

DAS 5112 – Sinais e Sistemas Lineares I

Prof. Hector Bessa Silveira

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC
Departamento de Automação e Sistemas – DAS
Sala 208
E-mail: hector.silveira@ufsc.br
Website: <http://hector.paginas.ufsc.br>

2014/1 (Revisado)

Apresentação do Curso

- 1 Motivação
- 2 Contextualização do Curso
- 3 Aplicações
- 4 Plano de Ensino
- 5 MOOC
- 6 Formação Complementar

Motor de Corrente Contínua

- Características estáticas e dinâmicas
- Modelo matemático
- Análise do modelo
- Malha-aberta X Malha-fechada (realimentação): vejam (em casa) <http://www.youtube.com/watch?v=0-0qgFE9SD4>
- Projeto do controlador \Rightarrow simulações
- Implementação do controlador \Rightarrow testes

Sistemas em Malha-Fechada: vídeos

- Pêndulo invertido voador:

<http://www.youtube.com/watch?v=ML4woERjv1k>

- Sistema de engrenagens:

<http://www.youtube.com/watch?v=QBtrFDoqWTM>

Currículo de ECA

- 1 Sinais e Sistemas Lineares I
- 2 Sinais e Sistemas Lineares II
- 3 Sistemas Realimentados
- 4 Controle Multivariável
- 5 Sistemas Não-Lineares e Introdução à Robótica Industrial
- 6 Instrumentação em Controle

Áreas de Conhecimento

- Teoria de Sistemas
- Teoria da Complexidade
- Sistemas Dinâmicos
- Realimentação (*feedback*)

- Maquinas domésticas e industriais
- Radiodifusão: rádios e TV's
- Telecomunicações: fixa, móvel, internet
- Processamento de sinais de áudio e vídeo
- Transportes: veículos, trens, embarcações, aeronaves
- Agricultura: equipamentos e sistemas
- Biomédica: equipamentos hospitalares, próteses
- Sistemas elétricos, mecânicos, químicos
- Sistemas econômicos/financeiros
- Sistemas biológicos/ecológicos
- Sistemas quânticos \Rightarrow computador quântico

Característica interdisciplinar!

- 1 Objetivos do curso
- 2 Ementa
- 3 Avaliações
- 4 Bibliografia
- 5 Livro Texto: B. P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2a Edição. Bookman, 2007 \Rightarrow Capítulos B, 1 a 4.
- 6 Notas de Aula
- 7 Livro do Chen de Sinais e Sistemas: há uma versão mais concisa disponível gratuitamente para download em:
<http://www.ece.sunysb.edu/~ctchen>
- 8 Pacote computacional de simulação: Matlab
- 9 Plataforma de interação: Moodle

MOOC (*Massive Open Online Course*)

- MOOC = Curso Aberto Online para Grandes Massas
- Diversas áreas do conhecimento: engenharias, matemática, física, química, computação, artes, humanas, sociais

Algumas plataformas MOOC

- 1 edX: <https://www.edx.org>
- 2 Coursera: <https://www.coursera.org>
- 3 Udacity: <https://www.udacity.com>
- 4 MIT OpenCourseWare: <http://ocw.mit.edu/index.htm>
- 5 Stanford Online: <http://online.stanford.edu>

- Lógica \Rightarrow definições, argumentos lógicos, demonstrações: Cálculo (definição ϵ - δ), Álgebra Linear, Disciplinas Profissionalizantes
- Livro: D. Smith, M. Eggen, R. St. Andre, *A Transition to Advanced Mathematics* – 7a Edição. Cengage Learning, 2010
 \Rightarrow Capítulos 1 e 2 \Rightarrow Capítulos 3 e 4.

Sinal: conjunto de dados ou informação

Ex: sinal de rádio, celular, tensão da Celesc, imagem 3D do corpo (exame médico)

- Rádio, celular, tensão da Celesc: variável dependente é o tempo
- Imagem 3D do corpo: variável dependente é o espaço

Sistema: é uma entidade em que o sinal de saída $y(t)$ é alterado pelo sinal de entrada $x(t)$

Ex: motor elétrico, motor mecânico, equalizador de áudio, computador, smartphone, ecossistemas

- Problema de Análise \times Problema de Controle

1.1 Tamanho do Sinal

Tamanho do sinal $x(t)$: medida do “tamanho” ou “força” de $x(t)$

Motivação: $v(t) = Ri(t)$ (Lei de Ohm)

$v(t)$: tensão aplicada

$i(t)$: corrente

R : resistência

$P(t) = v(t)i(t) = Ri(t)^2 = v(t)^2/R$ (potência dissipada instantânea)

$R = 1$ (normalização)

• Potência dissipada instantânea: $P(t) = i(t)^2 = v(t)^2$ (quadrado de $i(t)$ e $v(t)$)

• Energia dissipada no intervalo $[t_1, t_2]$:

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

• Potência dissipada média em $[t_1, t_2]$:

$$P_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1} E_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

Energia e Potência de um Sinal

- Energia dissipada no intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt$$

- Potência dissipada média em $(-\infty, \infty)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{[-T/2, T/2]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt$$

Energia de um sinal real $x(t)$:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \triangleq \int_{-\infty}^0 x^2(t) dt + \int_0^{\infty} x^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 x^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(t) dt \leq \infty \end{aligned}$$

- Assumimos que $x(t)$ é um sinal qualquer que é contínuo por partes

Energia de um sinal complexo $x(t)$: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq \infty$

Potência de um sinal real $x(t)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \leq \infty$$

