte, com uma discussão prévia de algumas questões importantes que devam ser consideradas no controle desses sistemas ecológicos. Como veremos, nem sempre será possível aplicarmos diretamente as leis de controle da abordagem CMD devido a limitações práticas.

# Capítulo 4

## Controle de Sistemas Presa-Predador

No presente capítulo, discutiremos o controle de sistemas presa-predador. Inicialmente, serão levantados alguns pontos que devam ser considerados nas estratégias de controle para esses sistemas, com ênfase nos objetivos de exploração sustentável e recuperação ambiental. Toda a nossa argumentação tomará como caso ilustrativo o modelo presa-predador (2.16) descrito na Seção 2.6. Na seqüência, aplicaremos a metodologia CMD tratada no capítulo anterior para forçar as trajetórias do sistema presa-predador (2.16), com a ação humana incorporada, a seguir trajetórias de referência adequadas, considerando que as do sistema isolado estejam oscilando num ciclo limite estável. Mostraremos, também, que, a exemplo de outros métodos de controle, os sinais de controle da abordagem CMD não possibilitam a definição de políticas de gerenciamento ambiental em muitas interações do tipo presa-predador encontradas na natureza, pois é preciso medir as populações a cada instante de tempo e os sinais de controle poderão não modelar a ação humana. Estas limitações servirão de motivação para a busca da estratégia de controle alternativa proposta no próximo capítulo.

## 4.1 Considerações Sobre Estratégias de Controle para Sistemas Presa-Predador

A habilidade de se controlar um sistema presa-predador é altamente desejada na prática. Podemos citar duas situações que justificam a importância de buscarmos estratégias de controle para tais sistemas ecológicos. A primeira se configura quando intentamos explorar de maneira sustentável os seus recursos e a segunda se caracteriza quando desejamos restaurar a dinâmica *natural* do sistema, isto é, a que o sistema apresenta quando em equilíbrio ecológico, no caso de perturbações externas desviarem a dinâmica do sistema para uma dinâmica diferente da natural. Em outras palavras, na segunda situação a estratégia de controle deve possibilitar a recuperação ambiental de um ecossistema perturbado. A seguir discutiremos de maneira um pouco mais detalhada as duas situações acima, levantando também algumas considerações importantes. Para facilitar nossa explanação, adotaremos como objeto de análise o sistema presa-predador isolado (2.16). Analogias com outros sistemas ficarão então evidentes.

Suponha que o sistema (2.16) possua os valores paramétricos indicados na Figura 2.8.e, e que sua dinâmica natural corresponda ao ciclo limite estável mostrado na mesma. Considere que um esquema de controle foi determinado com o objetivo de explorar os recursos do sistema. Contudo, entendemos que a dinâmica do sistema controlado deva ser “compatível” com a dinâmica natural do sistema isolado. Apesar de muita subjetividade estar envolvida, explicaremos o que queremos dizer por “compatível” no que se segue. Como as trajetórias do sistema isolado são periódicas, por hipótese, não nos parece natural, neste caso, estabilizarmos o sistema controlado num ponto de equilíbrio de coexistência de ambas as espécies ou, ainda, que suas trajetórias sejam oscilatórias, porém aperiódicas. Além do mais, se as trajetórias do sistema controlado convergirem para um ciclo limite, temos que ter muito cuidado com as trajetórias resultantes de cada população no domínio do tempo. O ciclo limite não pode corresponder a trajetórias que são dentes-de-serra ou ondas quadradas, por exemplo, pois estes são comportamentos inaceitáveis para a dinâmica de populações encontradas na natureza. Acrescentamos ainda, que os períodos dos ciclos limite do sistema controlado e do sistema isolado não podem ter ordens de grandeza totalmente diferentes. Por exemplo, se o ciclo limite do sistema isolado tem um período de um ano, mas o do sistema controlado tem um período de poucos dias, fica claro que alguma coisa está errada. Essas escolhas inadequadas para a dinâmica do sistema controlado poderiam, por exemplo, excitar dinâmicas não modeladas e até mesmo invalidar o modelo matemático do sistema, de modo que previsões futuras para o comportamento do sistema

real seriam impossíveis de serem feitas e catástrofes ambientais estariam mais sujeitas a acontecer. Ressaltamos que o sistema a ser controlado é um sistema vivo complexo, e não uma máquina inanimada. Portanto, concluímos que a dinâmica do sistema controlado deva ser similar à dinâmica natural do sistema isolado. É isto que queremos dizer por “compatibilidade”. Desse modo, para explorarmos de maneira sustentável um sistema presa-predador, tal compatibilidade deverá ser atendida.

Agora, discutiremos o caso de recuperação ambiental de um ecossistema perturbado, considerando novamente que a dinâmica natural do sistema presa-predador isolado (2.16) corresponda ao ciclo limite apresentado na Figura 2.8.e. Analisando esse plano de fase, é evidente que se uma perturbação externa deslocar o vetor de estado do sistema isolado para fora das separatrizes, a trajetória resultante irá inevitavelmente convergir para o ponto de equilíbrio estável no eixo  $x_1$ , e os predadores serão extintos. Considere que tal perturbação ocorreu de fato, desviando a dinâmica do sistema de sua dinâmica natural. Nesta situação, desejamos que, por meio de um sinal de controle externo, ou seja, através da interferência humana, possamos recuperar o ecossistema, isto é, fazer com que as trajetórias do sistema presa-predador voltem a oscilar no ciclo limite original, evitando, assim, a extinção dos predadores e restaurando a dinâmica natural do sistema. Mas, nos casos em que não é possível restaurarmos a dinâmica natural, uma dinâmica compatível com a dinâmica natural deverá ser imposta no sistema através da ação humana.

Uma alternativa para atenuar a vulnerabilidade do sistema a perturbações seria aplicando um sinal de controle que forçasse as trajetórias do sistema a oscilar num ciclo limite que esteja dentro do ciclo limite do sistema isolado. Porém, devemos tomar muito cuidado na escolha desse ciclo limite, de modo a obtermos compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado.

Pelos argumentos supramencionados, a importância de controlarmos um sistema presa-predador fica clara. No entanto, para que nossos interesses práticos sejam realmente alcançados, deverá ser possível implementarmos os sinais de controle no sistema real. Discutiremos sobre isto na seção seguinte.

## 4.2 Limitações Práticas da Metodologia CMD em Sistemas Presa-Predador

Neste momento, mostraremos que há limitações práticas que dificultam a obtenção de políticas de gerenciamento ambiental para determinados ecossistemas a partir da aplicação do controle por modos deslizantes (CMD), pois nem sempre a medição dos estados pode ser feita a cada instante e nem sempre a ação humana no sistema real consegue corresponder aos sinais de controle resultantes. É importante ressaltarmos que a abordagem CMD tem caráter ilustrativo, visto que outros métodos de controle poderão apresentar estas mesmas limitações.

Para que a ação humana seja levada em consideração, modificamos o modelo (2.16) para obtermos o correspondente modelo presa-predador *não-isolado*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= f_1(\mathbf{x}) + u_1 = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\gamma}\right) - \frac{x_1 x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} + u_1, \\ \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(\mathbf{x}) + u_2 = \frac{\beta \delta x_1 x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2 + u_2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ou, de forma equivalente, usando notação vetorial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u},\tag{4.2}$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$  é o vetor de estado,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]'$  é o vetor de controle representando a ação humana e  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]'$ . Note que, para  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , o sistema (4.1) é equivalente ao sistema isolado (2.16). Considere que os parâmetros possuem os valores mostrados na Figura 2.8.e, onde

$$\begin{aligned}\alpha &= 5, 2, \\ \beta &= 2, 0, \\ \gamma &= 4, 1, \\ \delta &= 2, 5.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Suponha, ainda, que as trajetórias do sistema isolado (2.16) estejam oscilando no ciclo limite estável da Figura 2.8.e, correspondendo à dinâmica natural, e que o estado foi medido como

$$\mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}(0) = [3, 1500 \ 1, 6100]'\tag{4.4}$$

em  $t = 0$ . O problema de controle é forçar o vetor de estado  $\mathbf{x}$  a seguir um determinado vetor de referência  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2]'$ .

Nos trabalhos (Costa et al., 2000; Cunha, 2002; Meza, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002) e (Meza, Costa, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002) são apresentadas estratégias de controle que estabilizam os modelos Lotka-Volterra e Rosenzweig-MacArthur, respectivamente, os quais apresentam órbitas periódicas, em um ponto de coexistência das presas e dos predadores, o que equivale a especificar o vetor de referência  $\mathbf{r}$  como sendo constante. No entanto, em (Meza, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002; Meza, Costa, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002), este ponto de coexistência depende dos parâmetros do sistema e não pode ser selecionado livremente. Em todos esses trabalhos citados, os sinais de controle consistem em extrair as populações ou em mantê-las livre da ação humana.

Na presente pesquisa, o vetor de referência pode ser escolhido de maneira arbitrária, podendo ser uma constante qualquer ou variante no tempo. Porém, considerando a discussão anterior, queremos obter compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado (4.1) e a dinâmica do sistema isolado (2.16). Assim, uma escolha razoável para o vetor de referência  $\mathbf{r}$  seria uma trajetória do modelo (2.16), mas com um conjunto apropriado de valores paramétricos. Ou seja, definiremos o *sistema de referência* por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r_1 &= g_1(\mathbf{r}) \triangleq r_1 \left( 1 - \frac{r_1}{\gamma_r} \right) - \frac{r_1 r_2}{\frac{r_1^2}{\alpha_r} + r_1 + 1}, \\ \frac{d}{dt}r_2 &= g_2(\mathbf{r}) \triangleq \frac{\beta_r \delta_r r_1 r_2}{\frac{r_1^2}{\alpha_r} + r_1 + 1} - \delta_r r_2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

ou, em notação vetorial, como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \tag{4.6}$$

onde  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2]'$  é o *estado de referência* e  $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2]'$ . Note que, como  $g_1$  e  $g_2$  são contínuas em  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , as trajetórias  $r_1$  e  $r_2$  serão de classe  $\mathcal{C}^1$  nesse subconjunto do plano cartesiano. Os *parâmetros de referência* são especificados como os da Figura 2.8.d, onde

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 5, 2, \\ \beta_r &= 2, 0, \\ \gamma_r &= 3, 5, \\ \delta_r &= 2, 5. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como pode ser visto pelo plano de fase, todas as trajetórias no primeiro quadrante conver-

gem para um ciclo limite estável, independentemente da condição inicial. Escolheremos a condição inicial do sistema de referência como sendo

$$\mathbf{r}_0 \triangleq \mathbf{r}(0) = [2, 4443 \ 1, 2001]', \quad (4.8)$$

de modo que as trajetória de referência estejam oscilando no ciclo limite. Com o intuito de simplificar referências futuras, usaremos as seguintes abreviações: *SI* para o sistema isolado (2.16); *SC* para o sistema controlado (4.1); e *SR* para o sistema de referência (4.5). A Figura 4.1 mostra os planos de fase do sistema de referência (SR) e do sistema isolado (SI), enquanto que a Figura 4.2 apresenta suas trajetórias no domínio do tempo normalizado  $t$ . Observe que o ciclo limite de referência tem uma amplitude menor e uma frequência de oscilação maior do que o ciclo limite do sistema isolado. Seus respectivos períodos são  $W_r = 13, 11$  e  $W_i = 26, 46$ , aproximadamente.

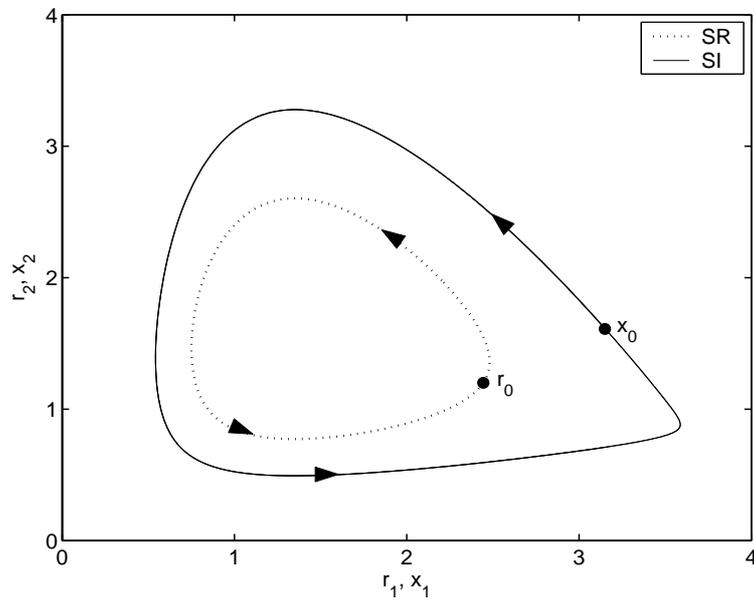


Figura 4.1: Planos de fase de SR e de SI.

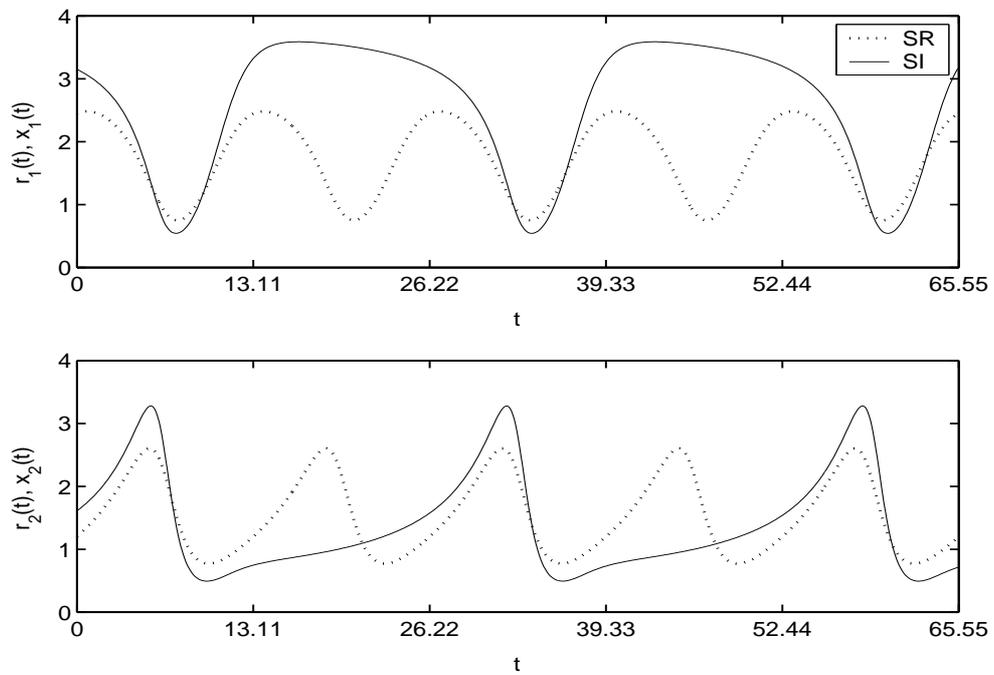


Figura 4.2: Trajetórias de SR e de SI.

Como as trajetórias de referência  $r_1$  e  $r_2$ , a serem seguidas por  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, foram especificadas, estamos prontos para aplicar a metodologia CMD para forçar o vetor de estado  $\mathbf{x}$  de (4.1) a seguir o estado de referência  $\mathbf{r}$  de (4.5), assumindo que (4.1) não possui incertezas paramétricas, isto é,  $f_1$  e  $f_2$  são conhecidas com exatidão. Veja que (4.1) pertence à classe de sistemas não-lineares descrita por (3.2), com  $n_j = 1$ ,  $b_j = \mathbf{1}$  e  $d_j = \mathbf{0}$ , para  $j = 1, 2$ . Observe, também, que  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas em  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ .

A seguir, mostraremos os projetos e os resultados para as leis de controle descontínuas e contínuas. Os erros de seguimento são dados por (3.10) como

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - r_1, \\ e_2 &= x_2 - r_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Definimos o *vetor erro* por

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{r} = [e_1 \ e_2]'. \tag{4.10}$$

Como  $n_1 = n_2 = 1$ , (3.15) nos dá

$$\begin{aligned} s_1(x_1, t) &= x_1 - r_1(t), \\ s_2(x_2, t) &= x_2 - r_2(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

E, como o sistema é completamente conhecido, por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j &= f_j, & F_j &= \mathbf{0}, \\ \widehat{b}_j &= b_j = \mathbf{1}, & \beta_j &= \mathbf{1}, \\ & & D_j &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

em (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente, para  $j = 1, 2$ . Para que a condição global de deslizamento (3.17) seja satisfeita, as leis de controle descontínuas são definidas por

$$\begin{aligned} u_1 &= -f_1(\mathbf{x}) + \dot{r}_1 - \eta_1 \operatorname{sgn}(x_1 - r_1), \\ u_2 &= -f_2(\mathbf{x}) + \dot{r}_2 - \eta_2 \operatorname{sgn}(x_2 - r_2), \end{aligned} \tag{4.13}$$

devido a (3.26)–(3.28) e (4.11)–(4.12)<sup>1</sup>. A partir de (3.18) e (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{t}_{r1} &= \frac{|e_1(0)|}{\eta_1}, \\ \widehat{t}_{r2} &= \frac{|e_2(0)|}{\eta_2}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Conseqüentemente, de (3.18), chegamos às igualdades

$$\begin{aligned}e_1(t) &= 0, \quad \forall t \geq \widehat{t}_{r1}, \\ e_2(t) &= 0, \quad \forall t \geq \widehat{t}_{r2}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Definindo

$$\widehat{t}_r = \max\{\widehat{t}_{r1}, \widehat{t}_{r2}\},\tag{4.16}$$

segue que

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq \widehat{t}_r.\tag{4.17}$$

As leis de controle contínuas são obtidas pela substituição de  $\text{sgn}(x_j - r_j(t))$  por  $\text{sat}((x_j - r_j(t))/\epsilon_j)$  em (4.13), de acordo com (3.38) e (4.11), ou seja,

$$\begin{aligned}u_1 &= -f_1(\mathbf{x}) + \dot{r}_1 - \eta_1 \text{sat}((x_1 - r_1)/\epsilon_1), \\ u_2 &= -f_2(\mathbf{x}) + \dot{r}_2 - \eta_2 \text{sat}((x_2 - r_2)/\epsilon_2).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Como estas leis de controle atendem a condição global de quasi-deslizamento (3.40), obtemos

$$\begin{aligned}|e_1(t)| &\leq \epsilon_1, \quad \forall t \geq \widehat{t}_{r1}, \\ |e_2(t)| &\leq \epsilon_2, \quad \forall t \geq \widehat{t}_{r2},\end{aligned}\tag{4.19}$$

por (3.41), (3.44) e (4.11). Portanto,

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \quad \forall t \geq \widehat{t}_r,\tag{4.20}$$

relembrando que  $\|\cdot\|$  denota a norma do máximo em  $\mathbb{R}^2$ .

---

<sup>1</sup>Na realidade, é simples mostrarmos que  $u_j$  em (4.13) verifica a identidade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_j^2(\mathbf{x}_j, t) = -\eta_j |s_j(\mathbf{x}_j, t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j - S_j(t)},$$

de modo que as desigualdades em (3.18) e (3.20) se transformam em igualdades, para  $j = 1, 2$ . Estes resultados são válidos para o caso em que o sistema (3.2) é completamente conhecido.

Escolhemos  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  e as larguras das camadas de fronteira como  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,001$ . Temos que  $e_1(0) = x_1(0) - r_1(0) = 0,7057$  e  $e_2(0) = x_2(0) - r_2(0) = 0,4099$  de (4.4), (4.8) e (4.9). Assim, (4.14) nos dá  $\hat{t}_{r_2} = 0,4099$  e  $\hat{t}_r = \hat{t}_{r_1} = 0,7057$ . Agora, se as leis de controle descontínuas (4.13) forem aplicadas ao sistema (4.1), é imediato de (4.17) que

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{para todo } t \geq 0,7057. \quad (4.21)$$

E, no caso de usarmos as leis de controle contínuas (4.18), (4.20) nos fornece

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,001, \quad \text{para todo } t \geq 0,7057. \quad (4.22)$$

Nas Figuras 4.3–4.5 são apresentados os planos de fase do sistema de referência (SR) e do sistema controlado (SC), as trajetórias de SR e de SC, e o vetor erro  $\mathbf{e}$ , respectivamente, com a utilização das leis de controle contínuas (4.18). Um detalhe do vetor erro é mostrado na Figura 4.6. Note que (4.22) é de fato atendida. Os sinais de controle contínuos  $u_1$  e  $u_2$  são exibidos na Figura 4.7. Contudo, o plano de fase e as trajetórias resultantes das leis de controle descontínuas (4.13) não são mostrados, já que, visualmente, estas curvas parecem idênticas às obtidas pelas leis de controle contínuas nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente. Além disso, apesar de omitirmos uma apresentação detalhada para o vetor erro  $\mathbf{e}$ , (4.21) também é verificada. Os sinais de controle descontínuos  $u_1$  e  $u_2$  são exibidos na Figura 4.8. Todas as curvas mostradas foram obtidas no MATLAB usando o método de integração Dormand-Prince com passo fixo de 0,001.

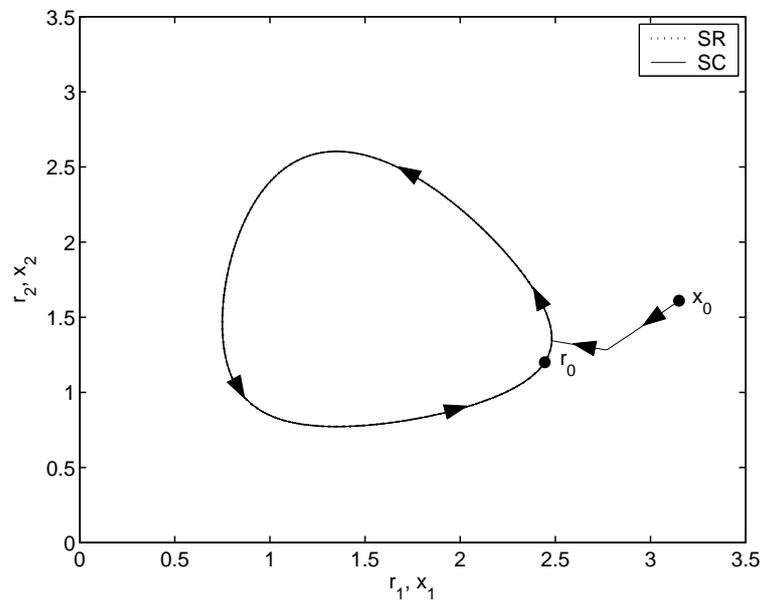


Figura 4.3: Planos de fase de SR e de SC usando CMD com leis de controle contínuas.

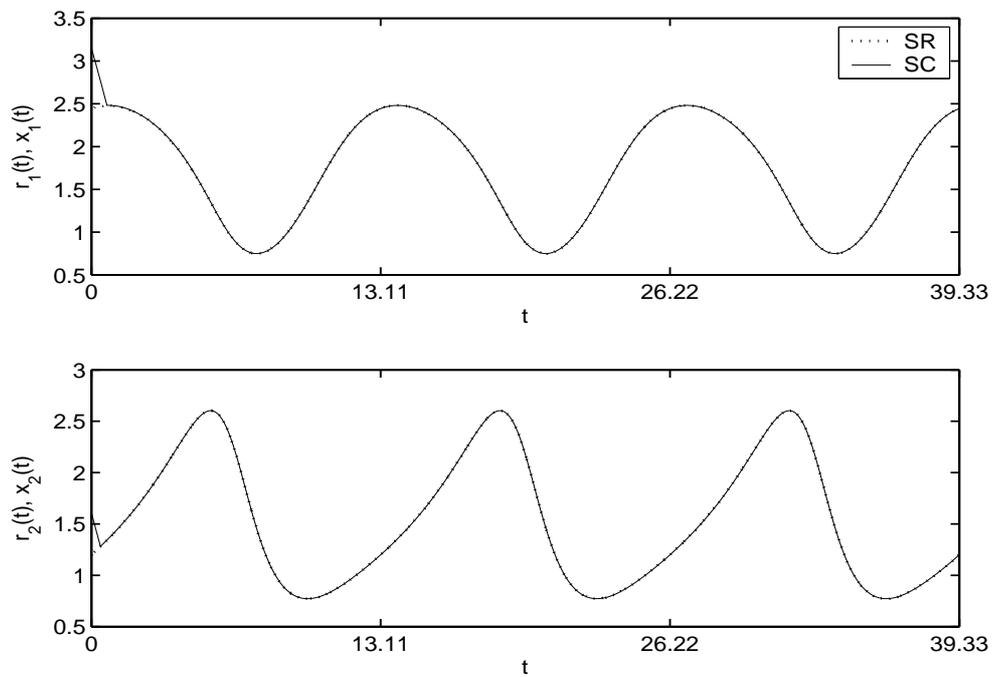


Figura 4.4: Trajetórias de SR e de SC usando CMD com leis de controle contínuas.

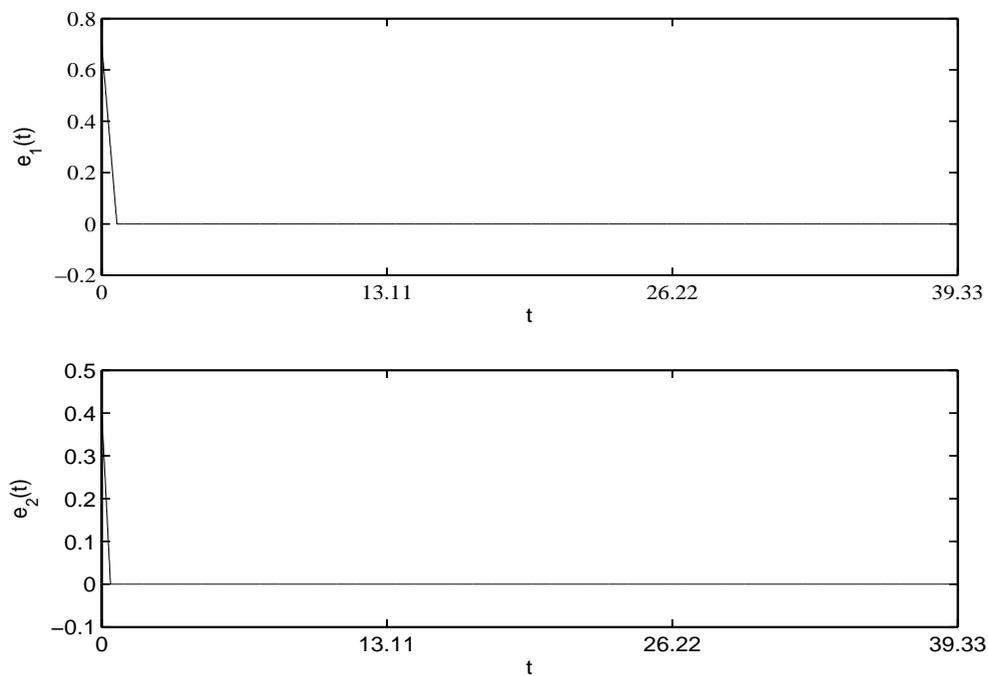


Figura 4.5: Vetor erro usando CMD com leis de controle contínuas.

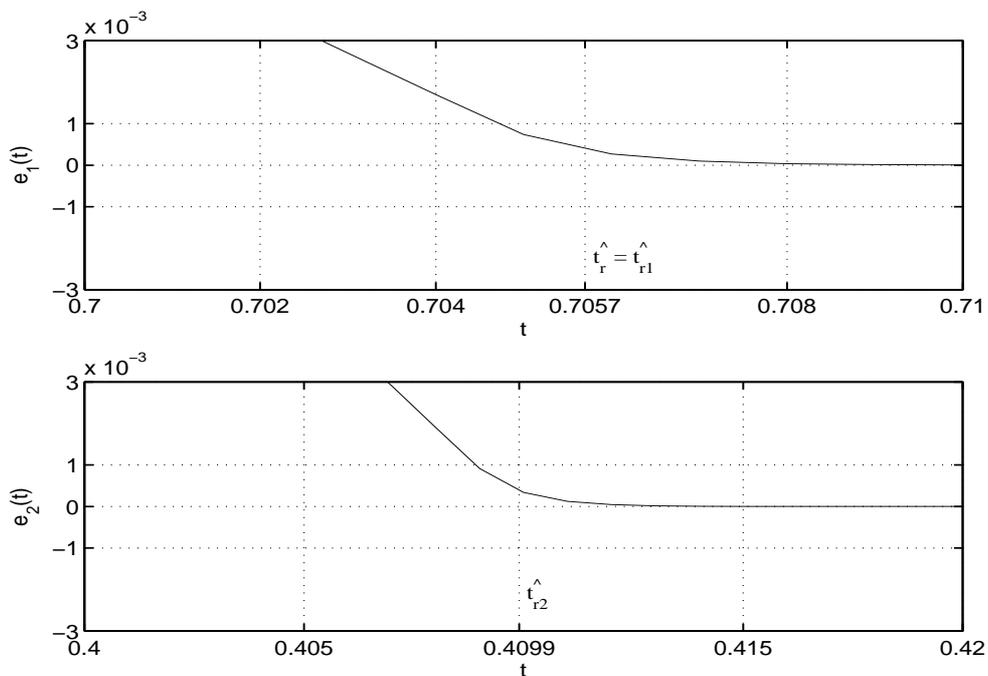


Figura 4.6: Detalhe do vetor erro usando CMD com leis de controle contínuas.

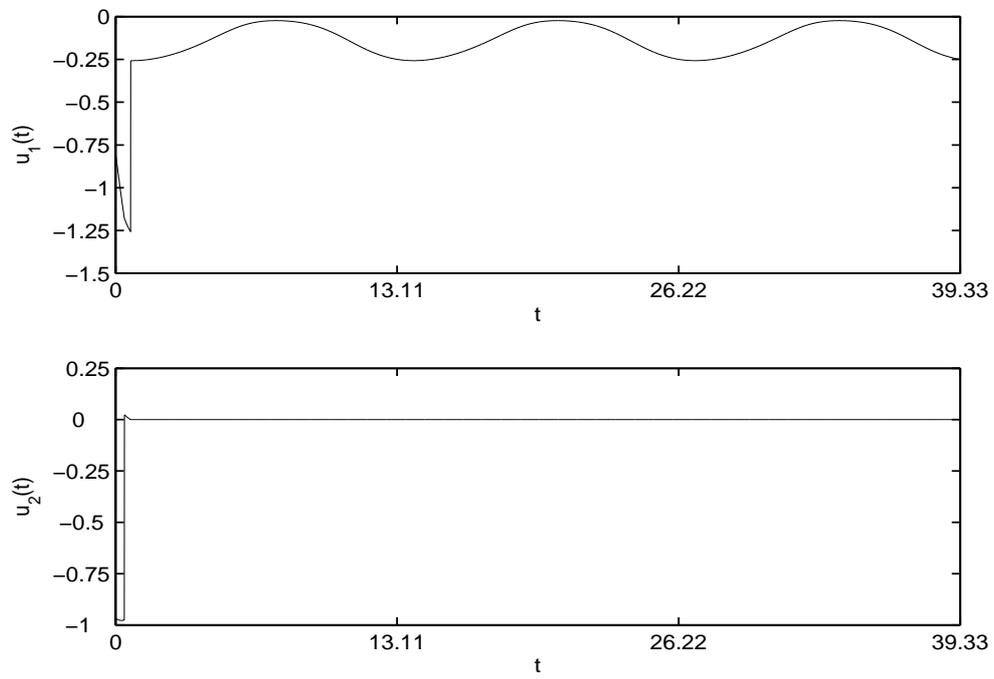


Figura 4.7: CMD – Sinais de controle contínuos.

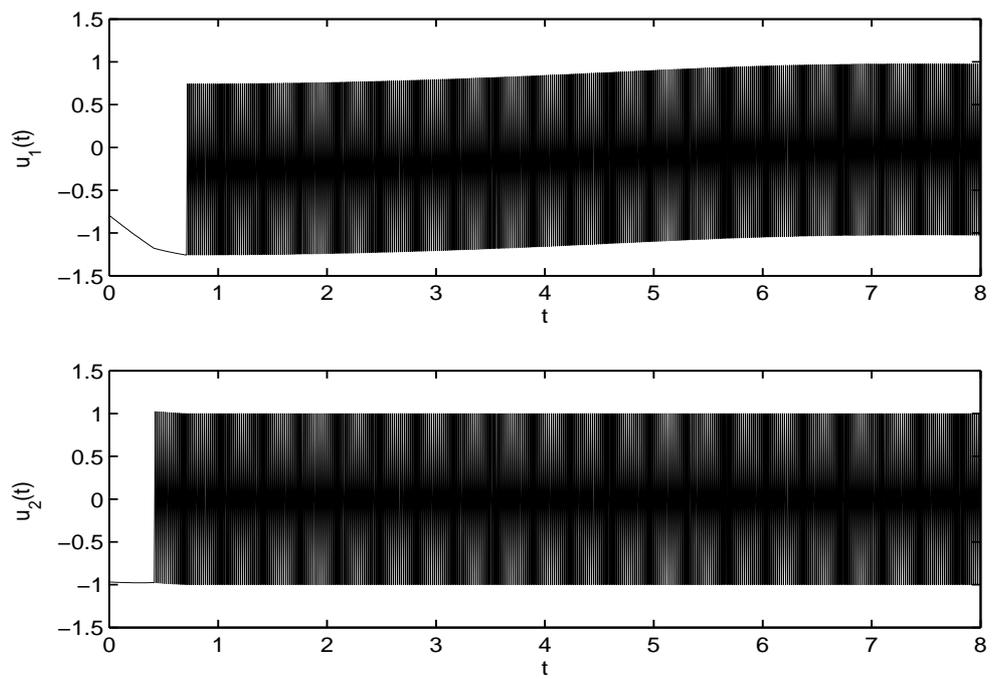


Figura 4.8: CMD – Sinais de controle descontínuos.

Apesar de o estado  $\mathbf{x}$  seguir  $\mathbf{r}$  com a exatidão prevista, a implementação desses sinais de controle no sistema presa-predador real se depara com dois grandes problemas. O primeiro é que leis de controle com realimentação de estado, como as que acabamos de obter, exigem que as duas populações do sistema (4.1) sejam medidas a cada instante de tempo. Porém, nem sempre é possível realizarmos tais medições em inúmeras interações do tipo presa-predador encontradas na natureza. Citamos, como exemplo, o relacionamento entre peixes (presas) e tubarões (predadores). É muito difícil monitorarmos as variações nos tamanhos destas populações no decorrer do tempo. O segundo problema é que os sinais de controle devem modelar a ação humana no ecossistema. Observe que, em (4.1), os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  representam as taxas instantâneas de variação (em relação a  $t$ ) de  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, que devem ser aplicadas no ecossistema pela ação humana. Por exemplo, se em  $t_1$  a entrada  $u_1(t_1)$  é negativa, a ação humana tem que extrair as presas de seu habitat no instante  $t_1$  com taxa  $|u_1(t_1)|$ , e introduzir novos indivíduos com taxa  $u_1(t_1)$  se for de valor positivo. Vemos pela Figura 4.8 que os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  resultantes da leis de controle descontínuas (4.13) possuem uma componente de alta freqüência. É evidente que a ação humana não poderá implementar tais sinais em diversos ecossistemas, como no caso da atividade pesqueira. Os sinais de controle correspondentes às leis de controle contínuas (4.18), conforme apresentados na Figura 4.7, evitam a componente de alta freqüência, mas eles também possuem elevadas taxas de variação de sinal. Além disso, o sinal de controle contínuo  $u_1$  assume um valor diferente a cada instante de tempo. Novamente, podemos argumentar que a ação humana não tem como responder dessa maneira em vários ecossistemas observados na natureza.

Os sistemas de controle propostos por Corso et al. (2002) para o modelo Leslie-Gower, por Cunha (2002) para o modelo Lotka-Volterra, e por Costa et al. (2000) para ambos, utilizam leis de controle comutadas sobre superfícies de deslizamento para a estabilização dos modelos em um ponto de coexistência das espécies; mas, durante um modo deslizante, a comutação na lei de controle poderá ocorrer com freqüências muito elevadas podendo, assim, não modelar a ação humana em muitos casos. Salientamos, ainda, que em todas as referências citadas neste seção, é exigida a medição das populações a cada instante de tempo, o que nem sempre é possível, e os sinais de controle consistem em extrair as populações ou em mantê-las livre da ação humana.

Portanto, para que os sinais de controle resultantes de determinada metodologia definam políticas de gerenciamento capazes de serem implementadas por órgãos ambientais, os mesmos deverão modelar a ação humana sobre o sistema presa-predador e serem determinados a partir de medições realizáveis das populações. Como acabamos de ver, o

método CMD não atendeu a estes requisitos.

Com o intuito de adequar a ação humana aos sinais de controle, sugerimos, neste trabalho, uma estratégia de controle que determine sinais de controle constante por partes a partir de medições periódicas das populações, sem a necessidade de medi-las a cada instante de tempo.

Para justificarmos a importância de obtermos tais tipos de sinais de controle, apresentaremos um caso ilustrativo. Considere o sinal de controle constante por partes hipotético  $u_1: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  mostrado na Figura 4.9 para o sistema (4.1), determinado pela medição periódica das populações de presas e de predadores. Este sinal é uma função escada em relação à partição  $P = (0, 2, 4, 6)$  do intervalo  $[0, 6]^2$ . Observe que, para implementar este sinal de controle no sistema real, a ação humana deve: (i) extrair as presas com taxa 2 no intervalo  $[0, 2)$ , isto é, 2 unidades normalizadas de presas têm que ser extraídas por unidade de tempo normalizado  $t$ ; (ii) introduzir novos indivíduos presas com taxa 1,5 no intervalo  $[2, 4)$ ; e (iii) manter as presas livres de interferência humana no intervalo  $[4, 6]$ . Usando uma terminologia usual de Ecologia, podemos reescrever (i) dizendo que a *cota de extração constante*<sup>3</sup> para as presas é igual a 2 no intervalo  $[0, 2)$ .

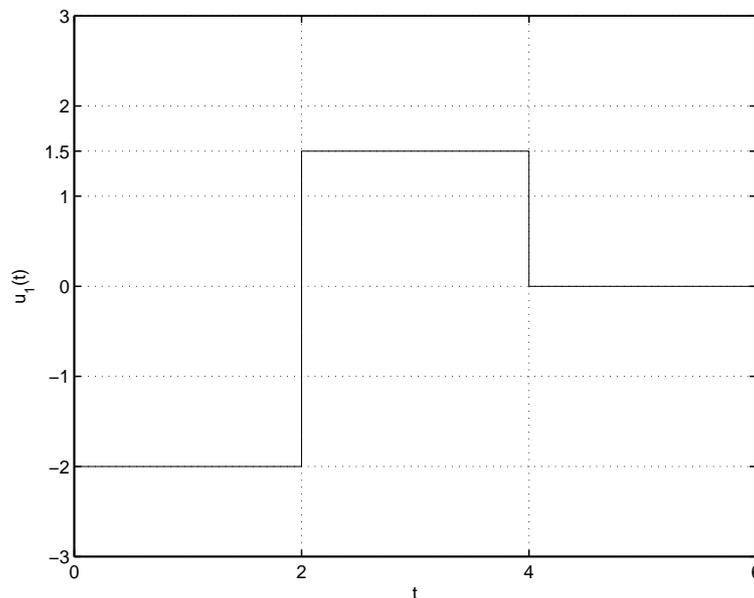


Figura 4.9: Exemplo de um sinal de controle constante por partes.

<sup>2</sup>Veja as Definições A.3 e A.4.

<sup>3</sup>O termo em inglês é *constant harvest quota*.

Consoante afirmado em (Azar et al., 1995; May e Beddington, 1980), uma cota de extração constante é um modelo idealizado de políticas de gerenciamento adotadas por órgãos ambientais. Desse modo, o sinal de controle constante por partes da Figura 4.9 representa uma política de gerenciamento ambiental factível, precisa e adequada (idealmente, é claro).

Pelos argumentos expostos nesta seção, concluímos que os métodos escolhidos para controlar o sistema presa-predador não-isolado (4.1) deverão determinar sinais de controle que modelem a ação humana como, por exemplo, sinais constantes por partes, para que a implementação dos mesmos seja possível no sistema real. Além disso, como há inúmeras situações em que não é possível medir as populações do sistema a cada instante de tempo, muitas metodologias de controle nem sempre serão aplicáveis. Estas limitações ficaram evidentes na aplicação direta da abordagem CMD, onde os sinais de controle não permitiram definir políticas de gerenciamento ambiental.

No capítulo subsequente, formularemos um esquema de controle para o problema de seguimento do sistema presa-predador não-isolado (4.1) ou, de forma equivalente, do sistema (4.2). Esta estratégia determinará sinais de controle constantes por partes a partir da medição periódica das populações de presas e de predadores, sem a necessidade de medi-las a cada instante de tempo. Isto permitirá definir políticas de gerenciamento capazes de serem implementadas por órgãos ambientais. Para adequar estratégia de controle proposta às restrições acima apontadas, algumas hipóteses sobre o sistema (4.2) terão que ser feitas.

# Capítulo 5

## Uma Estratégia de Controle para Sistemas Presa-Predador

Neste capítulo, descreveremos a estratégia de controle proposta para o problema de seguimento do sistema presa-predador não-isolado (4.2), que consiste em determinar sinais de controle constantes por partes a partir de medições periódicas das populações de presas e de predadores. Estes sinais definirão políticas de gerenciamento ambiental factíveis, precisas e adequadas, que possam ser implementadas por órgãos ambientais. Apesar de as trajetórias de referência poderem ser escolhidas de maneira arbitrária, as mesmas serão especificadas como trajetórias do sistema de referência (4.6) com um conjunto apropriado de valores paramétricos, de modo que a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado sejam compatíveis. A idéia fundamental da metodologia é a aproximação de sinais contínuos conhecidos *a priori*, que atendam as especificações de desempenho desejadas, por sinais constantes por partes. Neste trabalho, estes sinais contínuos serão obtidos *off-line* com base na abordagem CMD. No entanto, para podermos aplicar a estratégia de controle proposta, o sistema (4.2) deverá atender às seguintes hipóteses:

( $A_1$ ) O modelo do sistema presa-predador isolado (2.13) é completamente conhecido, isto é, os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $i$ ,  $K$ ,  $m$  e  $r$  foram determinados e não variam com o tempo (conseqüentemente, o mesmo é válido para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  em (4.1));

( $A_2$ ) O vetor de estado  $\mathbf{x}$  do sistema (4.2) é medido com período  $\Delta$ . Em outras palavras, no primeiro período de medição  $[0, \Delta)$ , o estado  $\mathbf{x}$  é medido somente no instante  $t = 0$ , não sendo, desse modo, medido no intervalo  $(0, \Delta)$ . Portanto, para

controlarmos o sistema no intervalo  $[0, \Delta]$ , o sinal de controle deverá ser determinado pela medição apenas do estado  $\mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}(0)$ .

Sob estas hipóteses, o problema de controle é forçar o estado  $\mathbf{x}$  de (4.2) a seguir um determinado vetor de referência  $\mathbf{r}$  no intervalo  $[0, \Delta]$  com uma precisão que satisfaça as especificações de desempenho desejadas, sem que tenhamos que fazer nenhuma outra medição adicional do vetor de estado além de  $\mathbf{x}_0$ , e tendo como entradas sinais constantes por partes, ao invés de sinais contínuos, como os apresentados na Figura 4.7, ou de sinais descontínuos, como os mostrados na Figura 4.8.

O desenvolvimento do esquema de controle proposto será feito na seção seguinte, recordando que a idéia fundamental do método é a aproximação de sinais de controle contínuos por sinais constantes por partes. Veremos que o problema de seguimento anunciado acima pode ser facilmente estendido para o intervalo  $[0, n\Delta]$ , onde  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Na Seção 5.2, constataremos por simulação a validade do método.

## 5.1 Aproximação de Sinais de Controle Contínuos por Sinais Constantes por Partes

O sistema a ser controlado é o modelo presa-predador não-isolado (4.2)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \quad (5.1)$$

e o problema de controle é forçar o vetor de estado  $\mathbf{x}$  a seguir um determinado vetor de referência  $\mathbf{r}$  no intervalo  $I = [0, \Delta]$  com uma precisão que satisfaça as especificações de desempenho desejadas, mas sem nenhuma medição adicional do estado além de  $\mathbf{x}_0$ , e tendo como entrada um sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Devido às discussões anteriores, consideraremos, neste trabalho,  $\mathbf{r}$  como sendo o vetor de estado do sistema de referência (4.6)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad (5.2)$$

com uma dada condição inicial  $\mathbf{r}_0 \triangleq \mathbf{r}(0)$  e um determinado conjunto de valores paramétricos  $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$  e  $\delta_r$ .

Considere a partição

$$P = (0, \lambda, 2\lambda, \dots, p\lambda) \quad (5.3)$$

do intervalo  $I = [0, \Delta]$ , onde

$$\lambda = \frac{\Delta}{p}, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \quad (5.4)$$

O vetor de controle  $\mathbf{u}$  é definido como uma aplicação escada em relação à partição  $P$ , de acordo com (A.5), ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_k &= [u_{k,1} \ u_{k,2}]', & \text{para } t \in I_k = [k\lambda, (k+1)\lambda), \quad k = 0, \dots, p-2, \\ \mathbf{u}_{p-1} &= [u_{p-1,1} \ u_{p-1,2}]', & \text{para } t \in I_{p-1} = [(p-1)\lambda, \Delta], \end{cases} \quad (5.5)$$

onde os vetores constantes  $\mathbf{u}_k$  deverão ainda ser especificados, para  $k = 0, \dots, p-1$ . Note que (5.5) é claramente um sinal constante por partes.

Vamos mostrar, agora, como encontrar uma estratégia de controle que atenda a hipótese  $(A_2)$ . Considere o sistema

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{u}}, \quad (5.6)$$

com  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ . O vetor  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é qualquer sinal contínuo no intervalo  $I$ , conhecido em  $t = 0$ , que garanta que o vetor de estado  $\tilde{\mathbf{x}}$  siga o estado de referência  $\mathbf{r}$  no intervalo  $I$  dentro das especificações de desempenho (4.14), (4.16) e (4.19)–(4.20),

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \quad \text{para } t \in [\hat{t}_r, \Delta], \quad (5.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{t}_r &= \max\{\hat{t}_{r1}, \hat{t}_{r2}\}, \\ \hat{t}_{r1} &= \frac{|\tilde{x}_1(0) - r_1(0)|}{\eta_1}, \\ \hat{t}_{r2} &= \frac{|\tilde{x}_2(0) - r_2(0)|}{\eta_2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

para  $\eta_1$  e  $\eta_2$  fixos. Neste trabalho, estabeleceremos que  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2]'$  seja definido por (4.18) e (5.2), a saber

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -f_1(\tilde{\mathbf{x}}) + \dot{r}_1 - \eta_1 \text{sat}((\tilde{x}_1 - r_1)/\epsilon_1), \\ \tilde{u}_2 &= -f_2(\tilde{\mathbf{x}}) + \dot{r}_2 - \eta_2 \text{sat}((\tilde{x}_2 - r_2)/\epsilon_2), \end{aligned} \quad (5.9)$$

para certa escolha de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , onde o *a priori* sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é obtido numericamente do sistema de equações diferenciais (5.2), (5.6) e (5.9) com condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ . Recordamos que (5.9) foi determinada com base nas leis de controle

contínuas da abordagem CMD. A Figura 5.1 mostra o diagrama de blocos para a obtenção do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$ , onde o bloco CMD representa (5.9).

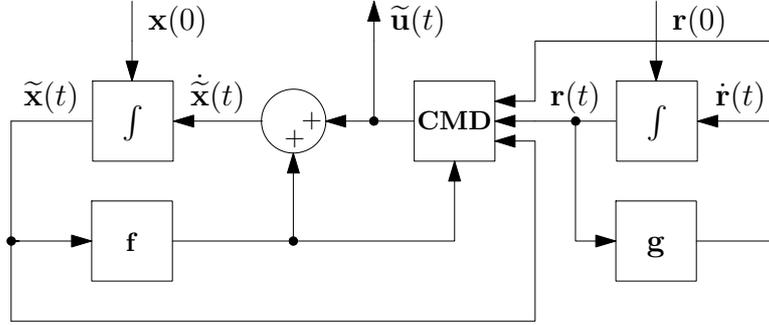


Figura 5.1: Diagrama de blocos para a obtenção do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$  pela metodologia CMD.

Como  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ , observamos que, se pudéssemos aplicar o sinal  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$  em (5.1), então, sob a hipótese de que o sistema (5.1) não é perturbado, é evidente que  $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$  para todo  $t \in I$ , e o problema de controle estaria completamente resolvido com uma única medição do estado  $\mathbf{x}$  em  $t = 0$ , tendo em vista que (5.1) é completamente conhecido pela hipótese  $(A_1)$  e que  $\tilde{\mathbf{u}}$  atende (5.7)–(5.8). Porém,  $\tilde{\mathbf{u}}$  não é um sinal constante por partes e, assim, nos deparamos com as dificuldades na implementação prática de  $\mathbf{u}$  como uma política de gerenciamento ambiental mencionadas na Seção 4.2.

De acordo com a estratégia de controle proposta para o problema de seguimento de (5.1), a determinação dos vetores constantes  $\mathbf{u}_k$ , para  $k = 0, \dots, p - 1$ , consiste em aproximar o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por uma aplicação escada  $\mathbf{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  em relação à partição  $P$  do intervalo  $I$ . Veja que, em (5.5),  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  para  $t \in I_k$ . Portanto, somente o valor  $\mathbf{u}(k\lambda)$  em  $t = k\lambda$  é exigido para que  $\mathbf{u}$  fique completamente determinado no intervalo  $I_k$ , para  $k = 0, \dots, p - 1$ . Como iremos mostrar, para obtermos  $\mathbf{u}(k\lambda)$  precisamos: (i) do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}|_{[k\lambda, (k+1)\lambda]}: [k\lambda, (k+1)\lambda] \rightarrow \mathbb{R}^2$  do sistema (5.6), onde  $\tilde{\mathbf{u}}|_{[k\lambda, (k+1)\lambda]}$  denota a restrição<sup>1</sup> de  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ao intervalo  $[k\lambda, (k+1)\lambda]$ ; e (ii) de uma estimativa  $\hat{\mathbf{x}}(k\lambda)$  do estado  $\mathbf{x}(k\lambda)$ . Mas, antes de prosseguirmos na determinação dos vetores  $\mathbf{u}_k$ , uma última hipótese é feita sobre o sistema (5.1):

$(A_3)$  A dinâmica do sistema (5.1) é suficientemente lenta, de modo que poderemos desprezar o tempo computacional  $\tau$  exigido para o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ser

<sup>1</sup>Veja a Definição A.1.

obtido *off-line* do sistema de equações diferenciais (5.2), (5.6) e (5.9) com condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ , através de determinado método numérico. Em outras palavras, assumimos que  $\|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(0)\| \cong \mathbf{0}$ .

Os vetores  $\mathbf{u}_k = [u_{k,1} \ u_{k,2}]'$  serão escolhidos de modo que, a grosso modo,  $\mathbf{u}|I_k$  seja uma “boa” aproximação de  $\tilde{\mathbf{u}}|I_k$ , para  $k = 0, \dots, p-1$ . Formalmente, isto significa obter  $u_{k,j}^* \in \mathbb{R}$  que minimize a função custo  $J_{k,j}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$J_{k,j}(u_{k,j}) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda - \varepsilon} (u_{k,j} - \tilde{u}_j(t))^2 dt = \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} (u_{k,j} - \tilde{u}_j(t))^2 dt, \quad (5.10)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . É simples verificar que  $J_{k,j}$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ . De acordo com (Luenberger, 1973), se as seguintes condições forem satisfeitas para um dado  $u_{k,j}^* \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $\frac{d}{du_{k,j}} J_{k,j}(u_{k,j}^*) = 0$ ;
- (ii)  $\frac{d^2}{du_{k,j}^2} J_{k,j}(u_{k,j}^*) > 0$ , para todo  $u_{k,j} \in \mathbb{R}$ ;

então  $u_{k,j}^*$  é o ponto de mínimo global estrito de  $J_{k,j}$  sobre  $\mathbb{R}$ , pois  $\mathbb{R}$  é um conjunto aberto convexo. A partir da condição (i) e da Regra de Leibniz<sup>2</sup>, temos que

$$\frac{d}{du_{k,j}} J_{k,j}(u_{k,j}^*) = \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \frac{d}{du_{k,j}} (u_{k,j} - \tilde{u}_j(t))^2 \Big|_{u_{k,j}=u_{k,j}^*} dt = 0 \quad (5.11)$$

implica em

$$u_{k,j}^* = \frac{1}{\lambda} \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \tilde{u}_j(t) dt. \quad (5.12)$$

Além disto, é imediato mostrar que

$$\frac{d^2}{du_{k,j}^2} J_{k,j}(u_{k,j}^*) = 2\lambda > 0. \quad (5.13)$$

Portanto, concluímos que (5.12) não é somente uma “boa” aproximação de  $\tilde{u}_j|I_k$ , mas a “melhor” possível por uma constante, em relação à função custo (5.10). Note que (5.12) nada mais é do que o valor médio de  $\tilde{u}_j|I_k$ , concordando com nossa noção intuitiva. Desse

<sup>2</sup>A Regra de Leibniz pode ser vista em (Lima, 1981), por exemplo.

modo, definiremos as componentes  $u_{k,j}$  em (5.5) como

$$u_{k,j} \triangleq u_{k,j}^* = \frac{1}{\lambda} \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \tilde{u}_j(t) dt, \quad (5.14)$$

para  $k = 0, \dots, p - 1, j = 1, 2$ . As Figuras 5.2 e 5.3 mostram o diagrama de blocos para a implementação do sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}$  que acabamos de definir. O bloco SCP\* (Sinal Constante por Partes com  $u_{k,j} = u_{k,j}^*$ ) representa (5.5) e (5.14), e ZOH (Zero-Order Hold) é um sustentador de ordem zero.

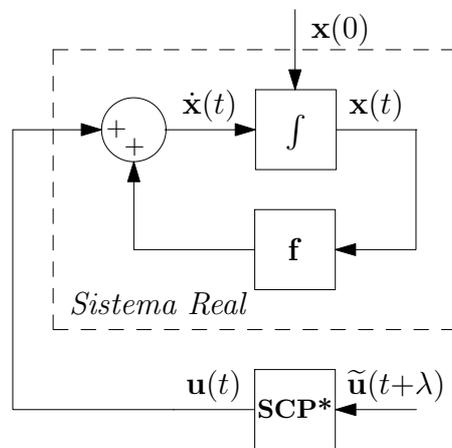


Figura 5.2: Diagrama de blocos para a implementação do sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}$ , com  $u_{k,j} = u_{k,j}^*$ .

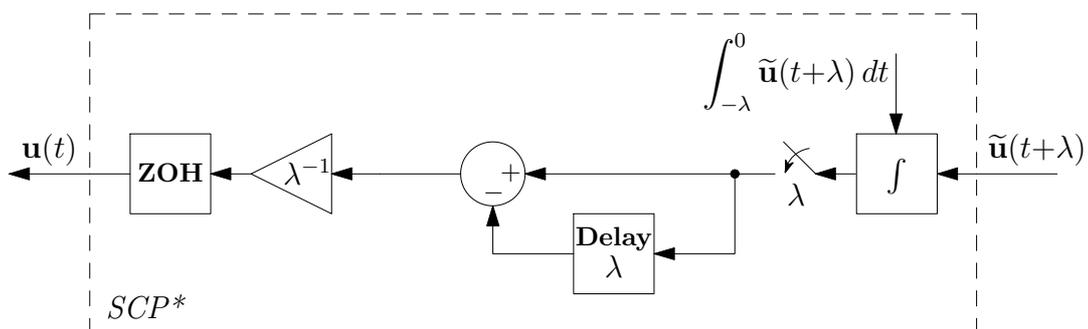


Figura 5.3: Bloco SCP\*.

Vamos introduzir, agora, um *estimador de estado em malha-aberta* para o sistema

(5.1), dado por

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}, \quad (5.15)$$

com  $\widehat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) = \widetilde{\mathbf{x}}(0)$ . Assim, desde que o sistema (5.1) não seja submetido a perturbações, teremos que  $\widehat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$  para todo  $t \in I$ . Se este for o caso, qualquer investigação feita sobre o estado  $\mathbf{x}$  pode ser feita, alternativamente, sobre o estado  $\widehat{\mathbf{x}}$ . Compararemos, neste momento, a trajetória do estado  $\widehat{\mathbf{x}}$ , que tem como entrada o sinal constante por partes  $\mathbf{u}$  definido por (5.5) e (5.14), com a trajetória do estado  $\widetilde{\mathbf{x}}$ , que tem como entrada o sinal contínuo  $\widetilde{\mathbf{u}}$ .

O *desvio de estado* é definido por

$$\Theta = \widehat{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}. \quad (5.16)$$

Em termos de suas componentes,  $\Theta = [\theta_1 \ \theta_2]'$  com

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \widehat{x}_1 - \widetilde{x}_1, \\ \theta_2 &= \widehat{x}_2 - \widetilde{x}_2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

De acordo com as equações integrais de (5.6) e (5.15), sabemos que

$$\widehat{\mathbf{x}}((k+1)\lambda) = \widehat{\mathbf{x}}(k\lambda) + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) dt + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \mathbf{u}(t) dt \quad (5.18)$$

e

$$\widetilde{\mathbf{x}}((k+1)\lambda) = \widetilde{\mathbf{x}}(k\lambda) + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t)) dt + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \widetilde{\mathbf{u}}(t) dt, \quad (5.19)$$

respectivamente, em  $t = (k+1)\lambda$ , para  $k = 0, \dots, p-1$ . Portanto, em  $t = (k+1)\lambda$ , temos que (5.16) e (5.18)–(5.19) nos dão

$$\begin{aligned} \Theta((k+1)\lambda) &= \Theta(k\lambda) + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} (\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t))) dt \\ &\quad + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \mathbf{u}(t) dt - \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \widetilde{\mathbf{u}}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mas, a seguinte relação

$$\int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \mathbf{u}(t) dt - \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \widetilde{\mathbf{u}}(t) dt = 0 \quad (5.21)$$

é imediata de (5.5) e (5.14). Assim, (5.20) é reduzida à equação

$$\Theta((k+1)\lambda) = \Theta(k\lambda) + \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} (\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t))) dt, \quad (5.22)$$

ou, posto de outra maneira,

$$\Theta((k+1)\lambda) = \Theta(0) + \sum_{L=0}^k w_L, \quad (5.23)$$

onde

$$w_L = \int_{L\lambda}^{(L+1)\lambda} (\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t))) dt. \quad (5.24)$$

Como  $\Theta(0) = \widehat{\mathbf{x}}(0) - \widetilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ , temos que

$$\Theta((k+1)\lambda) = \sum_{L=0}^k w_L. \quad (5.25)$$

Constatamos, desse modo, um efeito acumulativo dos  $w_L$  em  $\Theta((k+1)\lambda)$ . Com o intuito de inibir tal propagação, propomos redefinir  $u_{k,j}$  em (5.14) por

$$u_{k,j} \triangleq u_{k,j}^* - \frac{1}{\lambda} \theta_j(k\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \widetilde{u}_j(t) dt - \frac{1}{\lambda} (\widehat{x}_j(k\lambda) - \widetilde{x}_j(k\lambda)) \quad (5.26)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . Note que  $u_{0,j} = u_{0,j}^*$ , pois  $\theta_j(0) = 0$ , para  $j = 1, 2$ .