Potência de um sinal complexo $x(t)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \leq \infty$$

- P_x : valor médio quadrático de $x(t)$
- $P_x \text{ rms} = \sqrt{P_x}$: valor *rms* (Raiz Média Quadrática – *Root Mean Square*)
- Se $x(t)$ tem unidade U (por exemplo, U é volts), então E_x tem unidade U^2s e P_x tem unidade U^2

Energia e Potência de um Sinal

Obs 1: Se $x(t)$ é periódico, ou seja, existe $T_0 > 0$ tal que

$$x(t + T_0) = x(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

então

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt < \infty \quad (\text{real})$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{complexo})$$

Obs 2: Existem 4 situações:

1. $E_x < \infty$: energia finita (neste caso,

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty)$$

2. $E_x = \infty$: energia infinita

3. $P_x < \infty$: potência finita

4. $P_x = \infty$: potência infinita

Obs 2 (continuação): É fácil ver que

- $E_x < \infty \Rightarrow P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_x/T = 0$
- $0 < P_x \leq \infty \Rightarrow E_x = \infty$.

Portanto, não existem sinais $x(t)$ com $E_x < \infty$ e $0 < P_x \leq \infty$.
No entanto, existem sinais com $E_x = P_x = \infty$. Por exemplo,
 $x(t) = t$.

Obs 3: Se $x(t)$ tem **duração finita**, ou seja,

$$x(t) = 0, \quad t \leq t_1 \text{ ou } t \geq t_2,$$

então $E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty$ e $P_x = 0$.

Obs 4: Se $x(t) = C \cos(\omega_o t + \theta)$, então $T_0 = 2\pi/\omega_0$ e

$$\int_{T_0} x(t) dt = \int_{T_0} C \cos(\omega_o t + \theta) dt = 0$$

(integral sobre um intervalo qualquer de comprimento T_0)

Exemplos: (no quadro)

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

1. Deslocamento temporal: $\phi(t) = x(t \pm T)$, $T > 0$

- +: **adiantamento** no tempo em T unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x(t)$ para a **esquerda** em T unidades
- -: **atraso** no tempo em T unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x(t)$ para a **direita** em T unidades

Exemplo 1: $x(t) = C \cos(\omega_0 t)$ e $\phi(t) = C \cos(\omega_0 t \pm \theta)$, $\omega_0 \neq 0$, $\theta > 0$. Logo, $T = \theta/\omega_0$ é o deslocamento, pois

$$\begin{aligned}\phi(t) &= C \cos(\omega_0 t \pm \theta) = C \cos(\omega_0 t \pm \omega_0 \theta / \omega_0) \\ &= C \cos(\omega_0 [t \pm \theta / \omega_0]) = x(t \pm \underbrace{\theta / \omega_0}_T)\end{aligned}$$

Exemplo 2: (no quadro)

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

1. Deslocamento temporal:

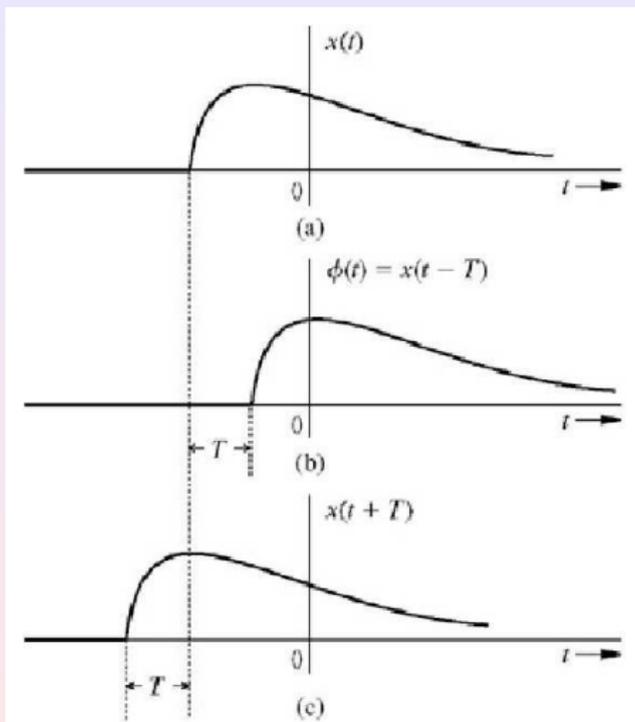


Figura : Deslocamento temporal de um sinal $x(t)$.

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

2. Escalonamento temporal: $\phi(t) = x(at)$, $\phi(t) = x(t/a)$, $a > 1$

- $\phi(t) = x(at)$: **compressão** no tempo pelo fator a
- $\phi(t) = x(t/a)$: **expansão** no tempo pelo fator a

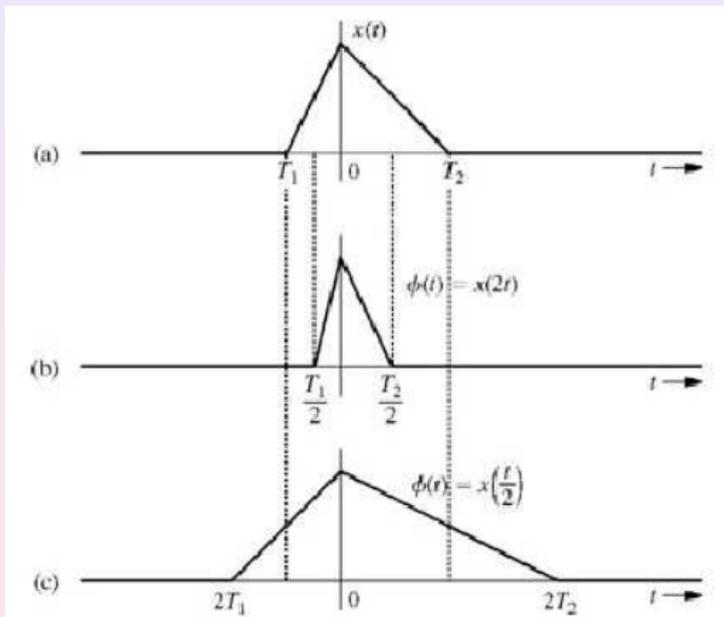


Figura : Escalonamento temporal de um sinal $x(t)$.