Com esta nova estratégia de controle, (5.20) é simplificada em

$$\Theta((k+1)\lambda) = \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} (\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t))) dt = w_k, \quad (5.27)$$

e, agora, o desvio de estado  $\Theta((k+1)\lambda)$  em  $t = (k+1)\lambda$  não depende mais dos valores anteriores de  $w_L$ , para  $L = 0, \dots, k-1$ . Além do mais, temos a estimativa

$$\|\Theta((k+1)\lambda)\| \leq \lambda \sup_{t \in [k\lambda, (k+1)\lambda]} \|\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}(t))\|, \quad (5.28)$$

sendo uma consequência direta do Teorema A.1. Todavia, salientamos que o lado direito de (5.28) não é diretamente proporcional à  $\lambda$ , pois a trajetória  $\widehat{\mathbf{x}}$  do sistema (5.15) no intervalo  $[k\lambda, (k+1)\lambda]$  é determinada pelo sinal  $\mathbf{u}[k\lambda, (k+1)\lambda]$ , o qual depende de  $\lambda$  através de (5.5) e (5.26).

Para o sistema presa-predador não-isolado (5.1), verificamos por simulação que, para uma escolha suficientemente grande de  $p$  em (5.4),

$$\Phi \triangleq \sup_{t \in I} \|\Theta(t)\| = \sup_{t \in I} \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| \quad (5.29)$$

é menor que um valor aceitável de acordo com os interesses práticos. Em outras palavras, detectamos que  $p$  pode ser especificado de modo que o vetor de estado estimado  $\hat{\mathbf{x}}$  de (5.15), quando comparado com o vetor de estado  $\tilde{\mathbf{x}}$  de (5.6), nos dá um resultado satisfatório. Além disso, constatamos também que, para  $p$  suficientemente grande,

$$\Psi \triangleq \sup_{t \in I} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\| \quad (5.30)$$

é menor que um valor aceitável, ou seja, podemos aproximar  $\tilde{\mathbf{u}}$  por  $\mathbf{u}$  no intervalo  $I$  de maneira satisfatória. Isto será visto em detalhe na Seção 5.2.

Em resumo, a estratégia de controle consiste em determinar um sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  através de (5.5) e (5.26), baseado no sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  em (5.9), conhecido em  $t = 0$ , que faz com que o estado  $\tilde{\mathbf{x}}$  de (5.6) siga o estado de referência  $\mathbf{r}$  de (5.2) no intervalo  $I$  dentro das especificações de desempenho (5.7)–(5.8). Relembramos que, nesta pesquisa, o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$  é obtido numericamente do sistema de equações diferenciais (5.2), (5.6) e (5.9) com condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ , e que a metodologia CMD foi aplicada para definir (5.9).

A estratégia de controle proposta é ilustrada nos diagramas de blocos das Figuras 5.4 e 5.5. O bloco SCP (Sinal Constante por Partes proposto) representa (5.5) e (5.26). Enfatizamos que o vetor de estado  $\mathbf{x}$  de (5.1) é de fato medido somente em  $t = 0$ . Ademais, julgamos necessário fazermos algumas considerações sobre essa metodologia. Primeiramente, a propriedade de robustez do CMD apresentada no Capítulo 3 não pode ser alcançada, pois o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é calculado numericamente do sistema de equações diferenciais (5.2), (5.6) e (5.9). É por esta razão que temos que assumir pela hipótese ( $A_1$ ) que o modelo do sistema (5.1) seja completamente conhecido. Além disso, o sistema controlado (5.1), (5.5) e (5.26) está em malha aberta no intervalo  $(0, \Delta]$  e, portanto, o sinal de controle  $\mathbf{u}$  é obviamente incapaz de rejeitar perturbações que afetem o vetor de estado  $\mathbf{x}$  neste intervalo como, por exemplo: incêndios florestais; tempestades; enchentes; pragas; e o impacto no meio ambiente decorrente de atividades clandestinas, como desmatamentos e tráficos de animais. Ademais, a hipótese ( $A_3$ ) é de fato verificada em muitas interações do tipo presa-predador encontradas na natureza. Como exemplo,

suponha que as trajetórias do sistema (4.2) com parâmetros (4.7) estejam oscilando no ciclo limite estável da Figura 2.8.e. Se o período de oscilação for da ordem de anos ou meses, é evidente que o tempo computacional  $\tau$  exigido para obter o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$  no intervalo  $[0, \Delta]$  poderá ser desprezado se for da ordem de dias ou horas. Justificamos, ainda, a preferência pela metodologia CMD na obtenção do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$ , pelos seguintes argumentos: (i) o CMD garante que o vetor de estado  $\tilde{\mathbf{x}}$  de (5.6) siga o estado de referência  $\mathbf{r}$  de (5.2) independentemente da condição inicial  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ , ou seja, o sistema é globalmente assintoticamente estável; (ii) a definição de  $\tilde{\mathbf{u}}$  por (5.9) assegura que o sistema (5.6) atenda a especificação de desempenho (5.7)–(5.8) para qualquer escolha do vetor de referência  $\mathbf{r}$ ; e (iii) como o CMD é um esquema de controle geral para sistemas não-lineares, a abordagem aqui apresentada pode ser aplicada a outros modelos de sistemas presa-predador diferentes de (4.1). Por fim, explicaremos o motivo de termos definido  $\tilde{u}_j$  em (5.9) pelas leis de controle contínuas (4.18) da metodologia CMD e não pelas leis de controle descontínuas (4.13). De acordo com a definição (5.26), é preciso integrar o sinal  $\tilde{u}_j|_{[k\lambda, (k+1)\lambda]}$  no intervalo  $[k\lambda, (k+1)\lambda]$ . Se as leis de controle descontínuas fossem adotadas, não teríamos garantia de que o sinal descontínuo resultante  $\tilde{u}_j|_{[k\lambda, (k+1)\lambda]}$  fosse Riemann-integrável no intervalo  $[k\lambda, (k+1)\lambda]$ . No entanto, a existência da integral de Riemann é sempre assegurada para os sinais contínuos.

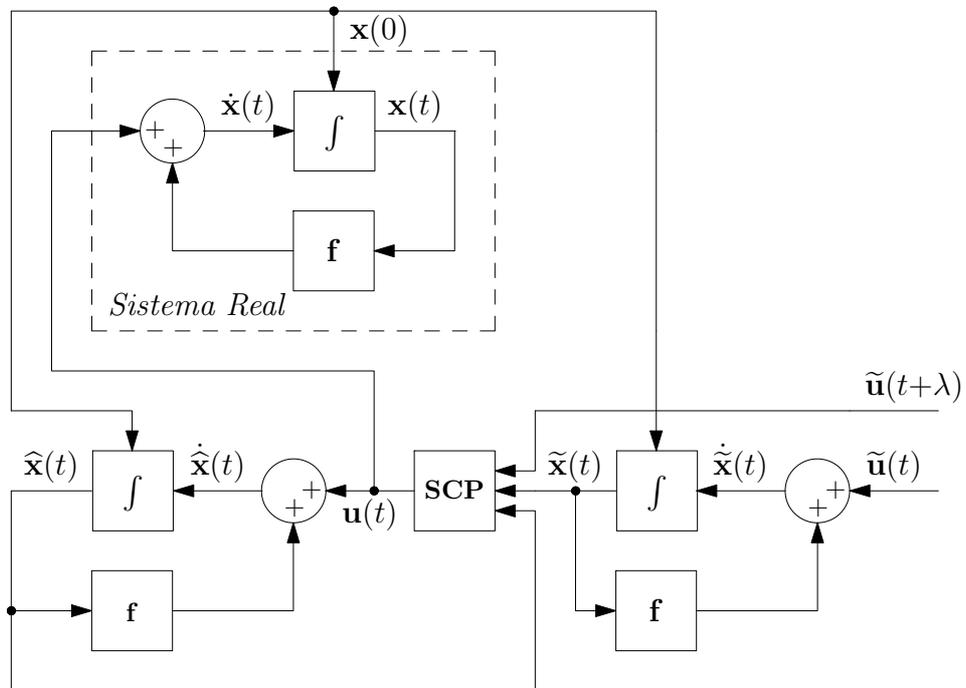


Figura 5.4: Diagrama de blocos da estratégia de controle proposta.

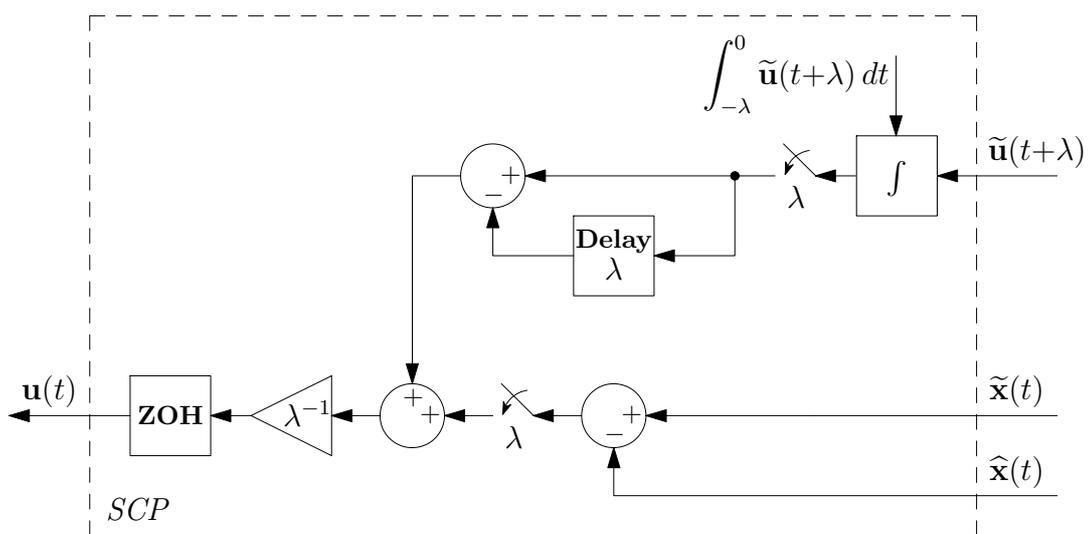


Figura 5.5: Bloco SCP.

É simples estendermos a metodologia acima para o problema de seguimento no intervalo  $\bar{I} = [0, n\Delta]$ , com  $n \in \mathbb{Z}^+$ , seguindo o mesmo procedimento anterior. Isto será descrito abaixo, lembrando que o vetor de estado  $\mathbf{x}$  é medido somente nos instantes  $t = q\Delta$ , para  $q = 0, \dots, n - 1$ .

Sendo  $\lambda$  definido como em (5.4), considere a partição

$$\bar{P} = (0, \lambda, \dots, \Delta, \Delta + \lambda, \dots, 2\Delta, \dots, n\Delta) \quad (5.31)$$

do intervalo  $\bar{I}$ . Definimos os seguintes subintervalos de  $\bar{I}$ :

$$\begin{aligned} I^q &= [q\Delta, (q+1)\Delta), & \text{para } q = 0, \dots, n-2, \\ I_k^q &= [q\Delta + k\lambda, q\Delta + (k+1)\lambda), & \text{para } q = 0, \dots, n-2, \\ & & k = 0, \dots, p-1, \\ I^{n-1} &= [(n-1)\Delta, n\Delta], \\ I_k^{n-1} &= [(n-1)\Delta + k\lambda, (n-1)\Delta + (k+1)\lambda), & k = 0, \dots, p-2, \\ I_{p-1}^{n-1} &= [(n-1)\Delta + (p-1)\lambda, n\Delta]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para  $q = 0, \dots, n - 1$ , definimos o sistema

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}^q = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^q) + \tilde{\mathbf{u}}^q, \quad (5.33)$$

com condição inicial  $\tilde{\mathbf{x}}^q(q\Delta) = \mathbf{x}(q\Delta)$ , de acordo com (5.6). Estabeleceremos que o vetor  $\tilde{\mathbf{u}}^q: [q\Delta, (q+1)\Delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja qualquer sinal contínuo no intervalo  $[q\Delta, (q+1)\Delta]$ , conhecido em  $t = q\Delta$ , que garanta que o vetor de estado  $\tilde{\mathbf{x}}^q$  siga o estado de referência  $\mathbf{r}$  no intervalo  $[q\Delta, (q+1)\Delta]$  dentro das especificações de desempenho correspondentes a (5.7)–(5.8)

$$\|\tilde{\mathbf{x}}^q(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \quad \text{para } t \in [\hat{t}_r^q, (q+1)\Delta], \quad (5.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{t}_r^q &= \max\{\hat{t}_{r1}^q, \hat{t}_{r2}^q\}, \\ \hat{t}_{r1}^q &= \frac{|\hat{x}_1^q(q\Delta) - r_1(q\Delta)|}{\eta_1} + q\Delta, \\ \hat{t}_{r2}^q &= \frac{|\hat{x}_2^q(q\Delta) - r_2(q\Delta)|}{\eta_2} + q\Delta, \end{aligned} \quad (5.35)$$

para  $\eta_1$  e  $\eta_2$  fixos. Novamente, consideraremos, aqui, que  $\tilde{\mathbf{u}}^q = [\tilde{u}_1^q \ \tilde{u}_2^q]'$  seja definido

através de (5.9)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1^q &= -f_1(\tilde{\mathbf{x}}^q) + \dot{r}_1 - \eta_1 \text{sat}((\tilde{x}_1^q - r_1)/\epsilon_1), \\ \tilde{u}_2^q &= -f_2(\tilde{\mathbf{x}}^q) + \dot{r}_2 - \eta_2 \text{sat}((\tilde{x}_2^q - r_2)/\epsilon_2),\end{aligned}\quad (5.36)$$

para certa escolha de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , onde o *a priori* sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}^q: [q\Delta, (q+1)\Delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é obtido numericamente do sistema de equações diferenciais (5.2), (5.33) e (5.36) com condições iniciais  $\mathbf{r}_{q\Delta} \triangleq \mathbf{r}(q\Delta)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}^q(q\Delta) = \mathbf{x}^q(q\Delta)$ .

Agora, para  $q = 0, \dots, n-1$ , um estimador de estado em malha-aberta é determinado para o sistema (5.1) no intervalo  $I^q$ , tomando por base (5.15), como

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}^q = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^q) + \mathbf{u}^q, \quad (5.37)$$

com condição inicial  $\hat{\mathbf{x}}^q(q\Delta) = \mathbf{x}(q\Delta) = \tilde{\mathbf{x}}^q(q\Delta)$ . O vetor de controle  $\mathbf{u}^q: I^q \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dado por (5.5)

$$\mathbf{u}^q(t) = \mathbf{u}_k^q = [u_{k,1}^q \ u_{k,2}^q]', \quad \text{para } t \in I_k^q, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad (5.38)$$

onde os escalares  $u_{k,j}^q$  são definidos por (5.26)

$$u_{k,j}^q = \frac{1}{\lambda} \int_{q\Delta+k\lambda}^{q\Delta+(k+1)\lambda} \tilde{u}_j^q(t) dt - \frac{1}{\lambda} (\hat{x}_j^q(q\Delta+k\lambda) - \tilde{x}_j^q(q\Delta+k\lambda)), \quad (5.39)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . Finalmente, um sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é obtido para o sistema (5.1), a saber

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^q(t) \quad \text{para } t \in I^q, \quad q = 0, \dots, n-1, \quad (5.40)$$

que nada mais é do que uma aplicação escada em relação à partição  $\bar{P}$  do intervalo  $\bar{I}$ .

Ressaltamos, uma vez mais, que o sistema controlado (5.1) e (5.38)–(5.40) está em malha-aberta entre dois instantes quaisquer de medição do estado, ou seja, nos intervalos  $(q\Delta, (q+1)\Delta)$ . Desse modo, o sinal de controle  $\mathbf{u}|_{(q\Delta, (q+1)\Delta)}$  é incapaz de rejeitar perturbações que possam eventualmente afetar o vetor de estado  $\mathbf{x}$  no intervalo  $(q\Delta, (q+1)\Delta)$ . O seguimento do estado de referência  $\mathbf{r}$  só poderá ser restabelecido no intervalo seguinte  $[(q+1)\Delta, (q+2)\Delta)$ , após a próxima medição de estado  $\mathbf{x}((q+1)\Delta)$  em  $t = (q+1)\Delta$ , devido ao fato de que o sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}^{q+1}: [(q+1)\Delta, (q+2)\Delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  levará em consideração o efeito dessas perturbações através da condição inicial  $\tilde{\mathbf{x}}((q+1)\Delta) = \mathbf{x}((q+1)\Delta)$  do sistema (5.33).

## 5.2 Resultados de Simulação

Aplicaremos, neste item, a estratégia de controle proposta para forçar o estado  $\mathbf{x}$  do sistema presa-predador não-isolado (5.1) a seguir determinados estados de referência  $\mathbf{r}$  do sistema (5.2) em dois casos. No primeiro, retornaremos ao problema de seguimento discutido na Seção 4.2, que consiste em fazer com que as trajetórias do sistema controlado oscilem num ciclo limite do sistema de referência. Em seguida, apresentaremos uma situação de recuperação ambiental para prevenir a extinção dos predadores. Como veremos, os parâmetros de referência serão escolhidos de maneira que o seguimento do estado de referência pelo vetor de estado do sistema controlado durante determinado intervalo de tempo possibilite restaurar a dinâmica natural do sistema isolado.

Em ambos os casos, além de procurarmos manter compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado, os sinais de controle resultantes poderão ser implementados no sistema real por órgãos ambientais através de políticas de gerenciamento. Comentamos ainda, que todos os resultados de simulação apresentados foram obtidos no MATLAB usando o método de integração Dormand-Prince com passo fixo de 0,001.

### 5.2.1 Caso 1 – Exploração Sustentável

Considere, novamente, o sistema presa-predador não-isolado (4.2)–(4.3)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \quad (5.41)$$

com parâmetros

$$\begin{aligned} \alpha &= 5, 2, \\ \beta &= 2, 0, \\ \gamma &= 4, 1, \\ \delta &= 2, 5, \end{aligned} \quad (5.42)$$

e o sistema de referência (4.6)–(4.7)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (5.43)$$

com parâmetros

$$\begin{aligned}\alpha_r &= 5, 2, \\ \beta_r &= 2, 0, \\ \gamma_r &= 3, 5, \\ \delta_r &= 2, 5.\end{aligned}\tag{5.44}$$

Suas respectivas condições iniciais são (4.4) e (4.8)

$$\mathbf{x}_0 = [3, 1500 \ 1, 6100]',\tag{5.45}$$

$$\mathbf{r}_0 = [2, 4443 \ 1, 2001]',\tag{5.46}$$

relembrando que os planos de fase e as trajetórias correspondentes são as mostradas nas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente. Assumiremos, uma vez mais, que a dinâmica do sistema isolado é a natural. Os períodos dos ciclos limite (em relação ao tempo normalizado  $t$ ) do sistema isolado e do sistema de referência são  $W_i = 26, 46$  e  $W_r = 13, 11$ , respectivamente. Apesar de  $t$  ser uma normalização do tempo  $T$  por (2.15), consideraremos, aqui, por simplicidade, que 13, 11 corresponda a um período de dois anos no sistema real e que o vetor de estado  $\mathbf{x}$  possa ser medido a cada seis anos. Supomos, ainda, que

$$\frac{W_r}{12} = \frac{13, 11}{12} \approx 1, 09\tag{5.47}$$

seja equivalente a dois meses no sistema real. Definimos

$$\Delta = 36 \cdot 1, 09 = 39, 24,\tag{5.48}$$

de modo que o período de medição corresponda a seis anos. Especificando  $p = 36$  em (5.4), obtemos

$$\lambda = \frac{\Delta}{36} = 1, 09.\tag{5.49}$$

O problema de controle é fazer com que o estado  $\mathbf{x}$  siga o estado de referência  $\mathbf{r}$  no intervalo  $I = [0, \Delta]$ , sem nenhuma medição de  $\mathbf{x}$  além de  $\mathbf{x}_0$ , e aplicando sinais de controle constante por partes. Portanto, seguiremos a estratégia de controle descrita na seção anterior para determinarmos um sinal de controle  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]'$  que seja uma aplicação escada em relação à partição  $P = (0, \lambda, \dots, \Delta)$  do intervalo  $I$ . Como  $\lambda$  corresponde a dois meses, isto significa que os sinais de controle permanecerão constantes durante dois meses no sistema real.

Escolheremos  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0, 001$ . Desse modo, a partir de (5.7)–(5.8) e

(5.45)–(5.46), obtemos a especificação de desempenho

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq 0,001, \quad \text{para } t \in [0, 7057; 39, 24]. \quad (5.50)$$

Nas Figuras 5.6 e 5.7 são apresentados, respectivamente, os planos de fase e as trajetórias de SR e de SC, obtidos por simulação. O vetor erro  $\mathbf{e}$  é mostrado nas Figuras 5.8 e 5.9. Ressaltamos que as escalas são diferentes. Note que, apesar de  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{x}_0$ , a trajetória do sistema controlado alcança o ciclo limite de referência e nele permanece, com uma exatidão de seguimento que é aceitável segundo interesses práticos. Mais precisamente, o vetor erro fica limitado de acordo com

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,01, \quad \text{para } t \in [2, 014; 39, 24], \quad \lambda = 1,09. \quad (5.51)$$

Assim, pela hipótese feita sobre  $\lambda = 1,09$ , o vetor erro permanece limitado por 0,01 em menos de quatro meses.

O sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$  e o sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}$  são mostrados nas Figuras 5.10 e 5.11. Note que as escalas são diferentes. Percebemos por esses gráficos que os sinais  $u_1$  e  $u_2$  definem uma política de gerenciamento ambiental que poderá ser implementada no sistema presa-predador real por órgãos ambientais. A política consiste em estabelecer taxas constantes de extração (se os sinais de controle forem negativos) ou taxas constantes de introdução de novos indivíduos (se os sinais de controle forem positivos), tanto para as presas, quanto para os predadores, que devam ser cumpridas pela sociedade num período base de dois meses. Além disso, esta política fica determinada para todo o intervalo  $I = [0; 39, 24]$ , isto é, para seis anos, de acordo com a hipótese feita anteriormente. Acrescentamos, ainda, que  $u_1$  e  $u_2$  foram obtidos somente com o conhecimento do estado  $\mathbf{x}_0$  em  $t = 0$ , sem a necessidade de medir  $\mathbf{x}$  no intervalo  $(0; 39, 24]$ . Portanto, as limitações práticas na implementação do CMD discutidas na Seção 4.2 foram contornadas. Contudo, enfatizamos, uma vez mais, que o sinal de controle  $\mathbf{u}$  aplicado é uma aproximação do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$ , o qual foi definido com base na metodologia CMD. A implementação dessa política possibilita uma exploração sustentável dos recursos do sistema presa-predador ao mesmo tempo em que é mantida compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e dinâmica natural do sistema isolado. Note, ainda, que, pelas Figuras 5.10 e 5.11, as presas deverão ser extraídas durante todo o intervalo  $I$ , mas, para os predadores, exigimos extração assim como introdução de novos indivíduos. No entanto, mais indivíduos predadores serão extraídos do que novos introduzidos. Voltaremos a discutir este assunto adiante.

Temos também que

$$\begin{aligned}\Phi &= 0,2559, \\ \Psi &= 0,6141, \quad \text{para } \lambda = 1,09,\end{aligned}\tag{5.52}$$

relembrando que  $\Phi$  e  $\Psi$  são definidos por (5.29) e (5.30), respectivamente.

Agora, ao dobrarmos o valor de  $p = 36$ , para  $p = 72$ , ou seja, ao diminuirmos  $\lambda = 1,09$  pela metade,  $\lambda = 0,545$ , o que corresponde a um mês, constatamos que

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,01, \quad \text{para } t \in [1,031; 39,24], \quad \lambda = 0,545,\tag{5.53}$$

como pode ser visto pelo vetor erro mostrado nas Figuras 5.12 e 5.13. Comparando (5.51) com (5.53), vemos que o tempo necessário para vetor erro permanecer limitado por 0,01 é menor para  $\lambda = 0,545$ . Os sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  correspondentes são exibidos nas Figuras 5.14 e 5.15. Obtivemos, ainda,

$$\begin{aligned}\Phi &= 0,1050, \\ \Psi &= 0,7527, \quad \text{para } \lambda = 0,545.\end{aligned}\tag{5.54}$$

Uma comparação do desvio de estado  $\Theta$  entre  $\lambda = 1,09$  e  $\lambda = 0,545$  é mostrado nas Figuras 5.16 e 5.17, lembrando que  $\Theta$  é definido por (5.16). Note que, na maior parte do tempo, as amplitudes das componentes  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são menores para  $\lambda = 0,545$  do que para  $\lambda = 1,09$ .

À medida que diminuimos  $\lambda$  de 1,09 para 0,545, percebemos que, de (5.52) e (5.54),  $\Phi$  também diminuiu. Além disso, de maneira geral, a precisão de seguimento ficou melhor, como pode ser observado pela comparação do vetor erro da Figura 5.9 com o da Figura 5.13. Porém, ao compararmos  $\Psi$  em (5.52) e (5.54), concluímos que  $\Psi$  não acompanhou esse comportamento. A razão para isto é que, inobstante a aproximação de  $\tilde{\mathbf{u}}$  por  $\mathbf{u}$  no intervalo  $[2,18; 39,24]$  ser melhor para  $\lambda = 0,545$  do que para  $\lambda = 1,09$ , de acordo com as Figuras 5.15 e 5.11, respectivamente, o valor de  $\sup_{t \in [0,1,09]} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|$  piorou, como constatamos pela comparação da Figura 5.14 com a Figura 5.10, devido à elevada taxa de variação dos sinais contínuos  $\tilde{u}_1$  e  $\tilde{u}_2$ . Contudo, apesar de não exibirmos aqui, simulações realizadas mostraram que, para o caso extremo de  $p = 3924$ , ou seja,  $\lambda = 0,01$ , obtivemos

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,01, \quad \text{para } t \in [0,6960; 39,24], \quad \lambda = 0,01,\tag{5.55}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi &= 0,0021, \\ \Psi &= 0,5556, \quad \text{para } \lambda = 0,01.\end{aligned}\tag{5.56}$$

As simulações também mostraram que, para este caso,

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq 0,01, \quad \text{para } t \in [\tilde{t}_r; 39,24], \quad \tilde{t}_r \cong 0,6960,\tag{5.57}$$

ou seja, os tempos necessários para os vetores  $\mathbf{e}$  e  $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{r}$  permanecerem limitados por 0,01 são praticamente os mesmos. De (5.52) e (5.56), vemos que  $\Phi$  e  $\Psi$  diminuíram ao aumentarmos o valor de  $p = 36$  ( $\lambda = 1,09$ ) para  $p = 3924$  ( $\lambda = 0,01$ ). Em outras palavras, com este acréscimo em  $p$ , o desvio entre  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  ficou menor, e a aproximação de  $\tilde{\mathbf{u}}$  por  $\mathbf{u}$  tornou-se melhor. A Tabela 5.1 resume os resultados obtidos acima com a variação de  $p$ .

$p$	$\lambda$	$\Phi$	$\Psi$
36	1,090	0,2559	0,6141
72	0,545	0,1050	0,7527
3924	0,010	0,0021	0,5556

Tabela 5.1: Variação de  $\lambda$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$  em função de  $p$ , com  $\Delta = 39,24$ .

Portanto, os resultados de simulação aqui apresentados indicaram que, para uma escolha suficientemente grande de  $p$ , os valores de  $\Phi$  e  $\Psi$  poderão ser limitados por valores razoáveis de acordo com os nossos interesses práticos, no sentido de que a trajetória  $\hat{\mathbf{x}}$  pertença a uma pequena vizinhança da trajetória  $\tilde{\mathbf{x}}$  e o sinal de controle constante por partes  $\mathbf{u}$  pertença a uma pequena vizinhança do sinal contínuo  $\tilde{\mathbf{u}}$ . No entanto, à medida que  $p$  aumenta, podemos nos deparar com restrições práticas na implementação da política de gerenciamento. Por exemplo, para  $p = 3924$ , temos que  $\lambda = 0,01$  corresponde a aproximadamente 0,55 dia no sistema real, isto é, representa aproximadamente 13 horas, sob a hipótese de que  $\Delta = 39,24$  corresponda a seis anos. Desse modo, a implementação de tal política poderá não ser possível em muitas situações, pois a taxa de extração de presas exigida mudaria quase duas vezes ao dia. É evidente que o valor máximo permitido para  $p$  é o que torna possível a implementação dos sinais de controle no ecossistema por meio de uma política de gerenciamento.