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

3. Reversão (inversão) temporal: $\phi(t) = x(-t)$

- O gráfico de $x(t)$ é rebatido sobre o eixo **vertical**.

Cuidado: O gráfico de $x(t)$ é rebatido sobre o eixo **horizontal** quando $\phi(t) = -x(t)$!

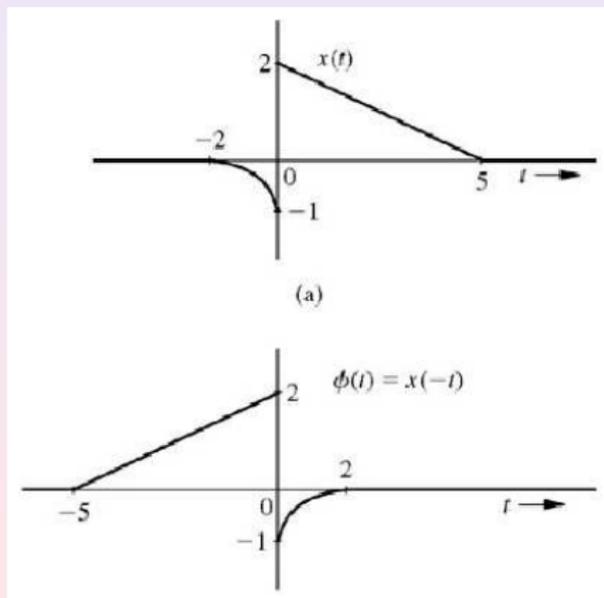


Figura : Reversão temporal de um sinal $x(t)$.

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

- Note que $\phi(t) = x(at)$, $a > 0$, corresponde a um escalonamento:
 $0 < a < 1 \Rightarrow \phi(t) = x(at)$ é uma **expansão** pelo fator $1/a$
 $a > 1 \Rightarrow \phi(t) = x(at)$ é uma **compressão** pelo fator a
- Note que, se $a < 0$, então

$$\phi(t) = x(at) = x(-(-at)) = x((-a)(-t))$$

corresponde a um escalonamento de $x(t)$ por $-a = |a| > 0$, seguido de uma reversão temporal; ou, de maneira equivalente, a uma reversão de $x(t)$, seguida de um escalonamento por $|a|$.

1.2 Algumas Operações Úteis com Sinais

4. Operações Combinadas: $\phi(t) = x(at + b)$, $a \neq 0$, pode ser interpretado de duas maneiras equivalentes:

1. Primeiramente deslocamos $x(t)$ por b , obtendo

$\psi(t) = x(t + b)$. Em seguida, escalonamos $\psi(t)$ por a , obtendo
 $\phi(t) = \psi(at) = x(at + b)$

2. Primeiramente escalonamos $x(t)$ por a , obtendo $\psi(t) = x(at)$.

Em seguida, deslocamos $\psi(t)$ por b/a , obtendo

$\phi(t) = \psi(t + (b/a)) = x(a(t + (b/a))) = x(at + b)$

Obs 1: As operações vistas acima são ferramentas importantes para a análise e construção de sinais.

Obs 2: Veja (e faça) o Exercício 1.1-7 (p. 135) do Lathi para as propriedades entre tais operações e a energia E_x de um sinal $x(t)$.

Exemplo: (no quadro)

1.3 Classificação de Sinais

1. Sinais em Tempo Contínuo e Sinais em Tempo Discreto

- **Tempo Contínuo:** o **tempo** (eixo horizontal) assume valores **contínuos**

Ex: $x(t) = \text{sen}(t)$, $t \in [0, 1]$

- **Tempo Discreto:** o **tempo** (eixo horizontal) assume valores **discretos**, ou seja, o tempo dá **saltos**

Ex: (a) PIB trimestral e (b) um *bit* de memória de um PC só é atualizado a cada ciclo do *clock*

2. Sinais Analógicos e Digitais

- **Analógicos:** a amplitude (eixo **vertical**) do sinal pode assumir uma infinidade de valores

Ex: A tensão sobre um resistor

- **Digitais:** a amplitude (eixo **vertical**) do sinal só pode assumir um número finito de valores

Ex: Um *bit* só pode assumir 2 valores; e um *byte*, 256 valores

1.3 Classificação de Sinais

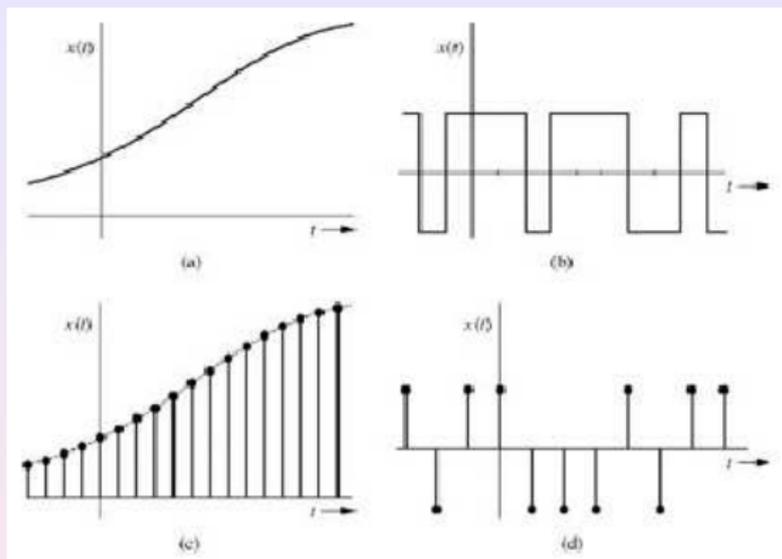


Figura : (a) Analógico em tempo Contínuo; (b) Digital em tempo Contínuo; (c) Analógico em tempo Discreto; (d) Digital em tempo Discreto.

- Sinais digitais em tempo discreto surgem naturalmente a partir da amostragem (conversor D/A) de um sinal analógico em tempo contínuo por um microcontrolador

1.3 Classificação de Sinais

3. Sinais Periódicos e Não-Periódicos

Relembre que $x(t)$ tem **duração finita** se

$$x(t) = 0, \quad t \leq t_1 \text{ ou } t \geq t_2,$$

onde $t_2 > t_1$ e $T = t_2 - t_1$ é a **duração** de $x(t)$ (o sinal “começa” em t_1 e “termina” em t_2). Quando isto não ocorre, ou seja, $x(t)$ assume **algum** valor **não-nulo** em **qualquer** intervalo de tempo, dizemos que $x(t)$ tem **duração infinita**. Assim, $x(t)$ “começa” em $t = -\infty$ e “continua indefinidamente”.

• **Sinais Periódicos**: quando para algum $T_0 > 0$ (**período**),

$$x(t + T_0) = x(t), \text{ para qualquer } t \in (-\infty, \infty)$$

Isto significa que o sinal atrasado de T_0 segundos coincide com o próprio sinal. Um sinal periódico “começa” em $t = -\infty$ e “termina” em $t = \infty$, ou seja, $x(t)$ é de **duração infinita** e se repete a cada intervalo de T_0 segundos. Logo, basta conhecermos $x(t)$ num certo intervalo de comprimento T_0 para conhecermos todo o sinal.

1.3 Classificação de Sinais

Note que $2T_0, 3T_0, 4T_0, \dots$, também são períodos de $x(t)$ (por exemplo, $x(t + 2T_0) = x((t + T_0) + T_0) = x(t + T_0) = x(t)$). Por isto, denominamos o menor $T_0 > 0$ que satisfaz

$$x(t + T_0) = x(t), \text{ para qualquer } t \in (-\infty, \infty),$$

de **período fundamental**. Se $x(t)$ é **constante**, o período fundamental **não está definido**.

Ex: $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$, $x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow T_0 = 2\pi/\omega_0$ é o período fundamental

• **Sinais Não-Periódicos**: quando $x(t)$ não for periódico

Ex: $x(t) = t^2$, $x(t) = e^{at}$

1.3 Classificação de Sinais

Extensão periódica: Seja $\phi(t)$ um sinal de duração T . Dado qualquer $T_0 \geq T$, temos que $\phi(t)$ gera um sinal periódico $x(t)$ de período T_0 através de infinitos deslocamentos de $\phi(t)$ para a direita e para a esquerda

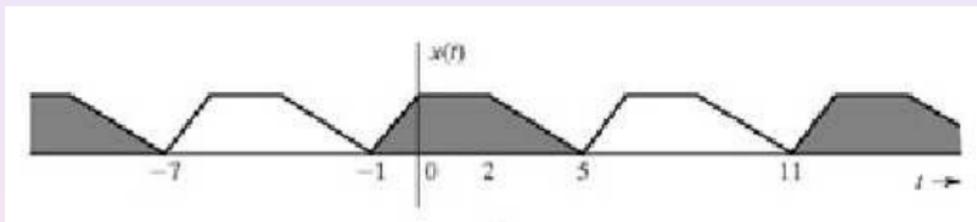


Figura : Extensão periódica.

Descrição matemática:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t - kT_0), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Obs: Sinais de duração infinita, como os periódicos, não existem na prática. No entanto, como veremos mais adiante, eles são bastante úteis no estudo de sistemas.

Propriedades:

1. Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ têm o **mesmo** período T_0 . Então os seguintes sinais **também** possuem período T_0 :

- $x(t) = Cx_1(t)$, C real ou complexo
- $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$
- $x(t) = x_1(t)x_2(t)$
- $x(t) = x_1(t)/x_2(t)$, com $x_2(t) \neq 0$ para todo t

Prova da soma: Seja $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Então,

$$x(t + T_0) = x_1(t + T_0) + x_2(t + T_0) = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

Ex: $x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \text{sen}(\omega_0 t)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$

Obs: Considere que $x_1(t)$ tem período T_1 e que $x_2(t)$ tem período T_2 (não necessariamente iguais!). Então, a **soma** $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ é periódica $\Leftrightarrow T_1/T_2$ é um número racional

Propriedades (continuação):

2. Suponha que $x(t)$ tem período T_0 . Dado a real,

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_0^{T_0} x(t) dt$$

Assim, a área abaixo de $x(t)$ (a integral) é sempre a mesma, independente do intervalo de comprimento T_0 escolhido. Tal integral é representada por

$$\int_{T_0} x(t) dt$$

Logo,

$$\int_{T_0} x(t) dt = \int_0^{T_0} x(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