Recorde que especificamos  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{x}_0$ . Mas, como a região de atração do ciclo limite de referência é todo o primeiro quadrante, conforme vemos pela Figura 2.8.d, poderíamos ter escolhido, alternativamente,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0$ . Dessa maneira, a transição do ciclo limite do

sistema isolado para o ciclo limite de referência seria “mais suave”. No caso analisado, optamos pela escolha de  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{x}_0$  para mostrar que o esquema de controle proposto oferece resultados satisfatórios apesar de o sistema de referência ter condição inicial diferente da do sistema controlado.

Salientamos que nem sempre poderemos introduzir novos indivíduos de determinada espécie num ecossistema. Se este for o caso, os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  terão que assumir apenas valores não-positivos durante todo o tempo, para que seja possível implementá-los através de uma política de gerenciamento. Pelas Figuras 5.10 e 5.11, para  $\lambda = 1,09$ , percebemos que somente o sinal de controle  $u_2$  referente aos predadores assume valores positivos. Como estes são de magnitudes relativamente pequenas, esperamos que, restringindo  $u_{k,j}$  em (5.26) a assumir somente valores não-positivos, obteremos resultados satisfatórios para o vetor erro. Colocado de outra forma,  $u_{k,j}$  é definido por (5.26), mas redefinido de acordo com a seguinte condição

$$u_{k,j} > 0 \Rightarrow u_{k,j} = 0, \quad (5.58)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . As Figuras 5.18 e 5.19 mostram o vetor erro e os sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, para  $\lambda = 1,09$ , considerando a restrição (5.58). Observamos que, como  $u_1$  e  $u_2$  são negativos no intervalo  $[0; 2,18]$ , o vetor erro e o sinal de controle  $\mathbf{u}$  neste intervalo são idênticos aos apresentados nas respectivas Figuras 5.8 e 5.10. Por este motivo, não os repetimos aqui. Pela Figura 5.18, temos que

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,02, \quad \text{para } t \in [1,878; 39,24]. \quad (5.59)$$

Apesar de o vetor erro ser limitado por um valor maior do que o em (5.51), onde não consideramos (5.58), a precisão de seguimento também é relativamente satisfatória. Obtivemos ainda,

$$\begin{aligned} \Phi &= 0,2559, \\ \Psi &= 0,6141, \end{aligned} \quad (5.60)$$

os quais são idênticos aos de (5.52). Assim, no caso analisado, é de fato possível extrair as presas e os predadores do sistema de uma maneira sustentável no intervalo  $I$ , não havendo necessidade de introduzir novos indivíduos, ao mesmo tempo em que é mantida compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado.

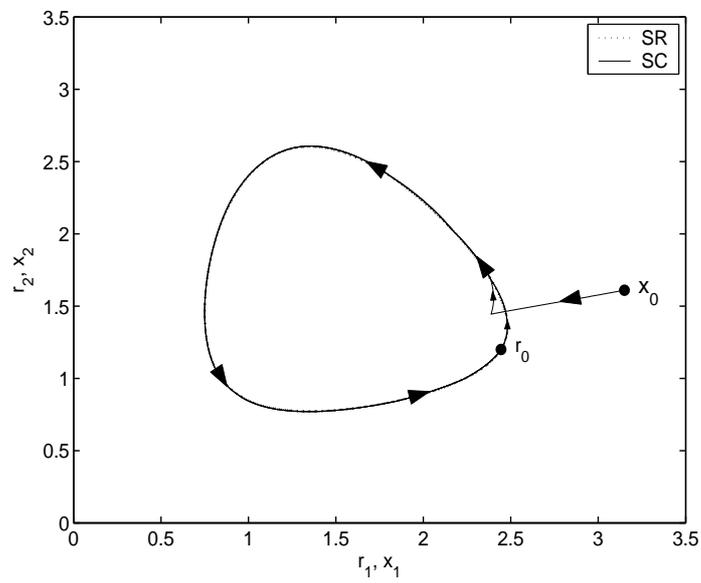


Figura 5.6: Planos de fase de SR e de SC para  $\lambda = 1,09$ .

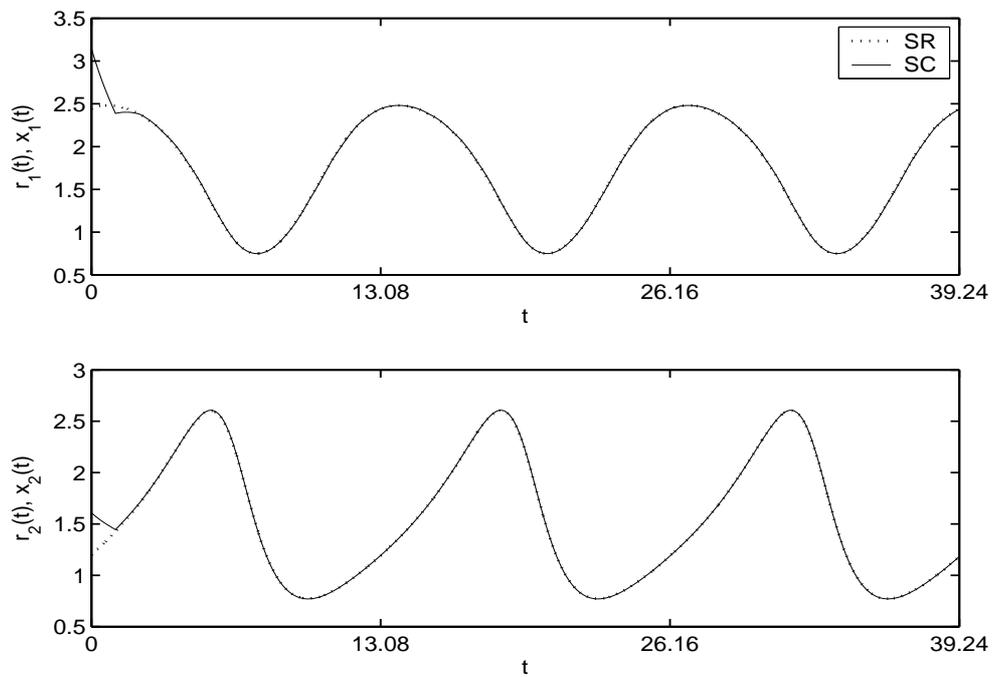


Figura 5.7: Trajetórias de SR e de SC para  $\lambda = 1,09$ .

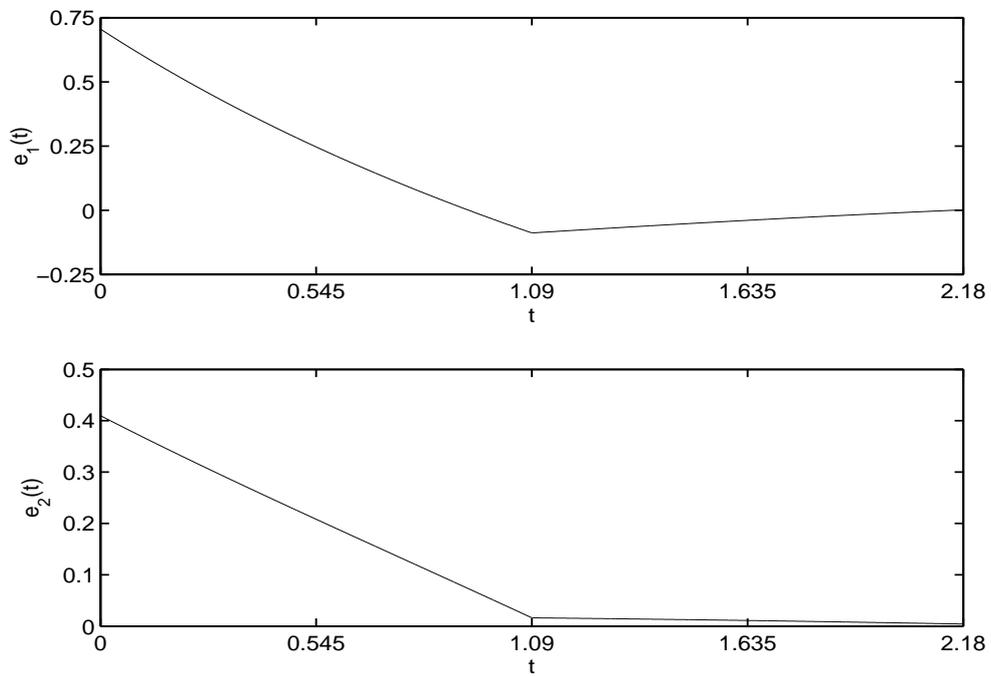


Figura 5.8: Vetor erro em  $[0; 2, 18]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

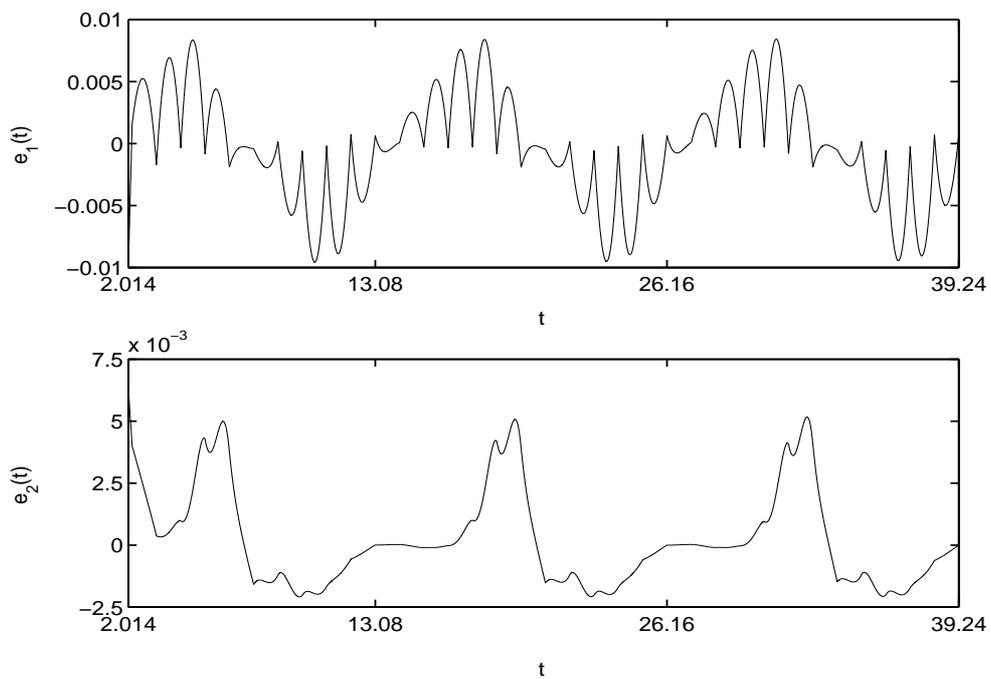


Figura 5.9: Vetor erro em  $[2, 014; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

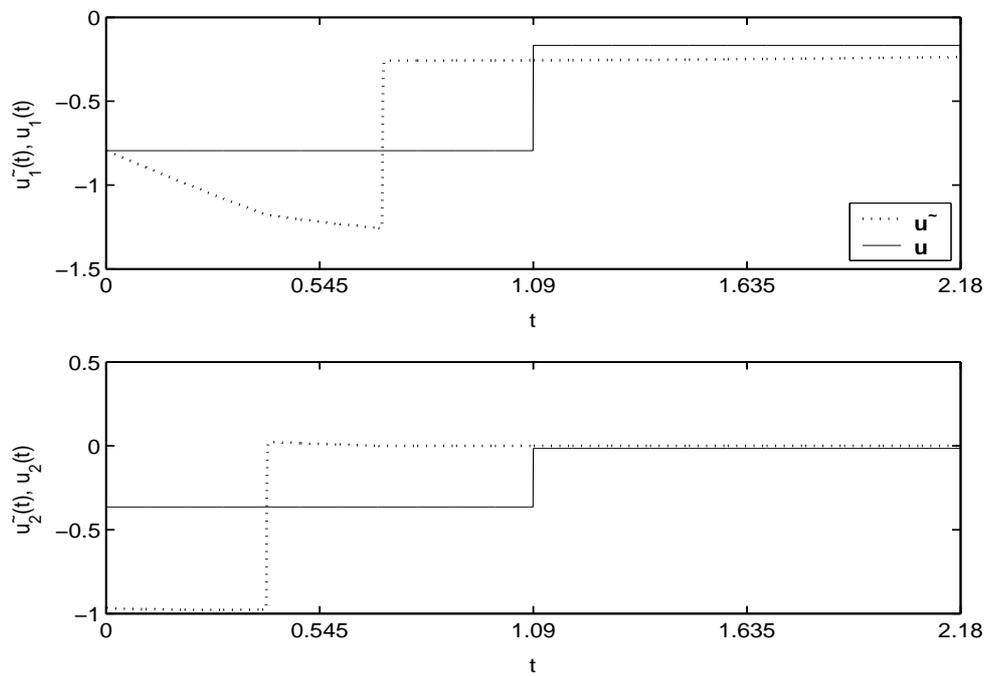


Figura 5.10: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[0; 2, 18]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

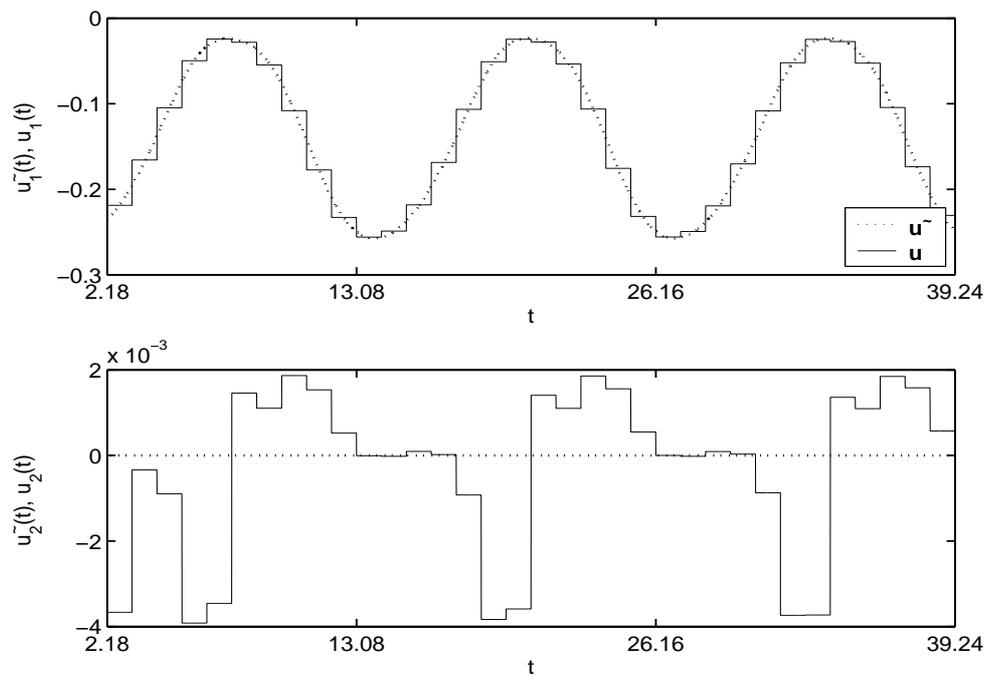


Figura 5.11: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[2, 18; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

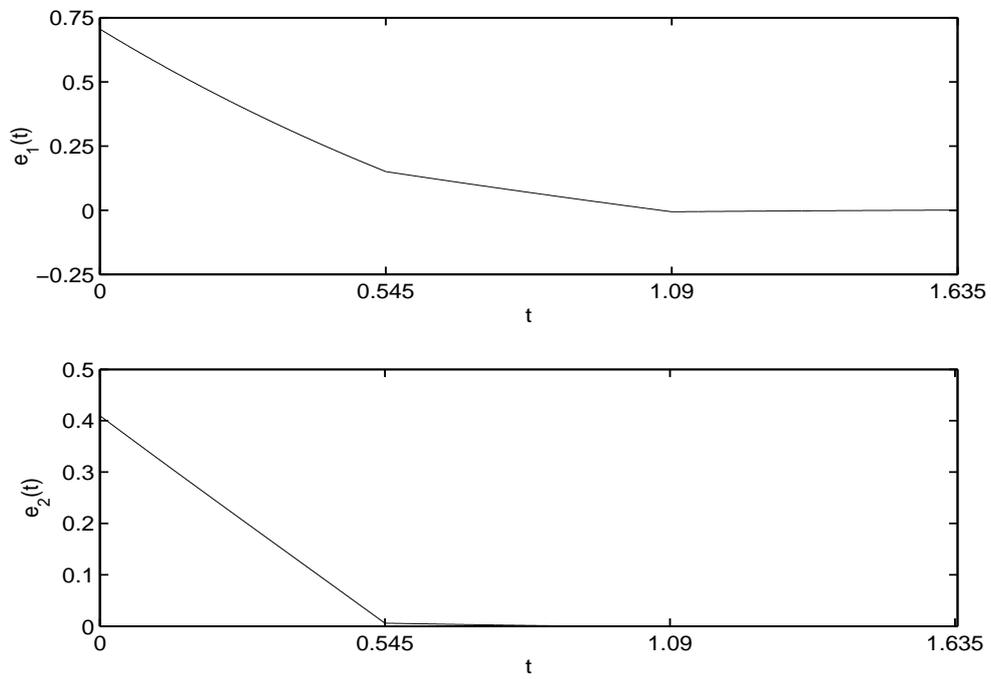


Figura 5.12: Vetor erro em  $[0; 1,635]$  para  $\lambda = 0,545$ .

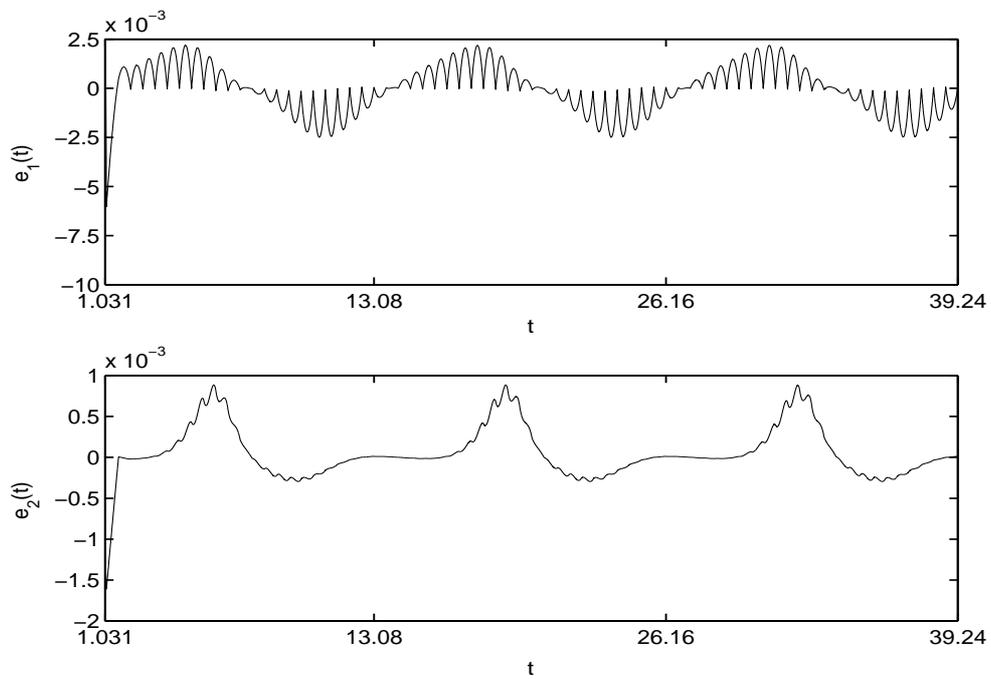


Figura 5.13: Vetor erro em  $[1,031; 39,24]$  para  $\lambda = 0,545$ .

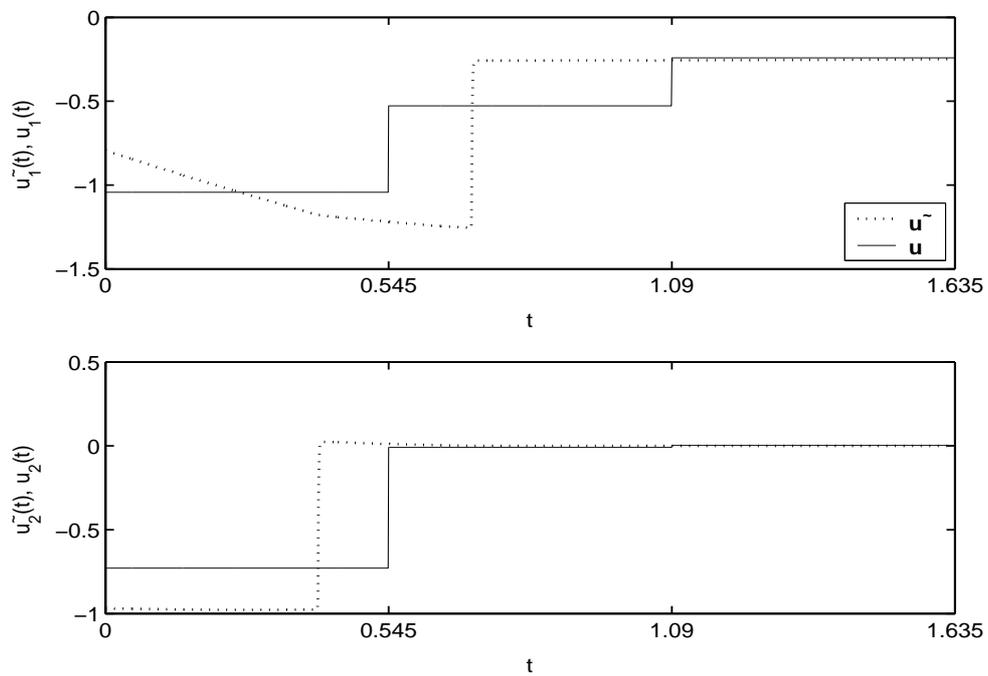


Figura 5.14: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[0; 1,635]$  para  $\lambda = 0,545$ .

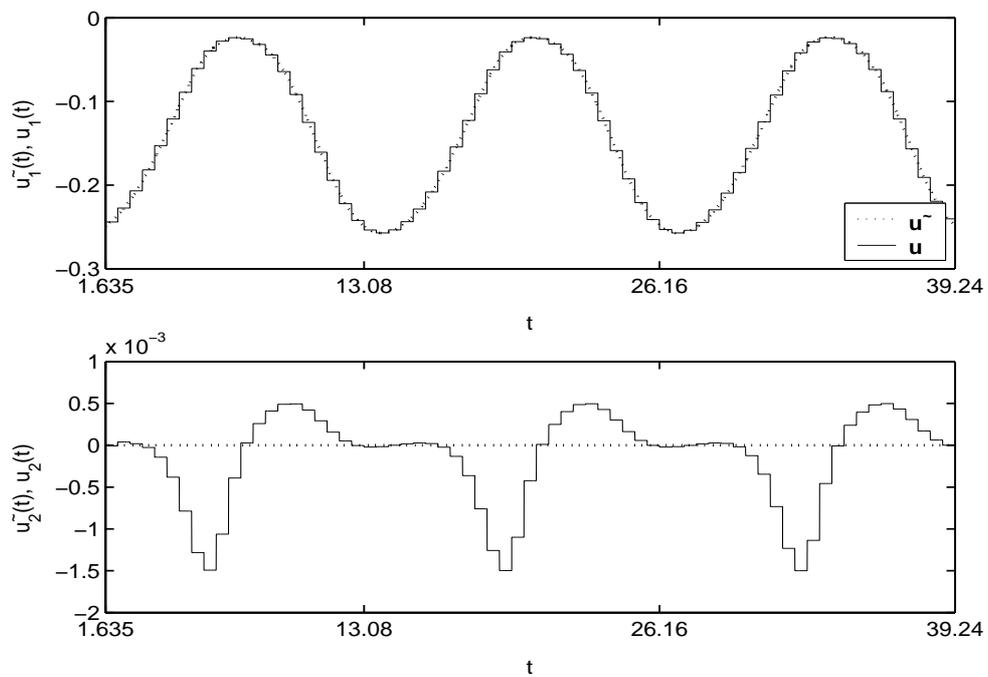


Figura 5.15: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[1,635; 39,24]$  para  $\lambda = 0,545$ .

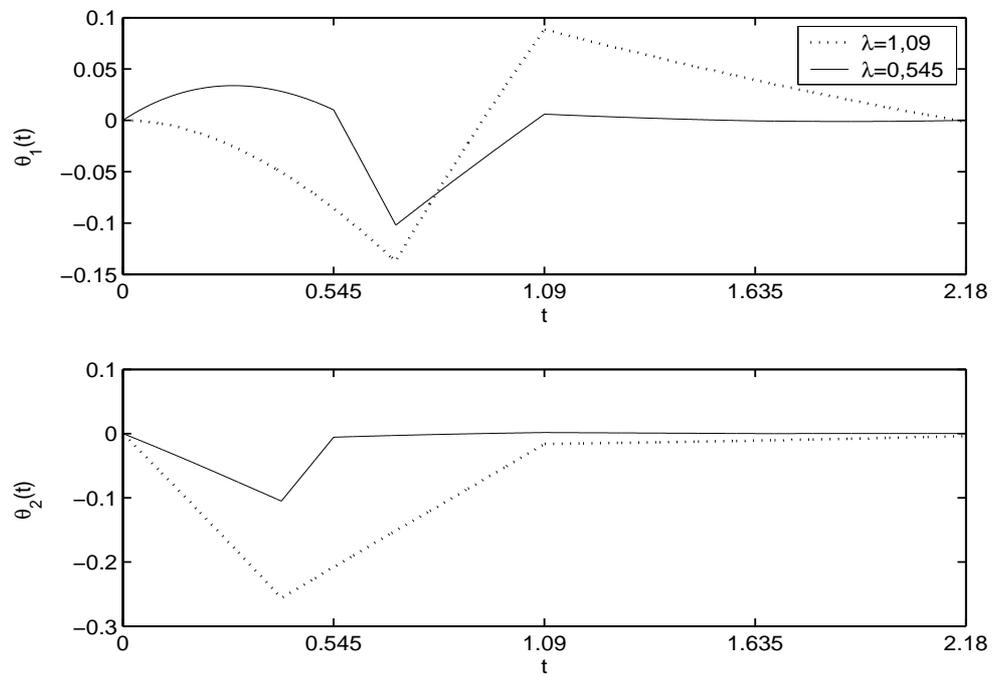


Figura 5.16: Comparação de  $\Theta$  entre  $\lambda = 1,09$  e  $\lambda = 0,545$  em  $[0; 2,18]$ .

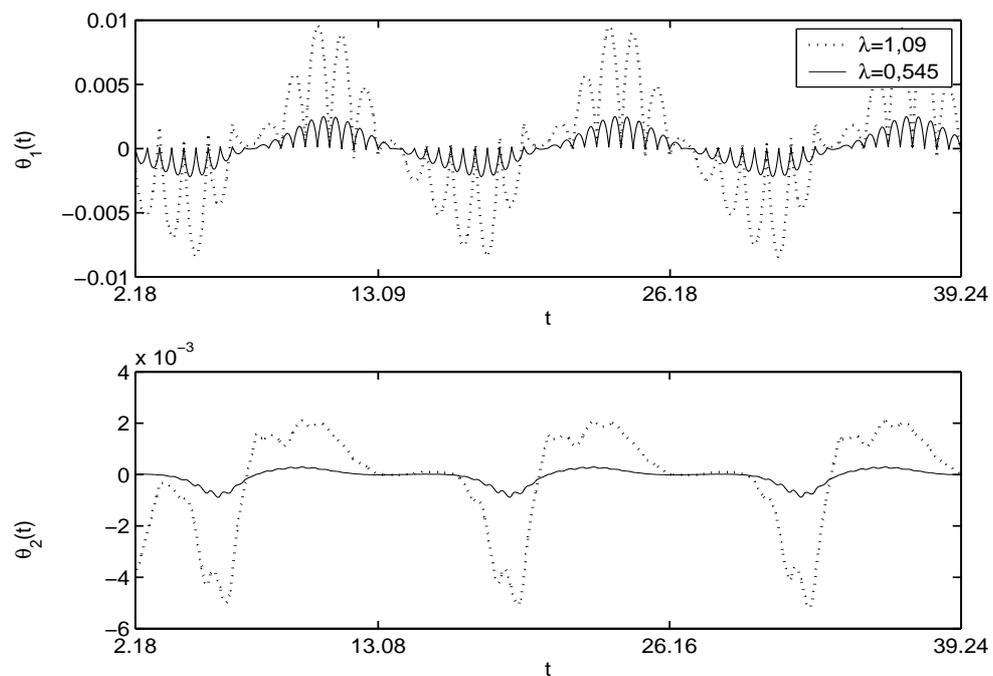


Figura 5.17: Comparação de  $\Theta$  entre  $\lambda = 1,09$  e  $\lambda = 0,545$  em  $[2,18; 39,24]$ .