1.3 Classificação de Sinais

Sinal Causal: quando $x(t)$ **não começa** antes de $t = 0$, ou seja, $x(t) = 0$ **para todo** $t < 0$

Sinal Não-Causal: quando $x(t)$ não é causal. Isto significa que $x(t)$ começa antes de $t = 0$, ou seja, existe pelo menos **algum** $\bar{t} < 0$ tal que $x(\bar{t}) \neq 0$

Sinal Anti-Causal: quando $x(t) = 0$ **para todo** $t \geq 0$

4. Sinais de Energia e Potência

Sinais de Energia: $E_x < \infty$ (energia finita)

Sinais de Potência: $0 < P_x < \infty$ (potência finita não-nula)

Relembre que $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$ (e $0 < P_x < \infty \Rightarrow E_x = \infty$). Logo, não existem sinais que são **simultaneamente** de energia e de potência. No entanto, existem sinais que não são **nem de energia nem de potência** (por exemplo, $x(t) = e^{-at}$ com $a > 0$, $E_x = \infty$, $P_x = \infty$).

5. Sinais Determinísticos e Aleatórios

Determinísticos: podem ser preditos de maneira precisa na forma de uma expressão matemática ou graficamente

Aleatórios: não podem ser preditos de maneira precisa, mas apenas probabilisticamente

Obs: Na prática, geralmente há ruídos externos (que são de natureza aleatória) que interferem nos sinais determinísticos a serem gerados e/ou analisados. Quando a interferência do ruído é relativamente pequena, os mesmos são desprezados, e tudo se passa como se os sinais fossem de fato determinísticos.

1.4 Alguns Modelos Úteis de Sinais

1. Função Degrau Unitário: é o sinal definido por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

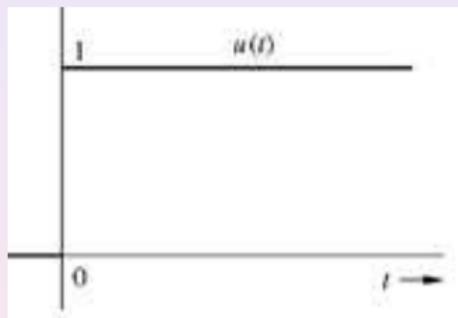


Figura : Degrau unitário.

O degrau unitário, que por si só é fundamental na análise de sistemas, permite que sinais mais complexos sejam descritos por uma única expressão matemática.

Exemplos: (no quadro)

2. Função Impulso Unitário

Motivação: (no quadro)

O impulso unitário $\delta(t)$ é o objeto matemático (**não é uma função no sentido usual!**) que possui as seguintes propriedades:

a) $\delta(t) = 0$, para $t \neq 0$ (não está definido em $t = 0$!)

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ (a área sob $\delta(t)$ é unitária!)

Graficamente,

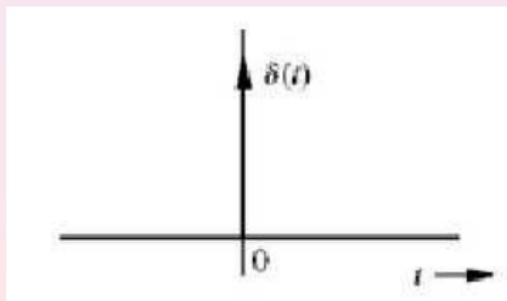


Figura : Impulso unitário.

Interpretação: $\delta(t)$ tem duração infinitamente pequena, mas com área unitária

Considere

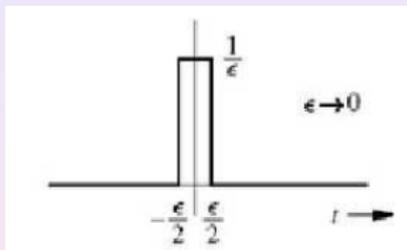


Figura : Pulso $\delta_\epsilon(t)$ de largura $\epsilon > 0$ com $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$ (área unitária).

O impulso unitário $\delta(t)$ pode ser “construído” da seguinte maneira:

a) $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$. Logo, $\delta(t) = 0$, para $t \neq 0$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt}_{=1} = 1$$

Os argumentos acima apresentam dois problemas:

- 1)** $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não converge para uma função (no sentido usual), pois $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(0) = \infty$. Portanto, $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não é uma função no sentido usual
- 2)** Como $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ não é uma função (no sentido usual) e não há convergência uniforme, não podemos passar **lim** $_{\epsilon \rightarrow 0}$ para fora da integral em *b)*

Para contornar tais problemas, poderíamos definir $\delta(t)$ rigorosamente como uma **função generalizada** (ou **distribuição**). No entanto, em termos **operacionais**, o efeito é exatamente o mesmo do que foi feito acima. Assim, em nosso curso, para não termos que entrar na complexa teoria de funções generalizadas, vamos aceitar os argumentos acima de forma intuitiva e não-rigorosa.

Propriedades: Seja $x(t)$ um sinal contínuo em $t = 0$. Então,

- $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$ (**propriedade de amostragem**)

“Prova”: Como $x(t)$ é contínuo em $t = 0$, temos que

$$x(t) \cong x(0), \quad t \in [-\epsilon/2, \epsilon/2] \text{ com } \epsilon > 0 \text{ pequeno}$$

Logo, para $\epsilon > 0$ pequeno, temos

$$\begin{aligned} x(t)\delta(t) &= x(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{x(t)\delta_{\epsilon}(t)}_{\cong x(0)\delta_{\epsilon}(t)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(0)\delta_{\epsilon}(t) = x(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) = \boxed{x(0)\delta(t)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t) dt = x(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt}_{=1} = \boxed{x(0)}$$

Novamente, as propriedades acima podem ser colocadas de forma rigorosa através de funções generalizadas. Vamos agora generalizá-las para $\delta(t - T)$ (impulso unitário deslocado de T segundos).

Propriedades: Seja $x(t)$ um sinal contínuo em $t = T$. Então,

- $x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - T) dt = x(T)$ (**propriedade de amostragem**)

Como $\delta(t - T)$ está “concentrado” em $t = T$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = \int_{T^-}^{T^+} \delta(t - T) dt = 1,$$

para $t_1 < T < t_2$. No entanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = 0$$

se $t_1 < t_2 < T$ ou $T < t_1 < t_2$.

Por razões de consistência, **não definimos**

$$\int_{t_1}^T \delta(t - T) dt \quad \text{nem} \quad \int_T^{t_2} \delta(t - T) dt.$$

Assim, para $t_1 < T < t_2$, devemos fazer

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - T) dt = \underbrace{\int_{t_1}^{T^-} \delta(t - T) dt}_{=0} + \underbrace{\int_{T^-}^{T^+} \delta(t - T) dt}_{=1} + \underbrace{\int_{T^+}^{t_2} \delta(t - T) dt}_{=0} = 1$$

Exemplos: (no quadro)

Relembre do Cálculo 1 que se um sinal $x(t)$ é descontínuo em $t = t_0$, então $x(t)$ não é derivável (no sentido usual) em t_0 . No entanto, com o auxílio do impulso unitário $\delta(t)$, podemos generalizar o conceito usual de derivada para sinais $x(t)$ que apresentam saltos de descontinuidade.

Em todo o restante do curso, **assumiremos** que os sinais $x(t)$ são **diferenciáveis por partes**.

Definimos a **derivada generalizada** (ou **derivada distribucional**) de $x(t)$ em $t = t_0$ por:

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \begin{cases} x'(t_0), & \text{quando a derivada usual de } x(t) \text{ existe em } t_0 \\ (x(t_0^+) - x(t_0^-))\delta(t - t_0), & \text{quando } x(t) \text{ apresenta um} \\ & \text{salto em } t_0 \end{cases}$$

onde $x'(t)$ é a derivada usual de $x(t)$ e $(x(t_0^+) - x(t_0^-))$ é o tamanho do salto de descontinuidade.

Portanto, se $x(-\infty) = 0$, então

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau$$

para todo t em que a **derivada usual** $x'(t)$ **existe**.

Obs: As propriedades usuais de derivação da soma, diferença e produto, permanecem válidas para a derivada generalizada.

Exemplos: (no quadro)

3. Função Exponencial Complexa

Seja $s = \sigma + j\omega$. Relembre que

$$\sigma = (s + s^*)/2 \text{ (parte real), } \omega = (s - s^*)/2j \text{ (parte imaginária)}$$

Como $e^{j\omega} = \cos \omega + j \operatorname{sen} \omega$, $(e^{j\omega})^* = e^{-j\omega}$, obtemos que

$$\cos \omega = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}, \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

Do mesmo modo, para $s = \sigma + j\omega$, relembre que

$$e^{st} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t)], \quad (e^{st})^* = e^{s^* t}$$

Logo,

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{e^{st} + e^{s^* t}}{2}$$

Denominamos s de **frequência complexa** (generaliza a frequência ω em $e^{j\omega} = \cos \omega + j \operatorname{sen} \omega$), $|\omega|$ de **frequência angular** e σ de **frequência neperiana**.

Função Exponencial Complexa

Assim, vários sinais **reais** podem ser escritos em função de e^{st} :

(a) $x(t) = e^{\sigma t} \Rightarrow s = \sigma, \omega = 0$

(b) $x(t) = \cos \omega t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ ($s = \pm j\omega, \sigma = 0$)

(c) $x(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t, \sigma < 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{s t} + e^{s^* t})$ ($s = \sigma \pm j\omega$)

(d) $x(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t, \sigma > 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{s t} + e^{s^* t})$ ($s = \sigma \pm j\omega$)

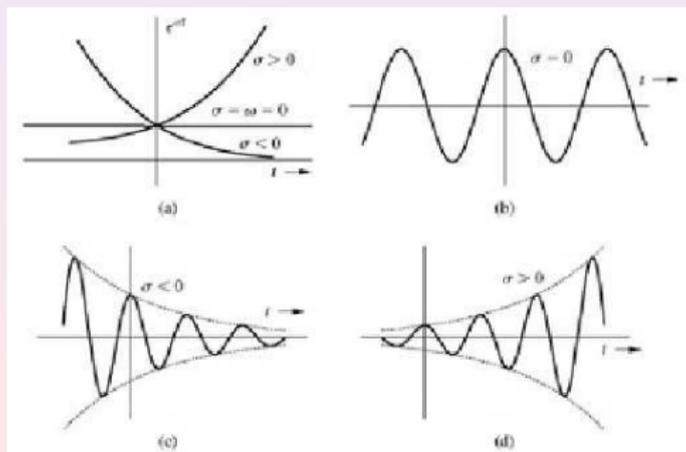


Figura : Senóides de frequência complexa $s = \sigma \pm j\omega$.