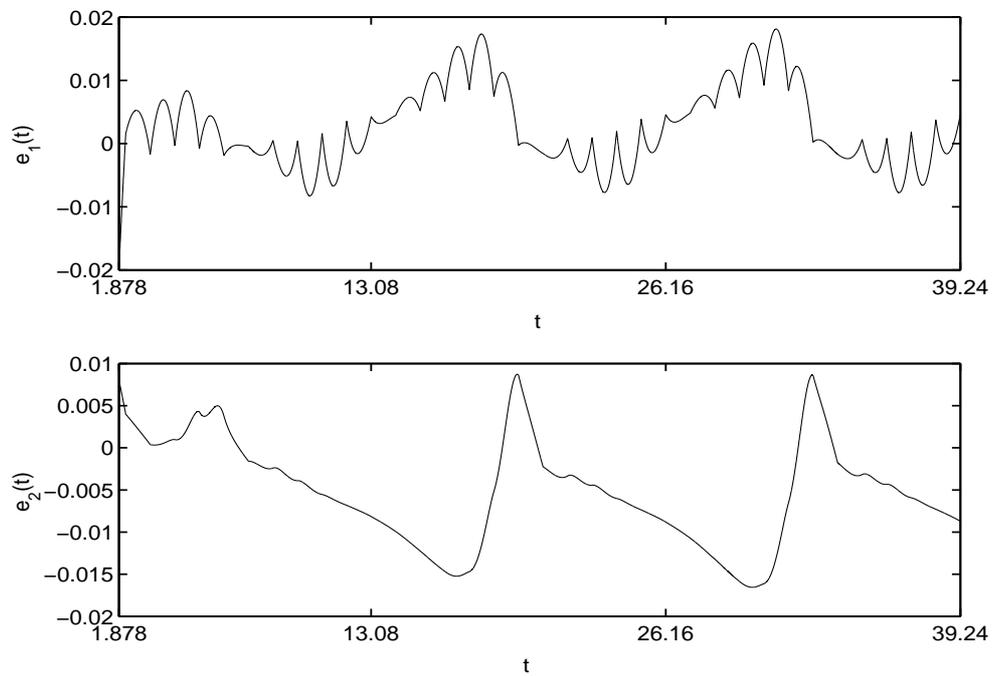


Figura 5.18: Vetor erro em  $[1, 878; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ , com a restrição de  $u_1$  e  $u_2$  não assumirem valores positivos.

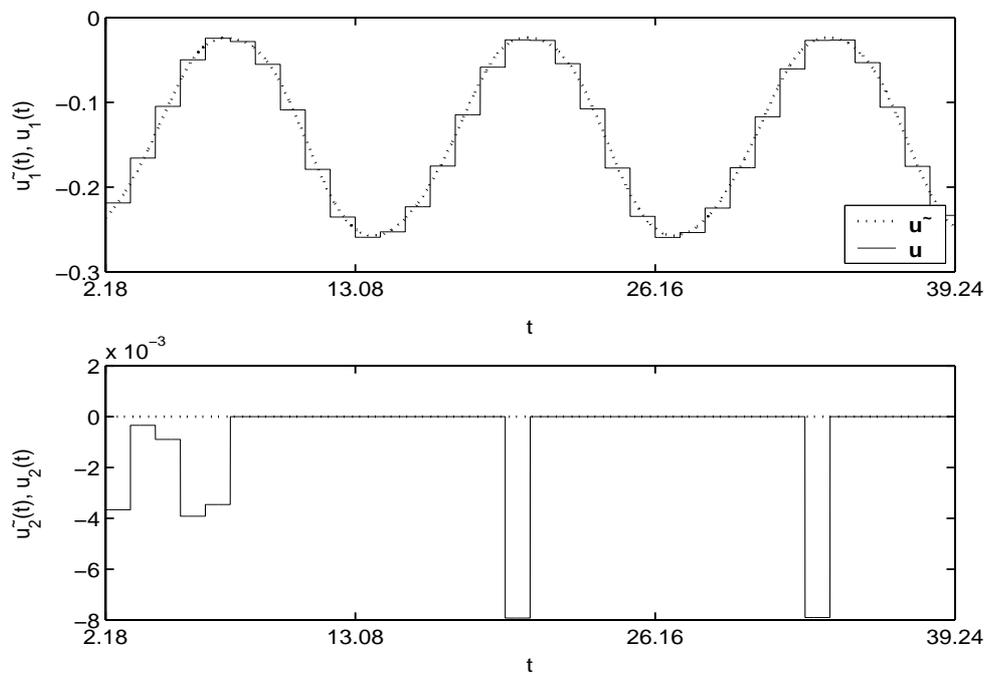


Figura 5.19: Sinais  $\tilde{u}$  e  $u$  em  $[2, 18; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ , com a restrição de  $u_1$  e  $u_2$  não assumirem valores positivos.

Sabemos que perturbações externas podem causar graves impactos em um ecossistema, havendo, inclusive, a possibilidade delas alterarem os parâmetros do modelo do sistema presa-predador e fazerem com que sua dinâmica não seja mais a natural. Desse modo, estas perturbações paramétricas poderão alterar as trajetórias do sistema isolado, de modo que as mesmas passem a oscilar num ciclo limite com forma, frequência e amplitude totalmente diferentes da dinâmica natural que o sistema apresentava anteriormente. Nesta situação, poderemos especificar os parâmetros de referência como sendo iguais aos parâmetros originais não-perturbados, isto é, os parâmetros correspondentes à dinâmica natural do sistema isolado. Aplicando em seguida a estratégia de controle proposta, forçaremos o estado do sistema controlado a seguir o estado de referência, recuperando, assim, a dinâmica natural do sistema isolado. Mas, caso não seja possível de selecionarmos a dinâmica do sistema de referência como sendo a dinâmica natural, deveremos então buscar uma dinâmica que seja compatível com a natural.

Recordamos que assumimos que a dinâmica do sistema isolado é a natural e que os parâmetros do sistema de referência foram especificados com o objetivo de manter compatibilidade entre as dinâmicas dos sistemas controlado e isolado. Apesar de os parâmetros de referência (5.44) serem um dos possíveis valores para o modelo do sistema presa-predador isolado (2.16), o período de oscilação do ciclo limite de referência é aproximadamente  $W_r = 13,11$ , enquanto que o ciclo limite do sistema isolado é aproximadamente  $W_i = 26,46$ , ou seja, praticamente o dobro. Além disso, as amplitudes das trajetórias de referências são menores do que as do sistema isolado, como podemos ver pela Figura 4.2.

Para contornar o problema da diferença entre as frequências de oscilação do sistema de referência e do sistema isolado, propomos duas alternativas bastante simples. A primeira consiste em manter as trajetórias do sistema controlado oscilando no ciclo limite de referência durante determinado intervalo de tempo. Em seguida, inibimos a ação humana sobre o sistema durante um intervalo grande o suficiente para que as trajetórias voltem a oscilar no ciclo limite original. Pela Figura 4.1, percebemos que o ciclo limite de referência está situado dentro do ciclo limite do sistema isolado. Desse modo, a partir do momento que o sistema controlado é mantido livre da ação humana, as trajetórias começarão a convergir para o ciclo limite estável do sistema isolado, como pode ser visto pelo plano de fase da Figura 2.8.e. Conseqüentemente, a dinâmica natural será restaurada. Podemos seguir este procedimento sistematicamente, ou seja, controlando o sistema durante um intervalo, isolando-o durante outro, controlando-o novamente, e assim por diante. Dessa maneira, os possíveis efeitos negativos de forçarmos as trajetórias do sistema a oscilar com uma frequência mais elevada através da intervenção humana poderão ser, possivelmente,

atenuados.

A segunda alternativa consiste em mudarmos a escala de tempo do estado de referência. Seu período de oscilação é  $W_r = 13,11$ . Para que  $\mathbf{r}$  oscile com o mesmo período  $W_i = 26,46$  do estado do sistema isolado, tudo o que temos a fazer é multiplicar  $\mathbf{g}$  em (5.43) pela razão

$$\varphi = \frac{W_r}{W_i}. \quad (5.61)$$

Com efeito, definindo

$$\mathbf{r}^\varphi(t) = \mathbf{r}(\varphi t) \quad (5.62)$$

faz com que  $\mathbf{r}^\varphi$  percorra a mesma trajetória periódica de  $\mathbf{r}$ , mas com período  $W_i$ . Aplicando a Regra da Cadeia e usando (5.43), obtemos

$$\dot{\mathbf{r}}^\varphi(t) = \varphi \dot{\mathbf{r}}(t) = \varphi \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)), \quad (5.63)$$

o que confirma nosso argumento. Seguindo este método, o período de oscilação do estado de referência será igual ao período de oscilação das trajetórias do sistema isolado. Acrescentamos, ainda, que podemos tentar especificar a condição inicial  $\mathbf{r}_0^\varphi$  para que as trajetórias de referência e as trajetórias do sistema isolado estejam aproximadamente “em fase”. Mostraremos em seguida os resultados usando esta alternativa.

Substituindo  $W_r = 13,11$  e  $W_i = 26,46$  em (5.61), obtemos

$$\varphi = \frac{W_r}{W_i} = \frac{13,11}{26,46} = 0,4992. \quad (5.64)$$

Redefinimos, então, o sistema de referência (5.43) por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \varphi \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad (5.65)$$

com os parâmetros de (5.44). A condição inicial é especificada como

$$\mathbf{r}_0 = [2,0000 \quad 2,2214]'. \quad (5.66)$$

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram, respectivamente, os planos de fase e as trajetórias de SR (redefinido) e de SI. Note que as trajetórias de ambos os sistemas oscilam de fato com a mesma frequência e que estão praticamente “em fase”.

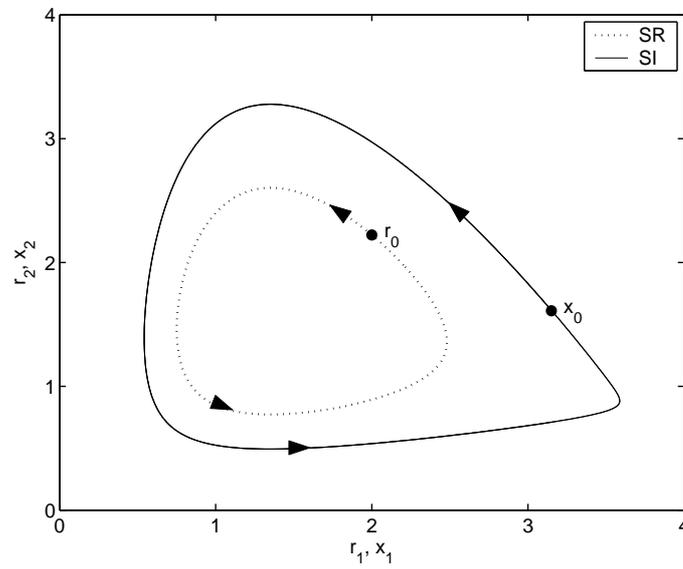


Figura 5.20: Planos de fase de SR e de SI.

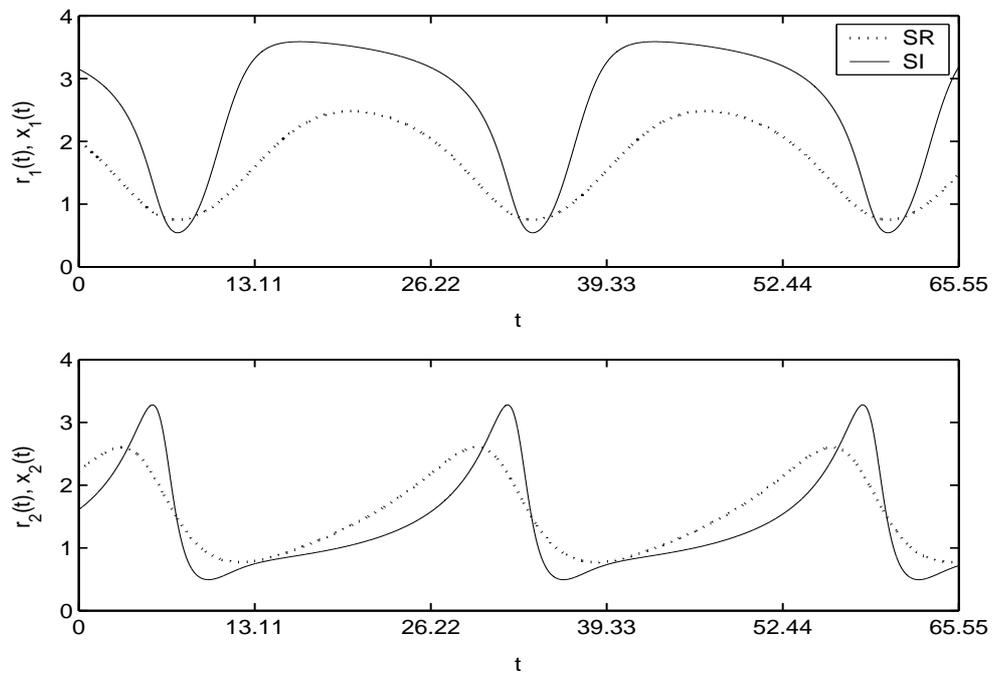


Figura 5.21: Trajetórias de SR e de SI.

Como  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,001$ , temos que (5.7)–(5.8), (5.45) e (5.66) determinam a especificação de desempenho

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq 0,001, \quad \text{para } t \in [1, 15; 39, 24]. \quad (5.67)$$

Escolhemos, novamente,  $\lambda = 1,09$  ( $p = 36$ ). As Figuras 5.22 e 5.23 apresentam, respectivamente, os planos de fase e as trajetórias de SR e de SC. As trajetórias do sistema controlado oscilam com a mesma frequência das trajetórias do sistema isolado e em “fase” com as mesmas. O vetor erro é mostrado nas Figuras 5.24 e 5.25. Observe que

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq 0,025, \quad \text{para } t \in [2, 916; 39, 24], \quad (5.68)$$

sendo uma precisão de seguimento relativamente satisfatória. Temos também que

$$\Phi = 0,8967, \quad (5.69)$$

$$\Psi = 0,3147. \quad (5.70)$$

Note que estes valores de  $\Phi$  e  $\Psi$  são mais elevados do que os de (5.52), a qual corresponde ao sistema de referência (5.43)–(5.44) com condição inicial (5.46). Os sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  são apresentados nas Figuras 5.26 e 5.27. Veja que os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  assumem valores positivos e negativos. Portanto, para que o estado  $\mathbf{x}$  siga  $\mathbf{r}$ , são exigidas, tanto a introdução de novas presas e predadores, quanto a extração de ambas as espécies. Apesar de mais presas serem extraídas do que novas introduzidas, o mesmo não acontece com os predadores, havendo a necessidade de introduzir mais indivíduos do que extrair. Caso considerássemos a restrição (5.58) para os sinais de controle, simulações mostraram que a precisão de seguimento não foi nada satisfatória. Portanto, inobstante termos contornado o problema da diferença entre as frequências de oscilação das trajetórias dos sistemas controlado e isolado pela redefinição do sistema de referência por (5.65), não foi possível manter compatibilidade entre as dinâmicas dos sistemas controlado e isolado no intervalo  $I = [0, \Delta]$  sem introduzir novos indivíduos.

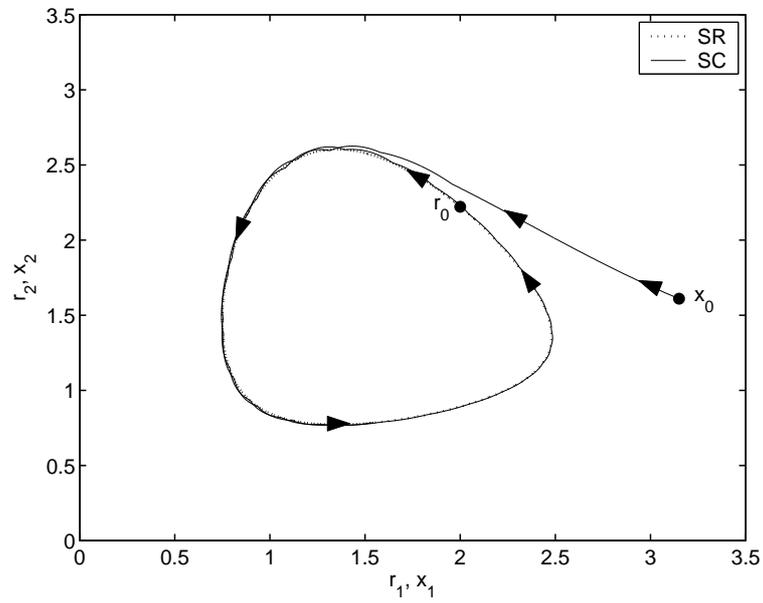


Figura 5.22: Planos de fase de SR e de SC para  $\lambda = 1,09$ .

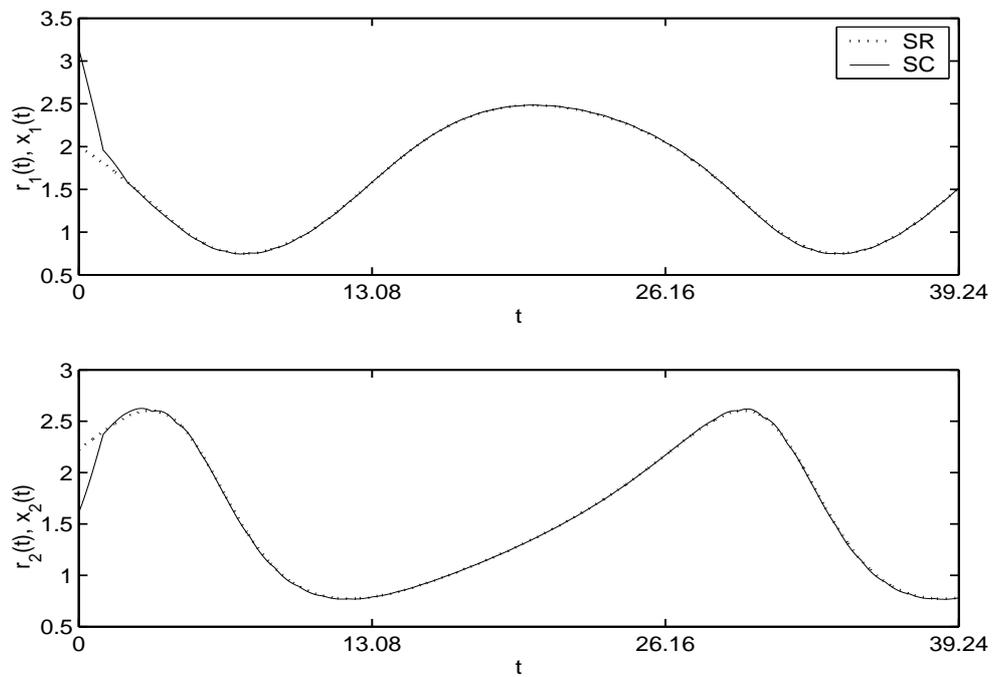


Figura 5.23: Trajetórias de SR e de SC para  $\lambda = 1,09$ .

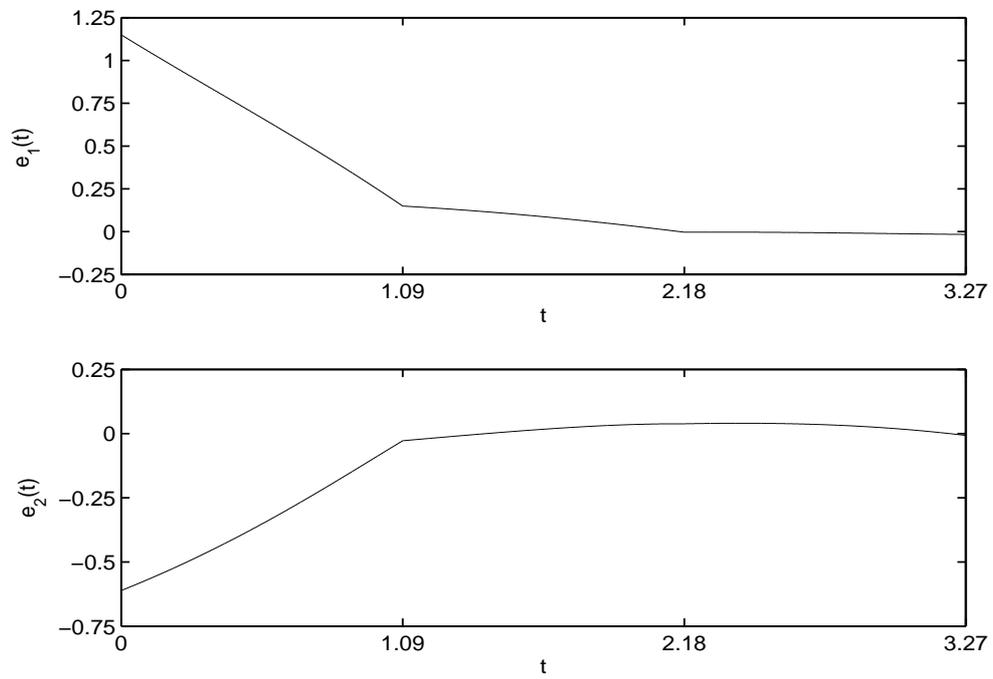


Figura 5.24: Vetor erro em  $[0; 3, 27]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

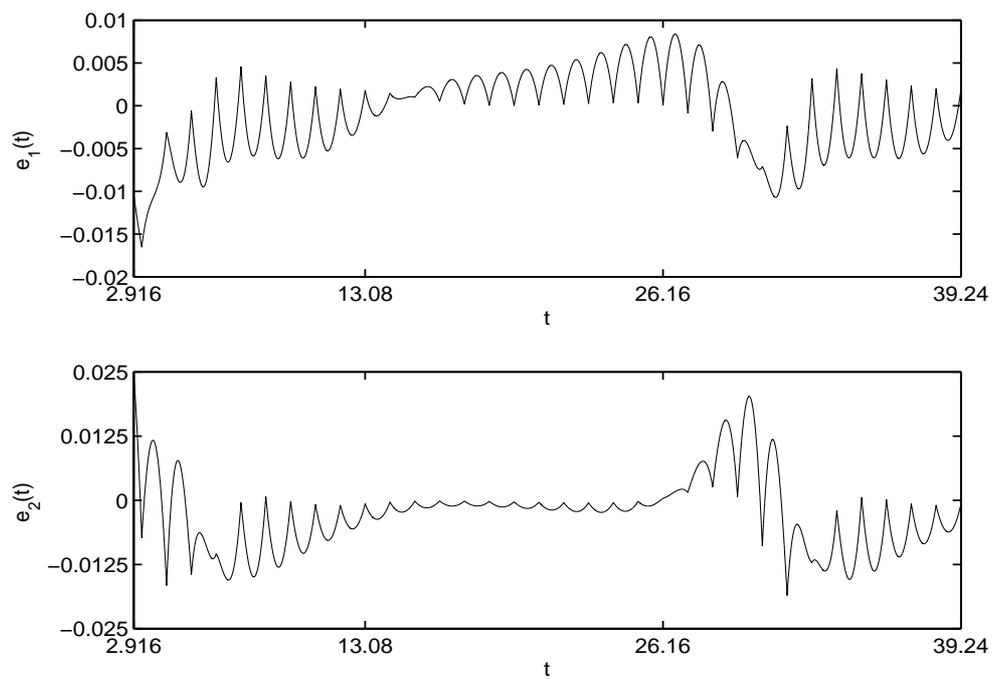


Figura 5.25: Vetor erro em  $[2, 916; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

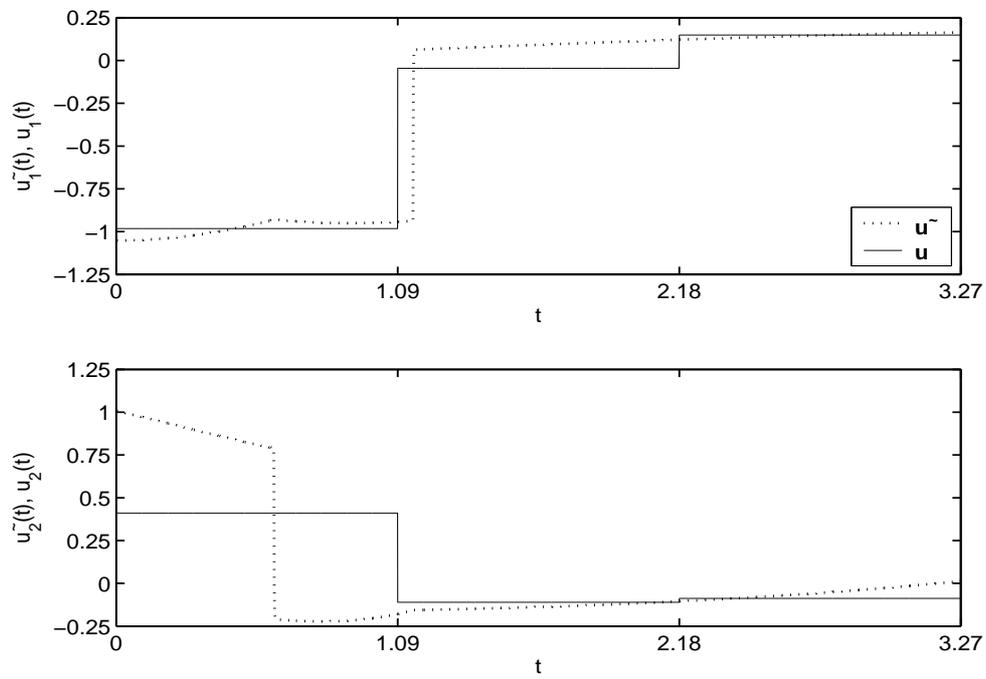


Figura 5.26: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[0; 3, 27]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

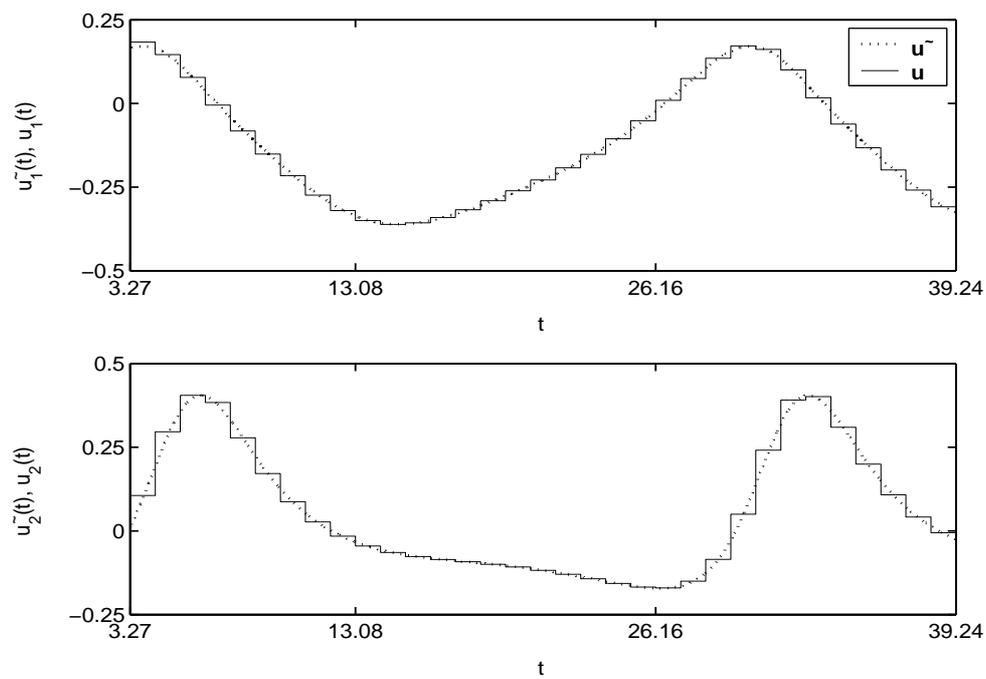


Figura 5.27: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $[3, 27; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

Vamos, agora, mostrar que, se substituirmos (5.26) por (5.14) na definição do vetor de controle  $\mathbf{u}$  em (5.5), haverá degradação nas componentes  $e_1$  e  $e_2$  do vetor erro  $\mathbf{e}$ . Considere o vetor de controle  $\mathbf{u}^m$  definido por (5.5) e (5.14)

$$\mathbf{u}^m(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_k^m &= [u_{k,1}^m \ u_{k,2}^m]', & \text{para } t \in I_k = [k\lambda, (k+1)\lambda), \quad k = 0, \dots, p-2, \\ \mathbf{u}_{p-1}^m &= [u_{p-1,1}^m \ u_{p-1,2}^m]', & \text{para } t \in I_{p-1} = [(p-1)\lambda, \Delta], \end{cases} \quad (5.71)$$

onde

$$u_{k,j}^m = \frac{1}{\lambda} \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \tilde{u}_j(t) dt, \quad (5.72)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . Em termos de suas componentes  $\mathbf{u}^m = [u_1^m \ u_2^m]'$ . Relembre que (5.72) é o valor médio de  $\tilde{u}_j|I_k$ . Por esta razão,  $\mathbf{u}^m$  será denominado de *controle médio*. Recordamos, ainda, que, apesar de  $u_{k,j}^m$  ser a “melhor” aproximação de  $\tilde{u}_j|I_k$  por uma constante em relação à função custo (5.10), a aplicação de  $\mathbf{u}^m$  em (5.41) causa um efeito acumulativo no desvio de estado  $\Theta((k+1)\lambda)$  em  $t = (k+1)\lambda$ , de acordo com (5.25).