Plano s (plano de frequência complexa): (no quadro)

Exemplos: (no quadro)

1.5 Funções Pares e Ímpares

Um sinal $x_e(t)$ é **par** quando, para todo t ,

$$x_e(t) = x_e(-t), \text{ (simetria em relação ao eixo vertical),}$$

Um sinal $x_o(t)$ é **ímpar** quando, para todo t ,

$$x_o(t) = -x_o(-t), \text{ (rebatimento diagonal do gráfico),}$$

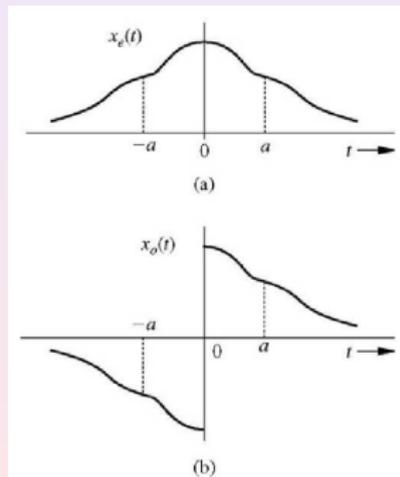


Figura : Função par (a), e função ímpar (b).

Funções Pares e Ímpares

Se $x(t)$ é ímpar, então $x(0) = -x(-0)$, ou seja, $x(0) = 0$.

Portanto:

- $x(t)$ é ímpar $\Rightarrow x(0) = 0$
- $x(0) \neq 0 \Rightarrow x(t)$ não é ímpar

Exemplos:

1. $x(t) = C \cos(\omega t)$ é par, pois $C \cos(\omega t) = C \cos(-\omega t)$
2. $x(t) = C \sin(\omega t)$ é ímpar, pois $C \sin(\omega t) = -C \sin(-\omega t)$
3. $x(t) = t^n$, com $n > 0$ par, é um sinal par
4. $x(t) = t^n$, com $n > 0$ ímpar, é um sinal ímpar
5. O impulso $\delta(t)$ é par. Logo, $\delta(t) = \delta(-t)$ e $\delta(T - t) = \delta(t - T)$

Funções Pares e Ímpares

Propriedades:

1. par \pm par = par

2. ímpar \pm ímpar = ímpar

3. par \times ímpar = ímpar

4. par \times par = ímpar \times ímpar = par

5. 1/par = par 1/ímpar = ímpar

6. Se $x_e(t)$ é par, então $\int_{-a}^a x_e(t) dt = 2 \int_0^a x_e(t) dt$

7. Se $x_o(t)$ é ímpar, então $\int_{-a}^a x_o(t) dt = 0$

Exemplos: (no quadro)

Demonstração de 3: (no quadro)

Componentes Pares e Ímpares de um Sinal: Seja $x(t)$ um sinal. Então, podemos decompor $x(t)$ como

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{x_e(t) \text{ é par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{x_o(t) \text{ é ímpar}}$$

Note que:

- $x(t) = x_e(t)$ ($x_o(t) = 0$) $\Leftrightarrow x(t)$ é par
- $x(t) = x_o(t)$ ($x_e(t) = 0$) $\Leftrightarrow x(t)$ é ímpar

Exemplos: (no quadro)

1.6 Sistemas

Sistema: é uma entidade em que os sinais de saída são alterados pelos sinais de entrada.

Ex: motor elétrico, motor mecânico, equalizador de áudio, computador, automóvel, ecossistemas

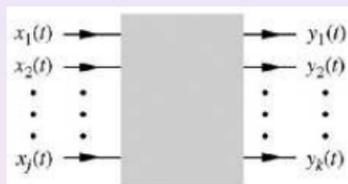


Figura : Representação de um sistema.

Modelagem matemática: obter relações matemáticas entre as entradas e as saídas

- Sistema Real \times Modelagem \times Análise ($x(t) \longrightarrow y(t) = ?$)
 \times Controle ($x(t) = ? \longrightarrow y(t)$)
- Modelagem de sistemas elétricos: Leis de Kirchhoff
- Modelagem de sistemas mecânicos: Leis de Newton

1.7 Classificação de Sistemas

Em nosso curso, estudaremos **apenas** sistemas SISO (*Single Input, Single Output* – Única Entrada, Única Saída). Além disso, consideraremos somente sistemas em que **cada** entrada $x(t)$ gera uma **única** saída $y(t)$. Neste contexto, um **sistema** nada mais é do que um **mapeamento** do conjunto de entradas no conjunto de saídas.

1. Sistemas Sem Memória e Com Memória

Sem Memória (ou Instantâneo): quando a saída no instante t depende apenas da entrada no instante t , ou seja, a saída em t **independe** dos valores da entrada antes de t (passado) e após t (futuro).

Com Memória (ou Dinâmico): quando o sistema não é sem memória. Isto significa que a saída no instante t **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro da entrada.

2. Sistemas Causais e Não-Causais

Causal (ou Físico ou Não-Antecipativo): quando a saída no instante t **independe** dos valores da entrada após t (futuro).

Não-Causal (ou Antecipativo): quando o sistema não é causal. Isto significa que a saída no instante t **depende** de **algum** valor futuro da entrada.