Definimos o *vetor erro de aproximação*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^m. \quad (5.73)$$

Segue então das definições de  $\mathbf{u}$  em (5.5) e (5.14), e de  $\mathbf{u}^m$  em (5.71)–(5.72) que

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_k &= [v_{k,1} \ v_{k,2}]', & \text{para } t \in I_k = [k\lambda, (k+1)\lambda), \quad k = 0, \dots, p-2, \\ \mathbf{v}_{p-1} &= [v_{p-1,1} \ v_{p-1,2}]', & \text{para } t \in I_{p-1} = [(p-1)\lambda, \Delta], \end{cases} \quad (5.74)$$

onde

$$v_{k,j} = \frac{1}{\lambda} \theta_j(k\lambda) = \frac{1}{\lambda} (\hat{x}_j(k\lambda) - \tilde{x}_j(k\lambda)), \quad (5.75)$$

para  $k = 0, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2$ . Em termos de suas componentes  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]'$ . Temos que  $\Theta(0) = \mathbf{0}$ , pois  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(0)$ . Conseqüentemente,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t \in I_0 = [0, \lambda)$ , ou seja,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^m(t)$  para todo  $t \in I_0 = [0, \lambda)$ . Voltando ao problema de seguimento (5.41)–(5.46), aplicaremos o vetor de controle  $\mathbf{u}^m$  no sistema (5.41) ao invés de  $\mathbf{u}$ , com o objetivo de compararmos os desempenhos resultantes entre  $\mathbf{u}^m$  e  $\mathbf{u}$ . Especificaremos, uma vez mais,  $\lambda = 1,09$  ( $p = 36$ ). A Figura 5.28 apresenta as trajetórias de SR e de SC. O vetor erro é mostrado na Figura 5.29. Comparando então a Figura 5.28 com a Figura 5.7, e a Figura 5.29 com a Figura 5.9, vemos que a precisão de seguimento obtida com o sinal de controle  $\mathbf{u}^m$  é visivelmente pior do que a obtida com o sinal de controle  $\mathbf{u}$

proposto neste trabalho. Isto é uma possível indicação de que foi o efeito acumulativo em  $\Theta((k+1)\lambda)$  que deteriorou a precisão de seguimento. Desse modo, justificamos a definição proposta para o vetor de controle  $\mathbf{u}$  através de (5.5) e (5.26).

O vetor erro de aproximação  $\mathbf{v}$  é apresentado nas Figuras 5.30 e 5.31. Note que os valores absolutos máximos assumidos por  $v_1$  e  $v_2$  ocorreram no intervalo  $I_1 = [1,09; 2,18)$ . Explicaremos esta constatação no que se segue. De acordo com as Figuras 5.10 e 5.11, vemos que os valores absolutos máximos dos erros entre  $u_1$  e  $\tilde{u}_1$ , e entre  $u_2$  e  $\tilde{u}_2$ , ocorreram no intervalo  $I_0 = [0; 1,09)$ . E é justamente em  $t = \lambda = 1,09$  que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  assumiram seus valores absolutos máximos em relação aos instantes  $t = k\lambda$  do intervalo  $[\lambda, \Delta] = [1,09; 39,24]$ , para  $k = 1, \dots, 36$ , como pode ser visto pelas Figuras 5.16 e 5.17. Conseqüentemente, serão  $\theta_1(\lambda)$  e  $\theta_2(\lambda)$  que determinarão  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente, no intervalo  $I_1 = [1,09; 2,18)$ , através de  $v_{1,1}$  e  $v_{1,2}$  em (5.74)–(5.75).

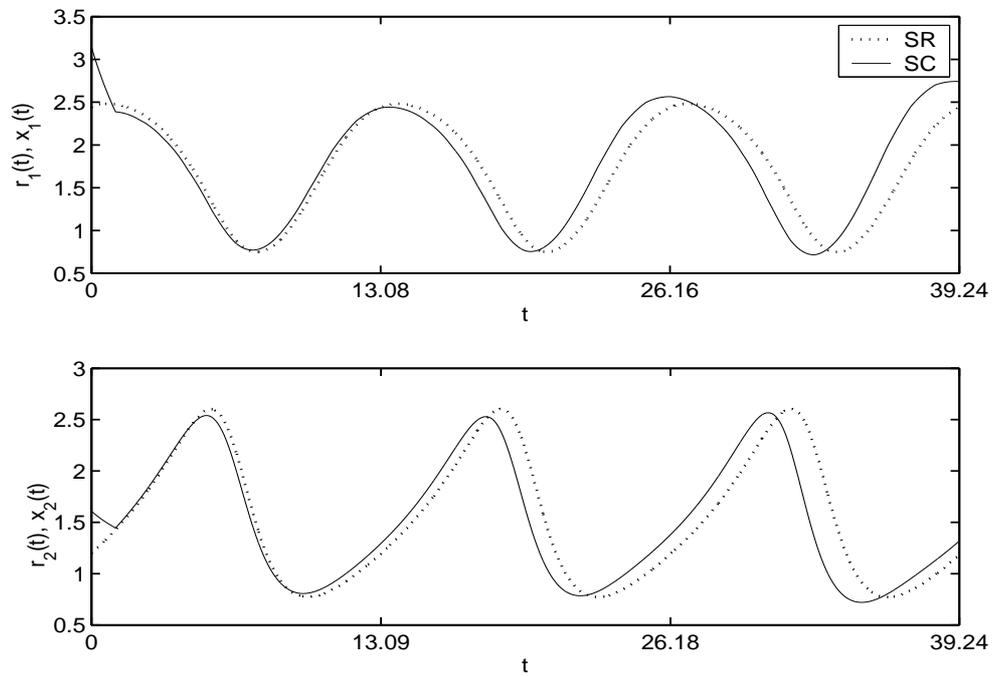


Figura 5.28: Trajetórias de SR e de SC para  $\lambda = 1,09$ , aplicando  $\mathbf{u}^m$ .

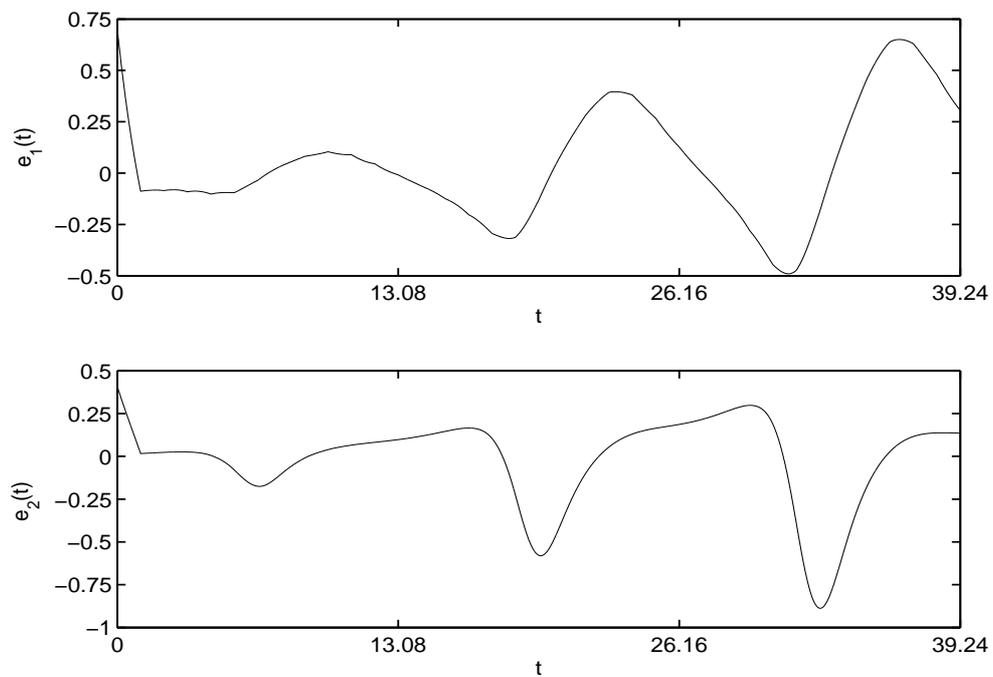


Figura 5.29: Vetor erro para  $\lambda = 1,09$ , aplicando  $\mathbf{u}^m$ .

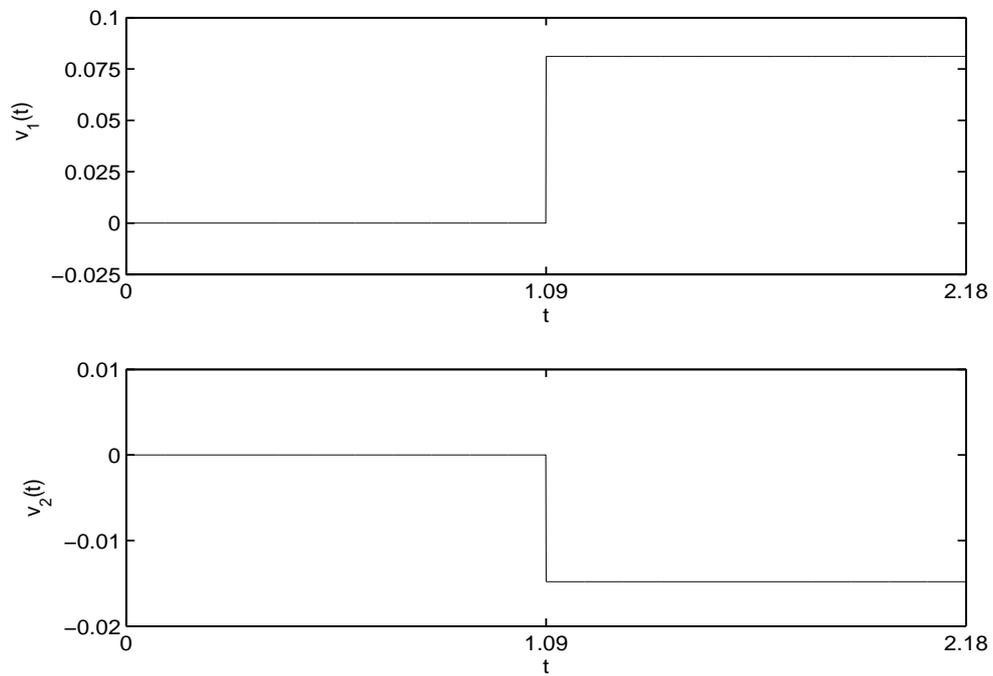


Figura 5.30: Vetor erro de aproximação em  $[0; 2, 18]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

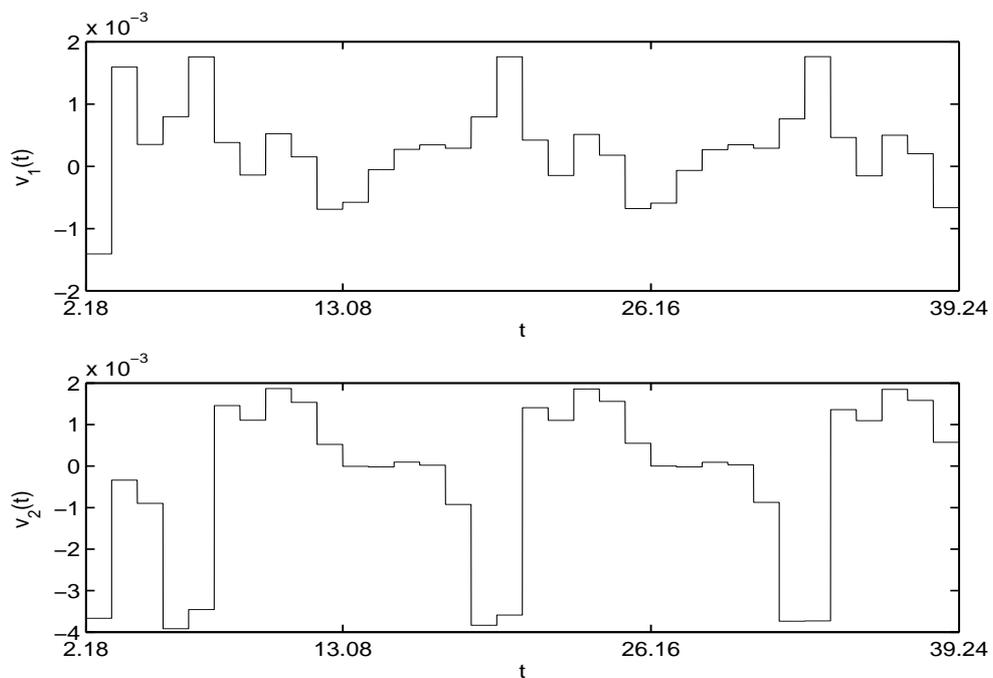


Figura 5.31: Vetor erro de aproximação em  $[2, 18; 39, 24]$  para  $\lambda = 1, 09$ .

## 5.2.2 Caso 2 – Recuperação Ambiental

Neste momento, uma situação de recuperação ambiental será discutida para o sistema presa-predador isolado (2.16)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\gamma}\right) - \frac{x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1}, \\ \frac{d}{dt}x_2 &= \frac{\beta\delta x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2,\end{aligned}\tag{5.76}$$

com parâmetros (5.42)

$$\begin{aligned}\alpha &= 5, 2, \\ \beta &= 2, 0, \\ \gamma &= 4, 1, \\ \delta &= 2, 5,\end{aligned}\tag{5.77}$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$  é o vetor de estado. Conforme já apresentado, o plano de fase correspondente é o da Figura 2.8.e. Suponha que

$$\mathbf{x}_0 = [2, 2304 \ 0, 1664]'. \tag{5.78}$$

Para esta condição inicial, o estado  $\mathbf{x}_0$  está localizado fora das separatrizes indicadas no plano de fase. Conseqüentemente, as trajetórias irão convergir para o ponto de equilíbrio estável  $\mathbf{x}_e = [4, 1 \ 0]'$  no eixo  $x_1$  e os predadores serão extintos, apesar de o tamanho da população normalizada de presas  $x_1(0)$  em  $t = 0$  ser “muito maior” do que o tamanho normalizado da população de predadores  $x_2(0)$ . Uma explicação para isto é dada a seguir. Relembramos que o modelo (2.13)–(2.14) utiliza uma resposta funcional tipo IV, na qual a taxa de captura *per capita* dos predadores decresce quando o número de presas é suficientemente alta devido à defesa em grupo das presas ou à toxicidade delas. Portanto, para a condição inicial (5.78), os predadores não conseguirão mais diminuir o tamanho da população de presas e, assim, não serão mais capazes de obter alimentos suficientes para a sua sobrevivência. Em decorrência disto, eles entrarão em processo de extinção (Kot, 2000).

Assumiremos que, anteriormente a  $t = 0$ , o sistema estava em equilíbrio ecológico e que as trajetórias do sistema presa-predador oscilavam no ciclo limite estável da Figura 2.8.e, mas alguma perturbação fez com que o vetor de estado saísse do domínio de atração

do ciclo limite. Portanto, a intervenção humana é necessária para restaurar a dinâmica natural do sistema isolado, e, com isso, evitar uma catástrofe ambiental. Este objetivo será alcançado se formos capazes de colocar o vetor de estado do sistema controlado de volta na referida bacia de atração, através de uma política de gerenciamento ambiental propícia. Na seqüência, mostraremos como isto poderá ser feito.

Considere o sistema não-isolado correspondente a (5.76)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}, \quad (5.79)$$

com parâmetros (5.77) e condição inicial (5.78). Uma alternativa para posicionarmos o vetor de estado  $\mathbf{x}$  no domínio de atração do ciclo limite original do sistema isolado é fazer com que  $\mathbf{x}$  siga um determinado estado de referência  $\mathbf{r}$  que entre nesta região. Com este propósito, os parâmetros do sistema de referência (5.43)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (5.80)$$

são especificados como

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 5, 2, \\ \beta_r &= 2, 0, \\ \gamma_r &= 2, 5, \\ \delta_r &= 2, 5, \end{aligned} \quad (5.81)$$

pois o plano de fase é o mostrado na Figura 2.8.b. Note que todas as trajetórias no primeiro quadrante convergem para o ponto de equilíbrio estável  $\mathbf{r}_e = [1, 3510 \ 1, 2418]'$ , o qual está localizado dentro do ciclo limite original do sistema isolado e, portanto, dentro do domínio de atração deste (veja a Figura 2.8.e). A condição inicial do sistema de referência é então escolhida como

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0. \quad (5.82)$$

Os planos de fase e as trajetórias de SR e de SI são mostrados nas Figuras 5.32 e 5.33, respectivamente. Observe que o estado de referência, ao convergir para o ponto de equilíbrio  $\mathbf{r}_e$ , atinge o domínio de atração do ciclo limite original do sistema isolado.

No instante  $t_{si} = 10,9$ , o estado de referência é igual a

$$\mathbf{r}_{si} \triangleq \mathbf{r}(t_{si}) = [1, 9709 \ 0, 9736]'. \quad (5.83)$$

Como podemos ver pela Figura 5.32,  $\mathbf{r}_{si}$  está dentro do ciclo limite original do sistema

isolado. Tendo em vista o exposto acima, propomos a seguinte estratégia de controle para o sistema: (i) forçar o estado  $\mathbf{x}$  a seguir  $\mathbf{r}$  durante o intervalo  $I = [0, t_{si}] = [0; 10, 9]$  através da ação humana; e (ii) manter o sistema (5.79) livre da ação humana para todo  $t > t_{si} = 10,9$ , pois, a partir do momento que o isolarmos, suas trajetórias voltarão a oscilar no ciclo limite original. Aplicando o esquema de controle proposto, um sinal de controle  $\mathbf{u}$  constante por partes será obtido para o intervalo  $I = [0; 10, 9]$ . E, para mantermos o sistema (5.79) livre da ação humana após  $t = t_{si}$ , definimos

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{para todo } t > t_{si} = 10,9, \quad (5.84)$$

ou seja, para todo  $t > t_{si}$  o sistema (5.79) nada mais é do que o sistema isolado (5.76).

Consideramos, novamente, que o estado é medido com período  $\Delta = 39,24$  e, uma vez mais, escolhemos  $p = 36$  em (5.4), ou seja,  $\lambda = 1,09$ . Nas Figuras 5.34 e 5.35 são mostrados, respectivamente, os planos de fase e as trajetórias de SR e de SC. São apresentados também o plano de fase e as trajetórias resultantes da suspensão da ação humana sobre o sistema (5.79) após  $t_{si} = 10,9$ , ou seja, a dinâmica correspondente do sistema isolado (SI) para todo  $t > t_{si}$ . Percebemos que, a partir do momento que isolamos o sistema (5.79), as trajetórias do sistema isolado realmente voltaram a oscilar no ciclo limite original. Como vemos pela Figura 5.36, uma precisão de seguimento satisfatória é obtida durante o intervalo de controle  $I = [0; 10, 9] = [0; 10\lambda]$  para a escolha de  $\lambda = 1,09$ . Apesar de as amplitudes das componentes  $e_1$  e  $e_2$  serem crescentes em  $I$ , simulações mostraram que, caso exigíssemos que  $\mathbf{x}$  seguisse  $\mathbf{r}$  durante todo o intervalo  $[0, \Delta] = [0; 39,24]$ , teríamos

$$\|\mathbf{e}\| \leq 0,0115, \quad \text{para } t \in [0; 39,24], \quad (5.85)$$

de modo que o vetor erro permanece limitado por um valor razoável em todo o intervalo  $[0; 39,24]$ . Os sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  no intervalo de controle  $I$  são mostrados na Figura 5.37. Observe que os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  poderão ser implementados no sistema real através de uma política de gerenciamento ambiental, possibilitando, assim, a restauração da dinâmica natural do sistema isolado e a recuperação ambiental do sistema presa-predador. Constatamos, ainda, que somente o sinal de controle  $u_2$  referente aos predadores assume valores positivos em determinados intervalos, isto é, a introdução de novos indivíduos é exigida apenas para a espécie predadora. Porém, vemos pela Figura 5.37 que estes valores são de magnitudes relativamente pequenas. Desse modo, consideraremos a restrição (5.58)

$$u_{k,j} > 0 \Rightarrow u_{k,j} = 0, \quad (5.86)$$

para  $k = 0, \dots, 9$ ,  $j = 1, 2$ , caso não seja possível a introduzir novos predadores no ecossistema. As Figuras 5.38 e 5.39 mostram o vetor erro e os sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  em  $I$ , respectivamente, adotando a restrição (5.86). Observamos que, pela Figura 5.38, a precisão de seguimento ainda é satisfatória, sendo praticamente igual a obtida na Figura 5.36, onde a condição (5.86) não foi considerada. Os planos de fase e as trajetórias de SC, de SR e de SI não são apresentados, pois são praticamente idênticas às das Figuras 5.34 e 5.35, respectivamente. Portanto, concluímos que é de fato possível restaurarmos a dinâmica natural do sistema isolado (5.76)–(5.78) através da extração das presas e dos predadores no intervalo  $I = [0; 10, 9]$ , não havendo necessidade de introduzir novos indivíduos, o que contraria nossa noção intuitiva. Este resultado inesperado ressalta a importância de buscarmos a interdisciplinariedade entre as diversas áreas de conhecimento (se é que tem sentido em falarmos de fragmentação do conhecimento), pois, afinal, este é universal. Ficou claro que o resgate da interdependência entre a Ecologia, a Engenharia e a Matemática, apenas para citar algumas, é fundamental para o entendimento da realidade e da maneira como nossa própria espécie se relaciona com a natureza.

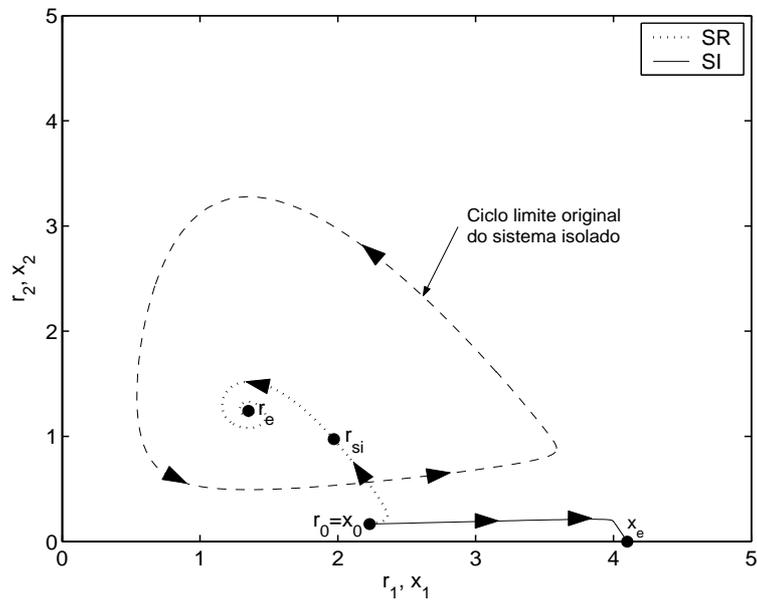


Figura 5.32: Planos de fase de SR e de SI, indicando o estado  $\mathbf{r}_{si}$  no qual o vetor de referência está dentro do ciclo limite original do sistema isolado.

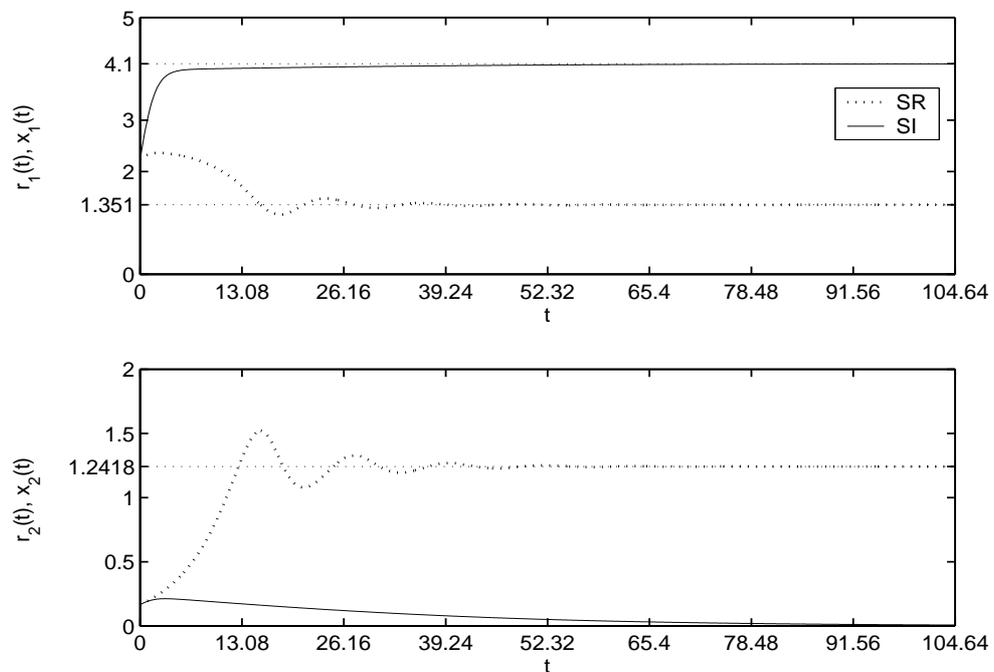


Figura 5.33: Trajetórias de SR e de SI, indicando  $\mathbf{r}_e = [1, 3510 \ 1, 2418]'$  e  $\mathbf{x}_e = [4, 1 \ 0]'$ .

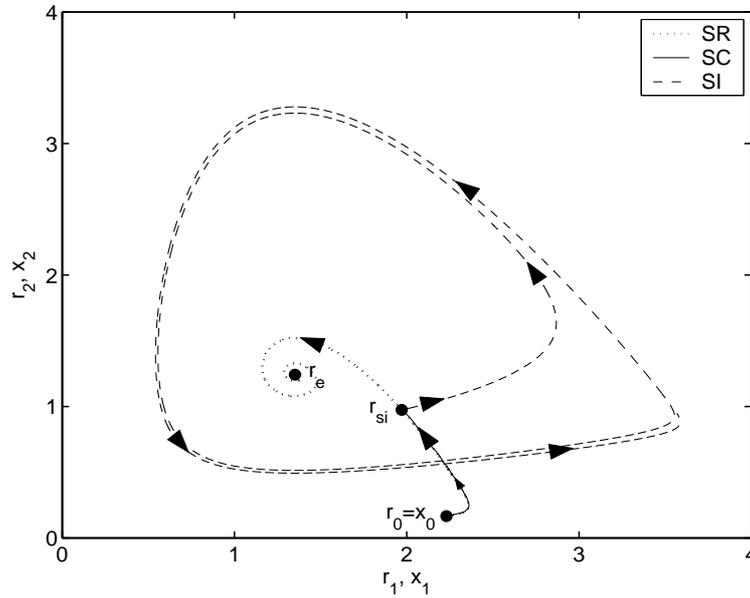


Figura 5.34: Planos de fase de SR, de SC e de SI. Após  $t_{si} = 10,9$  o sistema controlado é isolado.

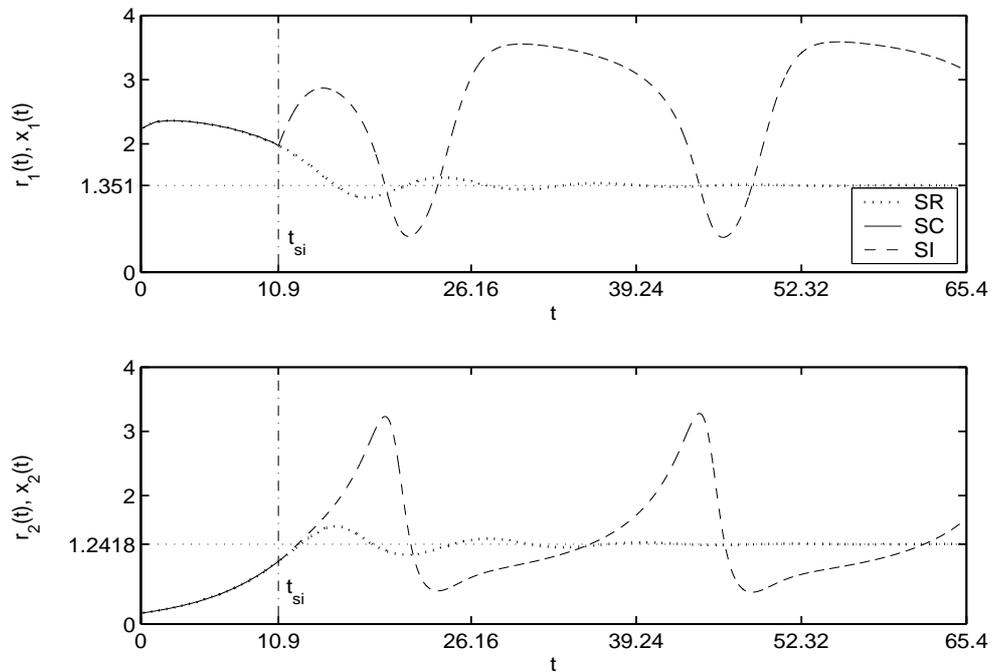


Figura 5.35: Trajetórias de SR, de SC e de SI, indicando  $\mathbf{r}_e = [1, 3510 \quad 1, 2418]'$ . Após  $t_{si} = 10,9$  o sistema controlado é isolado.

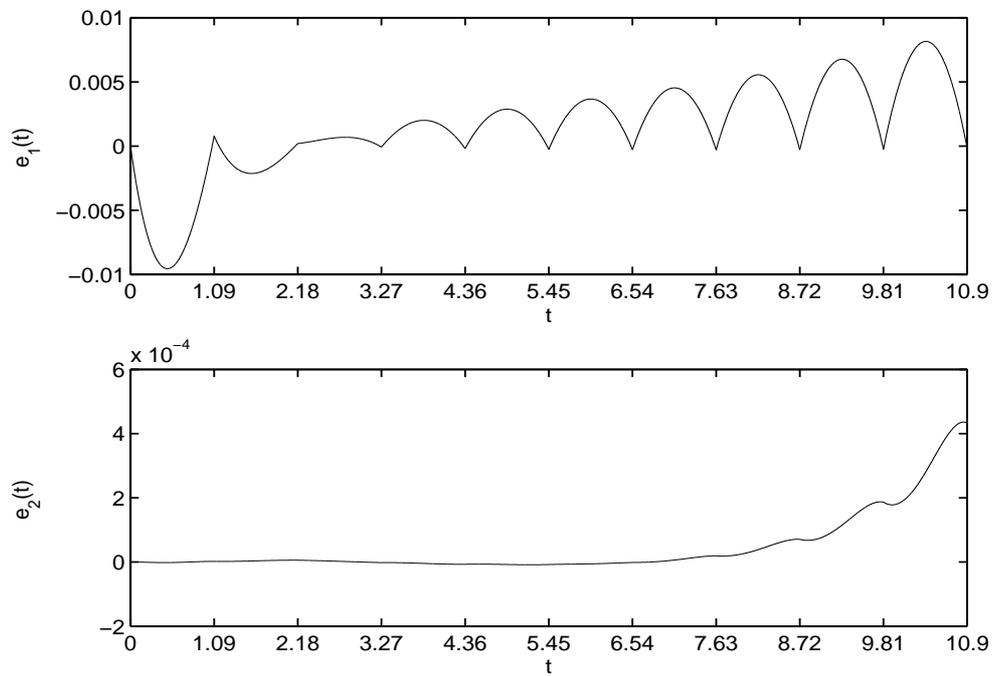


Figura 5.36: Vetor erro no intervalo de controle  $I = [0; 10, 9]$ .

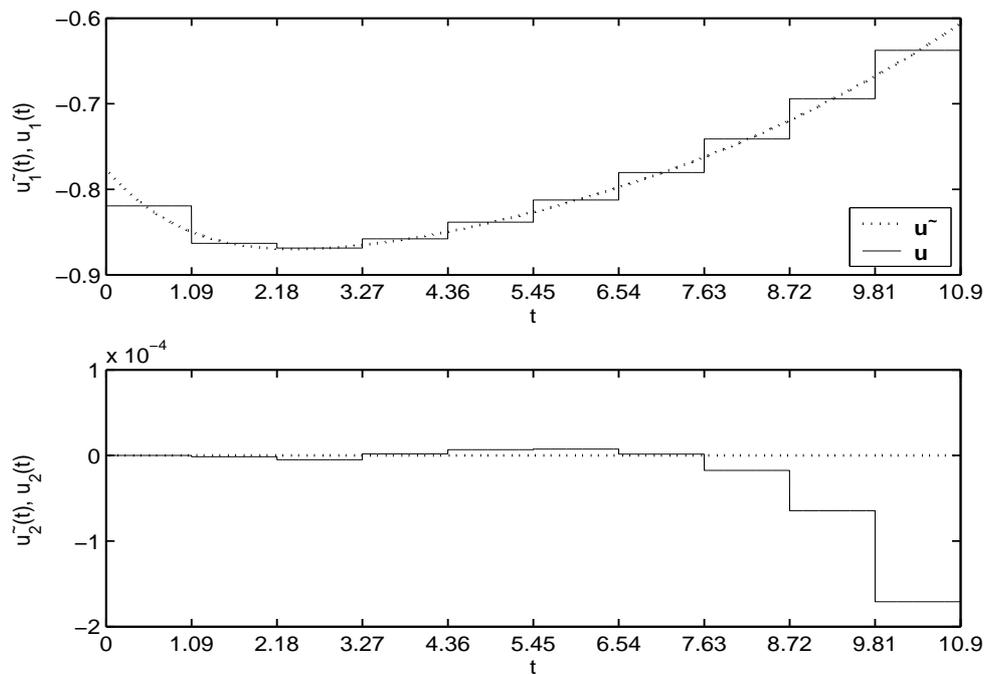


Figura 5.37: Sinais  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  no intervalo de controle  $I = [0; 10, 9]$ .

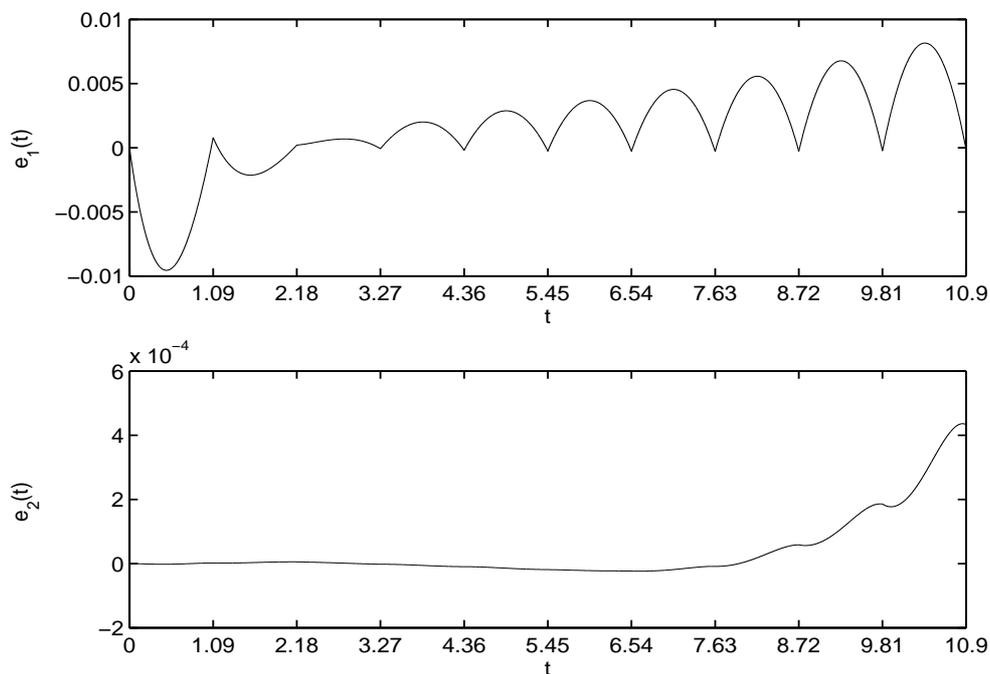


Figura 5.38: Vetor erro no intervalo de controle  $I = [0; 10, 9]$ , com a restrição de  $u_1$  e  $u_2$  não assumirem valores positivos.

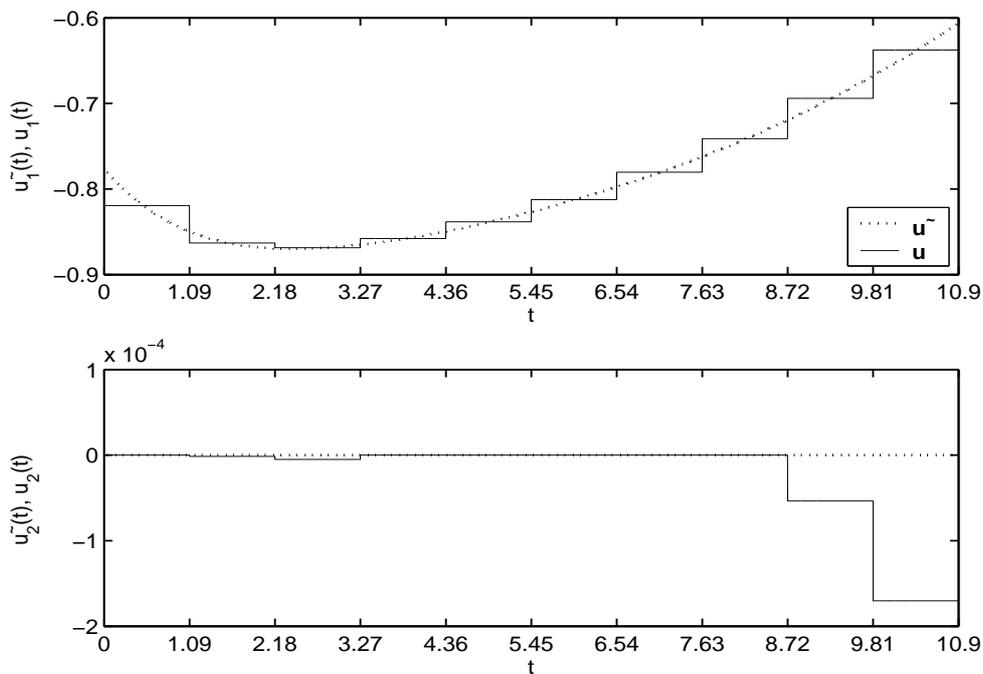


Figura 5.39: Sinais  $\tilde{u}$  e  $u$  no intervalo de controle  $I = [0; 10, 9]$ , com a restrição de  $u_1$  e  $u_2$  não assumirem valores positivos.

# Capítulo 6

## Identificação do Sistema Presa-Predador Isolado

Vimos no capítulo anterior que a estratégia de controle desenvolvida assume que o modelo do sistema presa-predador isolado (2.13) seja completamente conhecido e invariante no tempo. Mostraremos no presente capítulo que, com o conhecimento prévio de apenas alguns dos parâmetros do modelo (2.13), poderemos estimar os demais a partir de poucas medições periódicas dos tamanhos das populações de presas e de predadores. Conseqüentemente, comprovaremos que a hipótese de que o sistema seja completamente conhecido é factível, e a estratégia de controle proposta poderá ser aplicada. Como é assumido que o sistema seja invariante no tempo, poderemos utilizar o método de estimação por mínimos quadrados. A validade desta abordagem para a identificação do sistema presa-predador isolado (2.13) será verificada por simulação. Relembramos que as populações são medidas periodicamente, por hipótese, e, assim, não são aplicáveis técnicas *on-line* de estimação de parâmetros. Antes de formalizarmos o método de identificação, faremos uma breve explanação sobre as dificuldades encontradas por ecologistas em levantamentos de campo.

É fato que os ecologistas geralmente lidam com dados obtidos em campo que são altamente deficientes em detalhes. As três principais razões que procuram explicar esta constatação são as seguintes (Begon et al., 1996):

1. É extremamente difícil de se realizar um monitoramento completo ao longo de todo o ciclo de vida dos indivíduos de uma determinada população, apesar de o acompanhamento poder ser considerado uma tarefa simples em algumas etapas do de-

envolvimento da espécie como, por exemplo, a contagem de pássaros durante o período de desenvolvimento no ninho. Ademais, muitas vezes determinado estágio do ciclo de vida não pode ser observado como, por exemplo, o período em que filhotes de coelhos permanecem escondidos em tocas. Existem técnicas específicas para o monitoramento de algumas espécies. É possível marcar pássaros com anéis numerados colocados em suas pernas, peixes jovens com placas de metal e carnívoros que rondam determinada área com radio-transmissores. No entanto, para podermos realizar um censo por estes métodos, dependemos muito da espécie e do número de indivíduos em questão, de modo que nem sempre tornar-se-á aplicável. Além disso, quando existe dispersão populacional, o problema se torna ainda maior.

2. Para que o censo não conduza a conclusões errôneas, é preciso que a amostragem seja feita de maneira adequada em relação ao espaço e ao tempo. Mas, tal exigência é quase sempre sinônimo de grande dispêndio de tempo e de custos elevados. Citamos, ainda, que o tempo de vida dos pesquisadores, a pressa e a ansiedade em se produzir trabalhos que possam vir a ser publicados, e a curta duração da maioria dos projetos de pesquisa, desencorajam muitas pessoas a começarem a fazer um levantamento de censo sobre períodos de tempo relativamente longos. Felizmente, existem alguns poucos notáveis exemplos de censos que abrangem longos períodos, sobre os quais grande parte da teoria de populações está baseada.
3. A experiência adquirida ao longo dos anos constatou que, à medida que o conhecimento sobre as populações aumenta, os procedimentos utilizados nos censos devem ser aprimorados para acompanharem tal evolução. Os ecologistas afirmam que, de grosso modo, todo o procedimento integrante de um censo tem grandes chances de estar ultrapassado assim que ele começa ser aplicado. Até os anos de 1980, por exemplo, acreditava-se que a imigração e emigração populacional poderia ser desprezada dependendo dos objetivos buscados pelo censo, pois uma acabaria compensando a outra. Este paradigma foi derrubado quando se percebeu que o saldo entre os que estão imigrando e os que ficam para trás pode, de fato, determinar o número de indivíduos de populações encontradas na natureza.

Portanto, levando em conta os problemas supracitados em se obter dados de campo, juntamente com a escassez dos mesmos, propomos uma maneira relativamente simples e direta de estimarmos os parâmetros  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$ , assumindo que  $a$ ,  $c$  e  $r$  são conhecidos,

do modelo do sistema presa-predador isolado (2.13)–(2.14),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}N &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{cNP}{\frac{N^2}{i} + N + a}, \\ \frac{d}{dT}P &= \frac{bcNP}{\frac{N^2}{i} + N + a} - mP.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Definimos o *vetor de parâmetros*  $\mathbf{v} = [b \ i \ K \ m]' \in \mathbb{R}^4$ , correspondendo aos parâmetros que são desconhecidos. Como  $a$ ,  $c$  e  $r$  em (6.1) são assumidos conhecidos, a medição de  $N(T)$  e de  $P(T)$  no instante de tempo  $T$  determina as variáveis de estado  $x_1(rT) = N(T)/a$  e  $x_2(rT) = cP(T)/ra$  no instante tempo normalizado  $t = rT$ , respectivamente, do modelo (2.16)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\gamma}\right) - \frac{x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1}, \\ \frac{d}{dt}x_2 &= \frac{\beta\delta x_1x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2,\end{aligned}\tag{6.2}$$

pois, de acordo com (2.15),

$$x_1 \triangleq \frac{N}{a}, \quad x_2 \triangleq \frac{c}{ra}P, \quad t \triangleq rT.\tag{6.3}$$

Temos também que

$$b = \frac{r}{c}\beta\delta, \quad i = a\alpha, \quad K = a\gamma, \quad m = r\delta,\tag{6.4}$$

das relações em (2.17). Assim, uma estimativa dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  de (6.2) determina univocamente uma estimativa dos parâmetros  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$  de (6.1) através de (6.4).

Nossa idéia é estimar os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  de (6.2) a partir de poucas medições feitas somente sobre o vetor de estado  $\mathbf{x}$ ; mais precisamente, por meio de medições periódicas do estado. Em outras palavras, os quatro referidos parâmetros serão estimados sem a necessidade de se medir  $\mathbf{x}$  a cada instante de tempo e nem de se buscar um levantamento de qualquer outra grandeza ou atributo do sistema. Tal objetivo pode ser alcançado através do método de estimação por mínimos quadrados (Ljung e Glad, 1994; Slotine, 1991), que é o que propomos neste trabalho devido à hipótese ( $A_2$ ) feita sobre o sistema no início do Capítulo 5.

Suponha que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  do modelo do sistema presa-predador isolado (6.2) são desconhecidos, porém invariantes no tempo. Definimos o *vetor de parâmetros normalizado*  $\mathbf{p} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta]' \in \mathbb{R}^4$ . Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}}) &= \bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}}) \left( 1 - \frac{\bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}})}{\bar{\gamma}} \right) - \frac{\bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}})\bar{x}_2(t, \bar{\mathbf{p}})}{\frac{\bar{x}_1^2(t, \bar{\mathbf{p}})}{\bar{\alpha}} + \bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}}) + 1}, \\ \frac{d}{dt}\bar{x}_2(t, \bar{\mathbf{p}}) &= \frac{\bar{\beta}\bar{\delta}\bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}})\bar{x}_2(t, \bar{\mathbf{p}})}{\frac{\bar{x}_1^2(t, \bar{\mathbf{p}})}{\bar{\alpha}} + \bar{x}_1(t, \bar{\mathbf{p}}) + 1} - \bar{\delta}\bar{x}_2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]'$  é o *vetor de estado predito*,  $\bar{\mathbf{p}} = [\bar{\alpha} \ \bar{\beta} \ \bar{\gamma} \ \bar{\delta}]'$  e a condição inicial é  $\bar{\mathbf{x}}(0, \bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{x}(0)$ . Com a notação  $\bar{\mathbf{x}}(t, \bar{\mathbf{p}})$  enfatizamos o fato de que a trajetória  $\bar{\mathbf{x}}$  depende de  $t$  e de  $\bar{\mathbf{p}}$ .

O *erro de predição* no instante  $t$  é dado por (Ljung e Glad, 1994; Slotine, 1991)

$$\bar{\mathbf{e}}(t, \bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{x}}(t, \bar{\mathbf{p}}) - \mathbf{x}(t). \quad (6.6)$$

Se pudéssemos medir o vetor de estado  $\mathbf{x}$  a cada instante de tempo, uma estimativa  $\bar{\mathbf{p}}$  do vetor de parâmetros normalizado  $\mathbf{p}$  poderia ser obtida *on-line*. Um dos métodos propostos em (Slotine, 1991) consiste em determinar  $\bar{\mathbf{p}}$  que minimize o *erro de predição total* dado por

$$F(\bar{\mathbf{p}}) \triangleq \int_0^t \|\bar{\mathbf{e}}(u, \bar{\mathbf{p}})\|_2^2 du = \int_0^t \|\bar{\mathbf{x}}(u, \bar{\mathbf{p}}) - \mathbf{x}(u)\|_2^2 du \quad (6.7)$$

no instante  $t$ , onde  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $\|\cdot\|_2$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ . Desta forma, o valor de  $\bar{\mathbf{p}}$  que minimiza (6.7), denotado por  $\bar{\mathbf{p}}^*$ , é uma estimativa do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$ . No entanto, como assumimos que o vetor de estado  $\mathbf{x}$  seja medido com período  $\Delta$  (hipótese  $(A_2)$ ), uma estimativa *off-line* tem que ser realizada. Mostraremos como isto poderá ser feito no que se segue.

Considere que  $N \in \mathbb{Z}^+$  medições consecutivas foram feitas durante o *intervalo de medição*  $M = [0, (N-1)\Delta]$ , sendo que a primeira ocorreu em  $t = 0$ . Temos então conhecimento dos  $N$  vetores de estado do sistema real

$$\mathbf{x}(q\Delta), \quad q = 0, \dots, N-1. \quad (6.8)$$

Portanto, ao invés de minimizarmos (6.7), procuramos encontrar um vetor  $\bar{\mathbf{p}}$  que minimize

a função  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por (Ljung e Glad, 1994)

$$F(\bar{\mathbf{p}}) \triangleq \sum_{q=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{e}}(q\Delta, \bar{\mathbf{p}})\|_2^2 = \sum_{q=0}^{N-1} (\bar{x}_1(q\Delta, \bar{\mathbf{p}}) - x_1(q\Delta))^2 + (\bar{x}_2(q\Delta, \bar{\mathbf{p}}) - x_2(q\Delta))^2, \quad (6.9)$$

onde as variáveis de estado  $\bar{x}_1(q\Delta, \bar{\mathbf{p}})$  e  $\bar{x}_2(q\Delta, \bar{\mathbf{p}})$  são obtidas numericamente da equação diferencial (6.5) com parâmetro  $\bar{\mathbf{p}}$  e condição inicial  $\bar{\mathbf{x}}(0, \bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{x}(0)$ , para  $q = 0, \dots, N-1$ . O valor de  $\bar{\mathbf{p}}$  que minimiza (6.9), determinado através de um algoritmo de minimização, é denotado por  $\bar{\mathbf{p}}^*$ . É evidente que para  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ , temos  $F(\mathbf{p}) = 0$ . Assim, concluímos que se  $\bar{\mathbf{p}}^* = \mathbf{p}$ , então  $\bar{\mathbf{p}}^*$  é um ponto de mínimo global de  $F$  sobre  $\mathbb{R}^4$ , ou seja, existe um ponto de mínimo global. No entanto, constatamos por simulação que  $F$  apresenta pontos de mínimo relativos. Desse modo, um determinado algoritmo utilizado para minimizar  $F$  poderá convergir para um ponto de mínimo relativo  $\bar{\mathbf{p}}^*$ , dado um vetor inicial  $\bar{\mathbf{p}}_0$ . Aparentemente, isto é um sério problema para o nosso objetivo de estimação paramétrica, mas, como indicaremos, é facilmente contornável. Para verificarmos se  $\bar{\mathbf{p}}^*$  é um ponto de mínimo global, basta obtermos o valor de  $F(\bar{\mathbf{p}}^*)$ . Se  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 0$ , então  $\bar{\mathbf{p}}^*$  é um ponto de mínimo global de  $F$  sobre  $\mathbb{R}^4$ . Caso contrário, se  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) > 0$ , então  $\bar{\mathbf{p}}^*$  é um ponto de mínimo relativo. Neste caso, devemos continuar executando o algoritmo (com diferentes vetores iniciais  $\bar{\mathbf{p}}_0$ ) até que  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 0$  (critério de parada), ou seja, até que um ponto de mínimo global seja encontrado.

Salientamos que os comentários feitos acima a respeito de  $F(\bar{\mathbf{p}}^*)$  são válidos para o modelo de sistema presa-predador isolado (6.2), onde não foram considerados erros de modelagem ou de medição (caso ideal). Mas, na prática, é inevitável a presença destes tipos de incertezas. Assim, nestes casos, é evidente que determinado algoritmo de minimização sempre encontrará  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) \neq 0$ , independente da escolha do vetor inicial  $\bar{\mathbf{p}}_0$ .

Em resumo, a partir de  $N$  medições do estado  $\mathbf{x}$ , uma estimativa  $\bar{\mathbf{p}}^* = [\bar{\alpha}^* \ \bar{\beta}^* \ \bar{\gamma}^* \ \bar{\delta}^*]'$  do vetor de parâmetros normalizado  $\mathbf{p} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta]'$  é obtida de maneira que  $\bar{\mathbf{p}}^*$  seja um ponto de mínimo global de  $F$  em (6.9). Das relações em (6.4), as estimativas  $\bar{b}^*$ ,  $\bar{i}^*$ ,  $\bar{K}^*$  e  $\bar{m}^*$  de  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$ , respectivamente, são determinadas por

$$\bar{b}^* = \frac{r}{c} \bar{\beta}^* \bar{\delta}^*, \quad \bar{i}^* = a \bar{\alpha}^*, \quad \bar{K}^* = a \bar{\gamma}^*, \quad \bar{m}^* = r \bar{\delta}^*. \quad (6.10)$$

Denotamos por  $\bar{\mathbf{v}}^* = [\bar{b}^* \ \bar{i}^* \ \bar{K}^* \ \bar{r}^*]'$  o *vetor de parâmetros estimado*. O vetor  $\bar{\mathbf{v}}^*$  representa uma estimativa do vetor  $\mathbf{v}$ .

No presente estudo, para minimizarmos (6.9), utilizaremos a função `fminsearch`

do pacote de otimização do MATLAB 5.3, a qual implementa o método simplex de Nelder-Mead. Este é um método direto que não utiliza nem gradientes analíticos e nem gradientes numéricos, mas apenas os valores de  $F$ . Por fim, ressaltamos que `fminsearch` admite funções custo, tanto contínuas, quanto descontínuas<sup>1</sup>.

## 6.1 Resultados de Simulação

Mostraremos como podemos estimar os parâmetros  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$  do modelo do sistema presa-predador isolado (6.1) através da minimização de  $F$  em (6.9), considerando que  $a$ ,  $c$  e  $r$  são conhecidos. Os dados necessários para a identificação do sistema presa-predador isolado (6.1) foram obtidos por simulação do modelo (6.2), assumindo que os parâmetros  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $r$  de (6.1) são conhecidos. Isto caracterizará o caso ideal (sem erros de modelagem ou de medição). Assim, poderemos concluir sobre a efetividade do método de identificação se os parâmetros estimados  $\bar{b}^*$ ,  $\bar{i}^*$ ,  $\bar{K}^*$  e  $\bar{m}^*$  convergirem para  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$ , respectivamente.

Considere que os parâmetros  $a$ ,  $c$  e  $r$  do modelo (6.1) são dados por

$$\begin{aligned} a &= 500,0000, \\ c &= 2,5000, \\ r &= 0,5300, \end{aligned} \tag{6.11}$$

e que as componentes do vetor de parâmetros  $\mathbf{v} = [b \ i \ K \ m]'$  possuem os valores mostrados na Tabela 6.1. Conseqüentemente, a partir das relações em (2.17), de (6.11) e da Tabela 6.1, determinamos o vetor de parâmetros normalizado  $\mathbf{p} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta]'$  do modelo (6.2), sendo apresentado na Tabela 6.2.

O plano de fase correspondente do sistema (6.2) com parâmetros  $\mathbf{p}$  é o mostrado na Figura 2.8.e. Supomos, uma vez mais, que as trajetórias oscilam no ciclo limite indicado, lembrando que o período de oscilação é  $W_i = 26,46$  (em relação ao tempo normalizado  $t$ ). Por simplicidade, assumiremos que  $W_i = 26,46$  corresponda a quatro anos no sistema real.

Agora, seguiremos a metodologia descrita na seção anterior para estimarmos os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{v}$ . Suponha que o intervalo de medição é  $M = [0, W_i] = [0; 26,46]$  e que as  $N = 13$  medições do estado  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$  mostradas na Tabela 6.3 e na Figura 6.1 foram feitas.

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre o método simplex de Nelder-Mead, veja (Mat, 2002; Press et al., 1992).

<b>v</b>			
<i>b</i>	<i>i</i>	<i>K</i>	<i>m</i>
0,9138	2.500,0000	2.050,0000	1,3250

Tabela 6.1: Vetor de parâmetros **v**.

<b>p</b>			
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
5,2000	2,0000	4,1000	2,5000

Tabela 6.2: Vetor de parâmetros normalizado **p**.

Conforme já afirmado, estas medições foram obtidas pela simulação do modelo (6.2) com parâmetros **p**. Assim, o estado **x** é medido com período

$$\Delta = \frac{W_i}{N-1} = \frac{26,46}{12} = 2,2050, \quad (6.12)$$

ou seja, o estado é medido a cada seis meses, sob a hipótese de que 26,46 corresponda a quatro anos. O vetor inicial do algoritmo utilizado para minimizar a função  $F$  em (6.9) é especificado como

$$\bar{\mathbf{p}}_0 = [8,0000 \ 3,0000 \ 12,0000 \ 9,0000]'. \quad (6.13)$$

Na Tabela 6.4 são apresentados os resultados obtidos, onde  $\bar{\mathbf{p}}^*$  denota o vetor encontrado pelo algoritmo e  $\bar{\mathbf{v}}^*$  é o vetor de parâmetros estimado. Observe que  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 90,1275 > 0$ . Portanto,

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [5,9404 \ 5,2560 \ 2,1597 \ 9,4845]' \quad (6.14)$$

é um ponto de mínimo relativo de  $F$  sobre  $\mathbb{R}^4$ , não sendo, assim, uma estimativa adequada de **p**. Constatamos isto de fato analisando as componentes dos erros  $\bar{\mathbf{p}}^* - \mathbf{p}$  e  $\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}$ , as quais assumem valores relativamente altos de acordo com os nossos interesses. Devemos, então, selecionar um novo vetor inicial  $\bar{\mathbf{p}}_0$  com o objetivo de encontrarmos um ponto de mínimo global de  $F$ , pois sabemos que **p** é um deles. Através da escolha

$$\bar{\mathbf{p}}_0 = [4,0000 \ 3,0000 \ 6,0000 \ 1,5000]', \quad (6.15)$$

encontramos

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [5,19990 \ 2,0000 \ 4,0999 \ 2,4999]', \quad (6.16)$$

conforme vemos pela Tabela 6.5. Note que como  $F(\bar{\mathbf{p}}^*) \cong 0$ , segue que  $\bar{\mathbf{p}}^*$  é um ponto de mínimo global de  $F$ . Desse modo, determinamos as estimativas

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}}^* &= [5, 19990 \quad 2, 0000 \quad 4, 0999 \quad 2, 4999]', \\ \bar{\mathbf{v}}^* &= [1, 0599 \quad 2.599, 9932 \quad 2.049, 9958 \quad 1, 3249]',\end{aligned}\tag{6.17}$$

de  $\bar{\mathbf{p}}$  e  $\bar{\mathbf{v}}$ , respectivamente. Pela Tabela 6.5, percebemos que as componentes dos erros  $\bar{\mathbf{p}}^* - \mathbf{p}$  e  $\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}$  são muito pequenas em relação às de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{v}$ , respectivamente. Desta forma, verificamos a validade do método de identificação utilizado.

Para obtermos as estimativas (6.17), foram necessárias  $N = 13$  medições no intervalo  $M$ , correspondendo a um período de medição de seis meses. Contudo, este poderá ser um período inviável para algumas populações de presas e de predadores. Desse modo, especificando  $N = 3$ , temos que

$$\Delta = \frac{W_i}{N - 1} = \frac{26,46}{2} = 13,23,\tag{6.18}$$

o que corresponde ao estado  $\mathbf{x}$  ser medido a cada dois anos sistema real. Os estados medidos são mostrados na Tabela 6.6. Pela Tabela 6.7, percebemos que podemos obter estimativas tão boas com apenas 3 medições quanto às obtidas com 13 medições na Tabela 6.5.

Portanto, concluímos que, tendo conhecimento dos parâmetros  $a$ ,  $c$  e  $r$  em (6.1), poderemos estimar o restante dos parâmetros  $b$ ,  $i$ ,  $K$  e  $m$  através de medições periódicas dos estados, não sendo necessária a medição a cada instante de tempo. Conseqüentemente, a hipótese  $(A_1)$  feita no início do Capítulo 5 é possível ser atendida.

Os resultados de simulação apresentados mostraram que, para o caso ideal (sem erros de modelagem ou de medição), a obtenção do mínimo global de  $F$  acarretou na convergência de  $\bar{\mathbf{p}}^*$  para  $\mathbf{p}$ . Em outras palavras, uma estimativa de  $\mathbf{p}$  foi encontrada. Se este comportamento não tivesse sido constatado, ou seja, caso  $\bar{\mathbf{p}}^*$  não convergisse para  $\mathbf{p}$  para o caso ideal, então certamente não seria possível identificar o sistema presa-predador isolado (6.1) considerando erros de modelagem ou de medição.

$q$	$\mathbf{x}(q\Delta)$	
	$x_1(q\Delta)$	$x_2(q\Delta)$
0	3,1500	1,6100
1	2,8129	2,0834
2	2,0512	2,9288
3	0,6671	2,4091
4	0,8815	0,5603
5	2,3336	0,5784
6	3,3492	0,7535
7	3,5753	0,8466
8	3,5780	0,9253
9	3,5289	1,0206
10	3,4516	1,1487
11	3,3364	1,3317
12	3,1512	1,6123

Tabela 6.3: Valores medidos no intervalo  $M$  para  $N = 13$ .

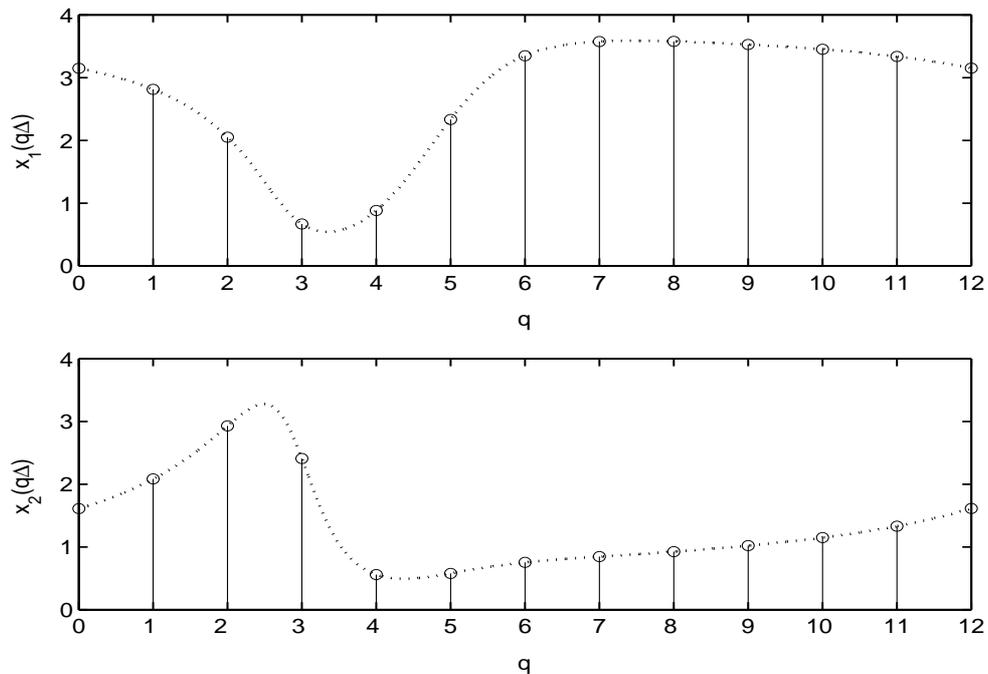


Figura 6.1: Medições feitas no intervalo  $M$  para  $N = 13$ .

$N = 13$						
$\bar{\mathbf{p}}_0$	$\bar{\mathbf{p}}^*$	$\mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{p}}^* - \mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{v}}^*$	$\mathbf{v}$	$\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}$
8,0000	5,9404	5,2000	0,7404	10,5683	1,0600	9,5083
3,0000	5,2560	2,0000	3,2560	2.970,1844	2.600,0000	370,1844
12,0000	2,1597	4,1000	-1,9403	1.079,8254	2.050,0000	-970,1746
9,0000	9,4845	2,5000	6,9845	5,0268	1,3250	3,7018
$F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 90,1275$						

Tabela 6.4: Resultados para  $N = 13$  e  $\bar{\mathbf{p}}_0 = [8,0000 \ 3,0000 \ 12,0000 \ 9,0000]'$ .

$N = 13$						
$\bar{\mathbf{p}}_0$	$\bar{\mathbf{p}}^*$	$\mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{p}}^* - \mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{v}}^*$	$\mathbf{v}$	$\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}$
4,0000	5,1999	5,2000	-1E-5	1,0599	1,0600	-9E-7
3,0000	2,0000	2,0000	8E-7	2.599,9932	2.600,0000	-7E-3
6,0000	4,0999	4,1000	-8E-6	2.049,9958	2.050,0000	-4E-3
1,5000	2,4999	2,5000	-3E-6	1,3249	1,3250	-2E-6
$F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 3E-9$						

Tabela 6.5: Resultados para  $N = 13$  e  $\bar{\mathbf{p}}_0 = [4,0000 \ 3,0000 \ 6,0000 \ 1,5000]'$ .

$\mathbf{x}(q\Delta)$		
$q$	$x_1(q\Delta)$	$x_2(q\Delta)$
0	3,1500	1,6100
1	3,3492	0,7535
2	3,1512	1,6123

Tabela 6.6: Valores medidos no intervalo  $M$  para  $N = 3$ .

$N = 3$						
$\bar{\mathbf{p}}_0$	$\bar{\mathbf{p}}^*$	$\mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{p}}^* - \mathbf{p}$	$\bar{\mathbf{v}}^*$	$\mathbf{v}$	$\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}$
4,0000	5,2000	5,2000	2E-6	1,0600	1,0600	-2E-5
3,0000	2,0000	2,0000	7E-7	2.600,0015	2.600,0000	2E-3
6,0000	4,0999	4,1000	-9E-7	2.049,9996	2.050,0000	-4E-4
1,5000	2,4999	2,5000	-4E-5	1,3250	1,3250	-2E-5
$F(\bar{\mathbf{p}}^*) = 2\text{E}-10$						

Tabela 6.7: Resultados para  $N = 3$  e  $\bar{\mathbf{p}}_0 = [4,0000 \ 3,0000 \ 6,0000 \ 1,5000]'$ .

# Capítulo 7

## Considerações Finais

A estratégia de controle formulada neste trabalho determinou sinais de controle constantes por partes para forçar os tamanhos das populações de presas e de predadores a seguir trajetórias de referência arbitrárias. Estes sinais foram obtidos *off-line* com base na metodologia CMD e pela medição periódica das populações, não sendo necessário medi-las a cada instante de tempo. A partir dos sinais de controle constantes por partes, políticas de gerenciamento capazes de serem implementadas por órgãos ambientais poderão ser definidas. Elas consistem no estabelecimento de taxas constantes de extração, se o sinal de controle for negativo, ou de introdução de novos indivíduos, se o sinal de controle for positivo, tanto para as presas, quanto para os predadores, que devam ser cumpridas pela sociedade. Estas taxas ficam estipuladas numa base de tempo pré-determinada como, por exemplo, a bimestral. Contudo, assumimos que o sistema seja completamente conhecido, invariante no tempo e que sua dinâmica seja suficientemente lenta. Apesar de as trajetórias de referência poderem ser arbitrárias, elas foram escolhidas, aqui, como trajetórias do modelo de sistema presa-predador isolado analisado, mas com um conjunto apropriado de valores paramétricos. Mostramos que, para o modelo analisado, foi possível explorar de maneira sustentável os recursos do sistema, ao mesmo tempo em que foi mantida compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado. Apresentamos, ainda, uma maneira de restaurar a dinâmica natural do sistema isolado quando perturbações afetaram o equilíbrio ecológico do ecossistema.

Utilizando o método de mínimos quadrados, constatamos que, se os parâmetros  $a$ ,  $c$  e  $r$  de (6.1) forem previamente determinados, podemos estimar os demais a partir de poucas medições feitas sobre as populações, e, desta forma, atender a hipótese de que o

sistema seja completamente conhecido.

Faremos, agora, alguns comentários sobre a estratégia de controle proposta. Em primeiro lugar, a hipótese de que o sistema seja completamente conhecido também é uma premissa em outros métodos de controle como, por exemplo, linearização por realimentação, não sendo, assim, uma limitação exclusiva de nossa abordagem.

Salientamos, ainda, que o objetivo principal deste trabalho foi de formular uma estratégia de controle que forçasse as populações de presas e de predadores a seguir trajetórias de referência quaisquer, de modo que, especificando as mesmas como trajetórias de um modelo de sistema presa-predador isolado com um conjunto adequado de valores paramétricos, pudéssemos obter compatibilidade entre a dinâmica do sistema controlado e a dinâmica natural do sistema isolado. De acordo com a metodologia aqui desenvolvida, os sinais de controle poderão exigir, tanto a extração, quanto a introdução de novos indivíduos.

Não fez parte do escopo do presente trabalho garantir que os sinais de controle assumam apenas valores não-positivos, como em outras abordagens de controle para sistemas presa-predador (Corso et al., 2002; Costa et al., 2000; Cunha, 2002; Meza, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002; Meza, Costa, Bhaya e Kaszkurewicz, 2002). Se este for o caso, será assegurado que a implementação dos sinais de controle exigirá apenas a extração das espécies ou a suspensão da ação humana, não havendo necessidade de introduzir novos indivíduos. No entanto, os sinais de controle resultantes do esquema proposto poderão vir a ser positivos, exigindo a introdução de novos indivíduos. Em alguns casos, isto é realmente praticado como, por exemplo, o cultivo de certas espécies de peixes com o objetivo de aumentar a população de seu habitat natural.

Porém, nas situações em que tal introdução não pode ser feita, alternativas terão que ser buscadas. Como os sinais de controle dependem das trajetórias de referência, a grande questão para garantirmos que os mesmos assumirão somente valores não-positivos está na especificação das mesmas. Nos dois casos analisados nas Seções 5.2.1 e 5.2.2, os resultados de simulação mostraram que, mesmo considerando a restrição de que os sinais de controle assumam apenas valores não-positivos, conseguimos obter uma precisão de seguimento razoável. Em ambos os casos, os parâmetros do sistema de referência foram especificados como sendo iguais aos do sistema isolado, com exceção de  $\gamma_r$  ser menor que  $\gamma$  (para o Caso 1, veja (5.42) e (5.44); para o Caso 2, veja (5.77) e (5.81)). Recordamos que, por (2.17),  $\gamma$  é proporcional à capacidade de suporte das presas  $K$ , para  $a$  fixo, lembrando que  $K$  representa o número máximo de indivíduos suportado em determinado espaço

geográfico finito com uma base de recursos finita<sup>1</sup>. Desse modo, tudo se passou como se forçássemos o sistema presa-predador a se comportar como tendo uma menor capacidade de suporte das presas. Portanto, em relação à dinâmica do sistema controlado, é como se tivéssemos aumentado a área habitada pelas presas ou aumentado a disponibilidade dos recursos utilizados por elas. Apesar de não termos apresentado outros exemplos neste trabalho, constatamos por simulação que, quando a única diferença entre os parâmetros de referência e os do sistema isolado era  $\gamma_r < \gamma$ , foi possível obter uma precisão satisfatória no seguimento das trajetórias de referência considerando a restrição de que os sinais de controle assumam apenas valores não-positivos, ou seja, sem que novos indivíduos sejam introduzidos.

Ademais, podemos observar que o desenvolvimento da metodologia no Capítulo 5 não depende dos modelos escolhidos, tanto para o sistema a ser controlado, quanto para o sistema de referência. Desse modo, a estratégia proposta, apesar de ter sido focada no problema de seguimento de sistemas presa-predador, não se restringe a estes casos, podendo ser prontamente aplicada à classe de sistemas descritos por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, completamente conhecida e invariante no tempo, e  $\mathbf{B}$  é uma matriz diagonal real constante, desde que dinâmica de (7.1) seja suficientemente lenta. Assim, o esquema de controle proposto poderá ser aplicado para definir de políticas de gerenciamento ambiental para sistemas ecológicos descritos por (7.1) que envolvam a interação populacional de  $n$  espécies. Nestes casos, exigimos que  $\mathbf{f}$  seja contínua apenas em  $\underbrace{\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+}_{n \text{ vezes}}$ , que é o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de nosso interesse, pois não há sentido em considerarmos populações negativas.

Em resumo, as principais contribuições deste trabalho foram:

- A formulação de uma estratégia de controle para sistemas presa-predador que determina sinais de controle constantes por partes a partir da medição periódica das populações, possibilitando o seguimento de trajetórias de referência arbitrárias. Estes sinais de controle constantes por partes permitem definir políticas de gerenciamento ambiental;
- A especificação das trajetórias de referência como trajetórias de um modelo de

---

<sup>1</sup>O significado da capacidade de suporte foi apresentado na Seção 2.2.

sistema presa-predador isolado, para que a dinâmica do sistema controlado seja compatível com a dinâmica natural do sistema isolado.

Como assuntos para futuras pesquisas, sugerimos:

- A busca por uma demonstração formal da hipótese de que é possível escolher  $p$  suficientemente grande em (5.4) de modo que  $\Phi$  em (5.29), e  $\Psi$  em (5.30) sejam menores que valores aceitáveis de acordo com os interesses práticos;
- A busca por uma demonstração formal da hipótese de que se a capacidade de suporte do sistema de referência for especificada como sendo menor que a do sistema isolado, é possível obter uma boa precisão de seguimento considerando a restrição de que os sinais de controle assumam apenas valores não-positivos;
- Aplicação do método em outros modelos de sistemas presa-predador, e em modelos envolvendo a interação populacional de  $n$  espécies.

Finalmente, esperamos ter contribuído para uma maior integração entre a Ecologia, a Engenharia e a Matemática, e para o desenvolvimento de uma sociedade sustentável.

# Apêndice A

## Fundamentos de Matemática

**Definição A.1.** (Lang, 1968; Lima, 1970) Sejam  $A$ ,  $A'$  e  $B$  conjuntos, com  $A' \subset A$ . Seja  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação. A restrição de  $f$  ao subconjunto  $A'$  é a aplicação  $f|_{A'}: A' \rightarrow B$  definida por

$$f|_{A'}(x) = f(x), \quad \forall x \in A'. \quad (\text{A.1})$$

**Definição A.2.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos e seja  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as aplicações de  $A$  para  $B$ . Definimos a relação  $\leq$  em  $\mathcal{F}$  por

$$f \leq g \leftrightarrow \forall x \in A \ f(x) \leq g(x), \quad (\text{A.2})$$

para todo  $f, g \in \mathcal{F}$ .

É evidente que  $\leq$  é uma relação transitiva em  $\mathcal{F}$ .

**Definição A.3.** (Lang, 1968; Lima, 1982) Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \leq b$ . Dizemos que  $P = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  é uma partição do intervalo  $[a, b]$  se e somente se

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (\text{A.3})$$

**Definição A.4.** (Lang, 1968; Lima, 1982) Seja  $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação e seja  $P = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  uma partição do intervalo  $[a, b]$ . Dizemos que  $\mathbf{f}$  é uma aplicação escada em relação à partição  $P$  se e somente se existirem elementos  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$\mathbf{f}(t) = w_i, \quad \text{para } a_{i-1} < t < a_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.4})$$

Assim, percebemos que uma aplicação escada  $\mathbf{f}$  assume um valor constante em cada um dos intervalos abertos  $(a_{i-1}, a_i)$  determinados pela partição  $P$ . Além do mais, não há restrições nos valores que  $\mathbf{f}$  assume nos extremos de cada um desses intervalos. Segue da definição acima que  $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação escada em relação à partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$  se e somente se cada função coordenada de  $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_n]'$  é uma função escada em relação à  $P$  (Lang, 1968). Para os propósitos desta pesquisa, consideraremos um caso particular da Definição A.4, no qual  $\mathbf{f}$  é definida por

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} w_i, & \text{para } a_{i-1} \leq t < a_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n, & \text{para } a_{n-1} \leq t \leq a_n, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

ao invés de (A.4). Note que, neste caso, a aplicação escada  $\mathbf{f}$  tem restrições em seus valores nos pontos  $a_i$ , para  $i = 0, \dots, n$ . No presente trabalho, sempre que afirmarmos que  $\mathbf{f}$  é uma aplicação escada em relação à uma dada partição  $P$ , estaremos nos referindo à definição (A.5).

**Teorema A.1.** (Lang, 1968) *Seja  $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua por partes e seja  $c \in [a, b]$ . Então, para uma dado  $x \in [a, b]$ , temos que*

$$\left\| \int_c^x \mathbf{f}(t) dt \right\| \leq |x - c| \|\mathbf{f}\|, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\|\mathbf{f}\| \triangleq \sup_{t \in [a, b]} \|\mathbf{f}(t)\|$ .

**Definição A.5.** (Vidyasagar, 1978) *Considere a equação diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.7})$$

onde  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Assumimos que exista uma aplicação  $\phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, dados  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0, t_0): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a solução única de (A.7) com condição inicial  $\phi(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$ . Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  é denominado de conjunto invariante de (A.7) se e somente se

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \phi(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) \in M \rightarrow \forall t \geq t_0 \phi(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in M. \quad (\text{A.8})$$

# Apêndice B

## Lema da Comparação e Demonstrações

### B.1 Lema da Comparação

**Teorema B.1 (Lema da Comparação).** *(Khalil, 1996) Considere a equação diferencial escalar*

$$\dot{u} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (\text{B.1})$$

onde  $f(u, t)$  é contínua em  $t$  e localmente lipschitziana em  $u$ , para todo  $t \geq 0$  e todo  $u \in J \subset \mathbb{R}$ . Seja  $[t_0, T)$  ( $T$  pode ser  $+\infty$ ) o intervalo máximo de existência da solução  $u(t)$ , e assumamos que  $u(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Seja  $v(t)$  uma função contínua tal que

$$D^+v(t) \triangleq \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \leq f(v(t), t), \quad (\text{B.2})$$

$$v(t_0) \leq u_0, \quad (\text{B.3})$$

com  $v(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Então,  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$ .

### B.2 Demonstração da Desigualdade (3.20)

A demonstração aqui apresentada segue (Khalil, 1996). A partir da condição global de deslizamento (3.17), é possível mostrar que  $D^+|s_j(\mathbf{x}_j(t), t)| \leq -\eta_j$ . No entanto,

$|s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)| - \eta_j(t - t_0)$  do lado direito da desigualdade (3.20) é a solução da equação diferencial escalar  $\dot{y}_j = -\eta_j$  com condição inicial  $y_j(t_0) = |s_j(\mathbf{x}_j(t_0), t_0)|$ . Portanto, pelo Lema da Comparação, obtemos (3.20).

### B.3 Demonstração da Lei de Controle Descontínua (3.26)–(3.29)

Apresentaremos, primeiramente, dois lemas que simplificarão nossa demonstração.

**Lema B.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais. Se  $|a| \leq b$ , então*

$$s \cdot (a - b \cdot \text{sgn}(s)) \leq 0, \quad \forall_{s \neq 0 \in \mathbb{R}}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $\text{sgn}: \mathbb{R}^* \rightarrow \{-1, 1\}$  é a função sinal definida por (3.29).

*Demonstração.* Sabemos que  $|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$ . Portanto,  $a - b \leq 0$  e  $-(a + b) \leq 0$ . Se  $s > 0$ , temos que  $\text{sgn}(s) = 1$  e assim verificamos (B.4). De maneira similar para  $s < 0$ , pois, neste caso,  $\text{sgn}(s) = -1$  e  $s = -|s|$ .  $\square$

**Lema B.2.** *Seja  $b \geq 1$  um número real. Suponha que, para um dado  $a \in \mathbb{R}_+$ , temos que*

$$0 \leq b^{-1} \leq a \leq b. \quad (\text{B.5})$$

Então,  $|a - 1| \leq b - 1$ .

*Demonstração.* Suponha que  $a \geq 1$ . De (B.5), segue que  $0 < a - 1 \leq b - 1$ . Assim,  $|a - 1| = a - 1 \leq b - 1$ . Agora, suponha que  $0 < a < 1$ . A partir de (B.5), concluímos que

$$b^{-1} - 1 \leq a - 1 < 0 \leq |b^{-1} - 1|. \quad (\text{B.6})$$

Como  $b \geq 1$ , temos que  $b^{-1} \leq 1$  e  $b^{-1} - 1 \leq 0$ . Assim,  $b^{-1} - 1 = -|b^{-1} - 1|$ . Conseqüentemente, obtemos

$$-|b^{-1} - 1| \leq a - 1 \leq |b^{-1} - 1|, \quad (\text{B.7})$$

ou seja,

$$|a - 1| \leq |b^{-1} - 1|. \quad (\text{B.8})$$

Devemos então garantir que

$$|b^{-1} - 1| \leq b - 1. \quad (\text{B.9})$$

Mas,  $b^{-1} - 1 \leq 0 \leq b - 1$ . Desse modo, resta-nos apenas mostrar que  $-(b - 1) \leq b^{-1} - 1$ . Prosseguiremos por redução ao absurdo. Assumindo que  $-(b - 1) > b^{-1} - 1$ , implica que  $b^2 - 2b + 1 < 0$ . Contudo,  $b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2 \geq 0$ , o que encerra a demonstração.  $\square$

Agora, baseando-nos em (Slotine, 1991), mostraremos que a lei de controle  $u_j$  dada por (3.26)–(3.29) satisfaz a condição global de deslizamento (3.17). É evidente que isto equivale a satisfazer

$$s_j(\mathbf{x}_j, t)[\dot{s}_j(\mathbf{x}_j, t) + \eta_j(\text{sgn}(s_j(\mathbf{x}_j, t)))] \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j} - S_j(t). \quad (\text{B.10})$$

De (3.2), (3.15)–(3.16) e (3.26)–(3.27), obtemos

$$\dot{s}_j + \eta_j \text{sgn}(s_j) = f_j - b_j \widehat{b}_j^{-1} \widehat{f}_j + (\mathbf{1} - b_j \widehat{b}_j^{-1})(\Gamma - r_j^{(n_j)}) + d_j - (b_j \widehat{b}_j^{-1} K_j - \eta_j) \text{sgn}(s_j), \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\Gamma \triangleq \sum_{i=1}^{n_j-1} \binom{n_j-1}{i} \lambda_j^i e_j^{(n_j-i)}, \quad (\text{B.12})$$

e, por abuso de notação,  $\widehat{b}_j^{-1}$  denota  $1/\widehat{b}_j$  e não a função inversa de  $\widehat{b}_j$ . Pelo Lema B.1, (B.10) será atendida se em (B.11)

$$|f_j - b_j \widehat{b}_j^{-1} \widehat{f}_j + (\mathbf{1} - b_j \widehat{b}_j^{-1})(\Gamma - r_j^{(n_j)}) + d_j| \leq (b_j \widehat{b}_j^{-1} K_j - \eta_j), \quad (\text{B.13})$$

ou, de forma equivalente, se

$$|b_j^{-1} \widehat{b}_j f_j - \widehat{f}_j + (b_j^{-1} \widehat{b}_j - \mathbf{1})(\Gamma - r_j^{(n_j)}) + b_j^{-1} \widehat{b}_j d_j| + b_j^{-1} \widehat{b}_j \eta_j \leq K_j. \quad (\text{B.14})$$

Como  $f_j = \widehat{f}_j + (f_j - \widehat{f}_j)$ , o lado esquerdo de (B.14) verifica que

$$\begin{aligned} & |b_j^{-1} \widehat{b}_j f_j - \widehat{f}_j + (b_j^{-1} \widehat{b}_j - \mathbf{1})(\Gamma - r_j^{(n_j)}) + b_j^{-1} \widehat{b}_j d_j| + b_j^{-1} \widehat{b}_j \eta_j = \\ & |b_j^{-1} \widehat{b}_j (f_j - \widehat{f}_j) + (b_j^{-1} \widehat{b}_j - \mathbf{1})(\Gamma - r_j^{(n_j)} + \widehat{f}_j) + b_j^{-1} \widehat{b}_j d_j| + b_j^{-1} \widehat{b}_j \eta_j \leq \\ & |b_j^{-1} \widehat{b}_j (f_j - \widehat{f}_j)| + |(b_j^{-1} \widehat{b}_j - \mathbf{1})(\Gamma - r_j^{(n_j)} + \widehat{f}_j)| + |b_j^{-1} \widehat{b}_j d_j| + b_j^{-1} \widehat{b}_j \eta_j. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Através de (3.4)–(3.6), (3.27) e (B.12), temos que

$$\begin{aligned}
& |b_j^{-1}\widehat{b}_j(f_j - \widehat{f}_j)| + |(b_j^{-1}\widehat{b}_j - \mathbf{1})(\Gamma - r^{(n_j)} + \widehat{f}_j)| + |b_j^{-1}\widehat{b}_j d_j| + b_j^{-1}\widehat{b}_j \eta_j = \\
& |b_j^{-1}\widehat{b}_j||f_j - \widehat{f}_j| + |b_j^{-1}\widehat{b}_j - \mathbf{1}||\Gamma - r^{(n_j)} + \widehat{f}_j| + |b_j^{-1}\widehat{b}_j||d_j| + b_j^{-1}\widehat{b}_j \eta_j \leq \\
& \beta_j(F_j + D_j + \eta_j) + |b_j^{-1}\widehat{b}_j - \mathbf{1}||\widehat{u}_j|.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Finalmente, a desigualdade (3.5) e o Lema B.2 nos dão

$$\beta_j(F_j + D_j + \eta_j) + |b_j^{-1}\widehat{b}_j - \mathbf{1}||\widehat{u}_j| \leq \beta_j(F_j + D_j + \eta_j) + (\beta_j - \mathbf{1})|\widehat{u}_j|. \tag{B.17}$$

Portanto, escolhemos

$$K_j = \beta_j(F_j + D_j + \eta_j) + (\beta_j - \mathbf{1})|\widehat{u}_j|, \tag{B.18}$$

de modo a satisfazer (B.14). Assim, obtemos (3.28), e uma lei de controle  $u_j$  que atende (B.10) foi determinada.

# Referências Bibliográficas

- Aracil, J. e Toro, M. (1993). *Métodos Cualitativos en Dinámica de Sistemas*, Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Azar, C., Holmberg, J. e Lindgren, K. (1995). Stability analysis of harvesting in a predator-prey model, *Journal of Theoretical Biology* **1**(174): 13–19.
- Begon, M., Harper, J. e Townsend, C. (1996). *Ecology: Individuals, populations and communities*, 3 ed., Blackwell Science.
- Corso, J., Pagano, D. J. e Pieri, E. R. D. (2002). Sobre a dinâmica do modelo presa-predador de Leslie-Gower sujeito à controle de estrutura variável, *XIV Congresso Brasileiro de Automática* p. 1010–1015.
- Costa, M. I. S., Kaszkurewicz, E., Bhaya, A. e Hsu, L. (2000). Achieving global convergence to an equilibrium population in predator-prey systems by the use of discontinuous harvesting policy, *Ecological Modelling* **128**: 89–99.
- Cunha, F. B. (2002). *Análise e controle de sistemas de estrutura variável*, Master's thesis, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC.
- Dieudonné, J. (1969). *Foundations of Modern Analysis*, 2 ed., Academic Press, New York.
- Fernández, R. B. e Hedrick, J. K. (1987). Control of multivariable non-linear systems by the sliding mode method, *International Journal of Control* **46**(3): 1019–1040.
- Haberman, R. (1998). *Mathematical Models*, SIAM, Philadelphia.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, 2 ed., Prentice Hall, New Jersey.
- Kot, M. (2000). *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press.

- Krebs, C. J. (1972). *Ecology: The experimental analysis of distribution and abundance*, 2 ed., Haper and Row Inc., New York.
- Lang, S. (1968). *Analysis I*, Addison-Wesley.
- Lima, E. L. (1970). *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico S.A, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (1981). *Curso de Análise, Vol. 2*, CNPq, Brasília.
- Lima, E. L. (1982). *Curso de Análise, Vol. 1*, 3 ed., CNPq.
- Ljung, L. e Glad, T. (1994). *Modeling of Dynamic Systems*, P T R Prentice Hall, New Jersey.
- Luenberger, D. G. (1973). *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading.
- Mat (2002). *MATLAB – Optimization Toolbox User’s Guide*.
- May, R. M. e Beddington, J. R. (1980). Maximum sustainable yield in systems subject to harvesting at more than one trophic level, *Math. Biosci.* **51**: 261–281.
- Meza, M. E. M., Bhaya, A. e Kaszkurewicz, E. (2002). Control of one and two species predator-prey models using continuous robust threshold policies, *IFAC 15th Triennial World Congress* .
- Meza, M. E. M., Costa, M. I. S., Bhaya, A. e Kaszkurewicz, E. (2002). Threshold policies in the control of predator-prey models, *XIV Congresso Brasileiro de Automática* p. 146–151.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*, Livraria da Física, São Paulo.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*, 2 ed., Springer-Verlag, Berlim.
- Odum, E. P. (1988). *Ecologia*, Editora Guanabara, Rio de Janeiro.
- Press, W. H., Toukolsky, S. A., Vetterling, W. T. e Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*, 2 ed., Cambridge University Press.
- Slotine, J. J. (1983). *Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces*, PhD thesis, MIT – Massachusetts Institute of Technology, Cambridge – USA.
- Slotine, J. J. (1984). Sliding controller design for non-linear systems, *International Journal of Control* **40**(2): 421–434.

- Slotine, J. J. (1985). The robust control of robot manipulators, *International Journal of Robotics Research* **4**(2): 49–64.
- Slotine, J. J. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey.
- Slotine, J. J. e Coetsee, J. A. (1986). Sliding controller design for non-linear systems, *International Journal of Control* **44**(43): 1631–1651.
- Slotine, J. J. e Sastry, S. S. (1983). Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators, *International Journal of Control* **38**(2): 465–492.
- Utkin, V. I. (1978). *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*, Mir, Moscow.
- Vidyasagar, M. (1978). *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.