Exemplos:

(a) $v(t) = Ri(t)$ (resistor), $x(t) = i(t)$ é a entrada, $y(t) = v(t)$ é a saída: sem memória e causal

(b) $y(t) = f(x(t))$: sem memória e causal

(c) $y(t) = \cos(x(t - 1))$: com memória e causal

(d) $y(t) = \cos(x(t - 1)) + \sin(x(t + 1))$: com memória e não-causal

1.7 Classificação de Sistemas

(e) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (**sistema integrador**): com memória e causal

(f) $y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$: com memória e não-causal

Obs: Todo **sistema real** deve ser **causal**. No entanto, sistemas não-causais possuem importância prática. Por exemplo, um **filtro passa-baixas** ideal é não-causal e, portanto, não pode ser construído (**realizado**) na prática. Assim, o objetivo da engenharia é construir filtros passa-baixas reais que possuem um desempenho próximo ao do ideal (**no quadro**).

1.7 Classificação de Sistemas

3. Sistemas Lineares e Não-Lineares

3.1 Sistemas Sem Memória

• **Linear**: quando o sistema (sem memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

(a) $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow y_3 = y_1 + y_2$
(**aditividade**)

(b) $x \rightarrow y \Rightarrow \bar{x} = kx \rightarrow \bar{y} = ky$ (**homogeneidade**)

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

$x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = k_1x_1 + k_2x_2 \rightarrow y_3 = k_1y_1 + k_2y_2$
(**princípio da superposição**)

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear satisfaz: $x = 0 \rightarrow y = 0$. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x = 0 \rightarrow y = 0$.

Importante 1! Aditividade \nrightarrow Homogeneidade

- **Não-Linear:** quando o sistema (sem memória) não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade **ou** não satisfaz a homogeneidade

Importante 2! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $x(t)$ (ex: resistor). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois a condição de homogeneidade não é satisfeita. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares.

Exemplos: (no quadro)

3.2 Sistemas com Memória

Condição Inicial (ou Estado Inicial) $v(t_0)$ de um sistema com memória no instante t_0 : é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento da entrada $x(t)$, $t \geq t_0$ (futuro), determina uma **única saída** $y(t)$ para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro da saída, não importa a maneira como o sistema atingiu a condição inicial $v(t_0)$, ou seja, $v(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0), \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando

$$x(t) = 0, t \geq t_0: \boxed{v(t_0), x(t) = 0, t \geq t_0} \longrightarrow y_0(t), t \geq t_0$$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando

$$v(t_0) = 0: \boxed{v(t_0) = 0, x(t), t \geq t_0} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0$$

Sistemas com Memória Lineares e Não-Lineares

- **Linear:** quando o sistema (com memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

(a) **(Aditividade)** Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1(t_0), \\ x_1(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2(t_0), \\ x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2(t), t \geq t_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0), \\ x_3(t) = x_1(t) + x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t), t \geq t_0$$

(b) **(Homogeneidade)** Se

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0), \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}(t_0) = kv(t_0), \\ \bar{x}(t) = kx(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = ky(t), t \geq t_0$$

Sistemas com Memória Lineares e Não-Lineares

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1(t_0), \\ x_1(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2(t_0), \\ x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2(t), t \geq t_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3(t_0) = k_1 v_1(t_0) + k_2 v_2(t_0), \\ x_3(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t), t \geq t_0$$

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear (com memória) satisfaz:

$$\boxed{v(t_0) = 0, x(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .}$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $v(t_0) = 0, x(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .$

Sistemas com Memória Lineares e Não-Lineares

Importante 1! Aditividade \nRightarrow Homogeneidade

• **Não-Linear:** quando o sistema (com memória) não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade **ou** não satisfaz a homogeneidade

Importante 2! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $x(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois a condição de homogeneidade não é satisfeita. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico “Linearização de Sistemas Não-Lineares”.

Concluimos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um **sistema linear com memória** é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } v(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } x(t)}$$

Propriedade de Decomposição

1.7 Classificação de Sistemas

Obs: Sistemas sem memória não possuem estado inicial. Para sistemas com memória, sempre assumimos que $v(-\infty) = 0$.

Exemplos: (no quadro)

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

4.1 Sistemas sem Memória

- **Invariante no tempo:** quando

$$x(t) \longrightarrow y(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = x(t - T) \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T)$$

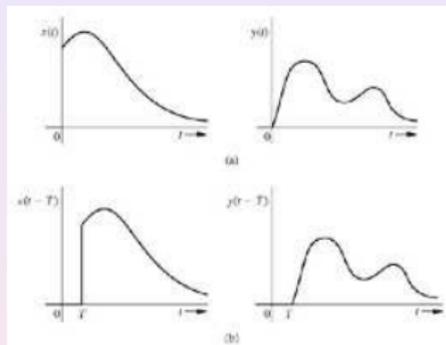


Figura : Ilustração gráfica.

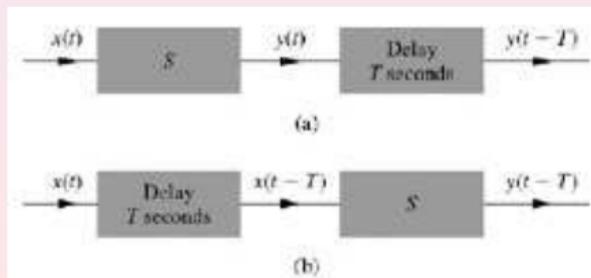


Figura : Diagrama: o Sistema S **comuta** com o Atraso.

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

4.1 Sistemas sem Memória

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

Exemplos: (no quadro)

4.2 Sistemas com Memória

- **Invariante no tempo:** quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0) = v_0, \\ x(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}(t_0 + T) = v_0, \\ \bar{x}(t) = x(t - T), t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \geq t_0 + T$$

Ilustração: (no quadro)

Sistemas com Memória Invariantes e Variantes no Tempo

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

Pode-se mostrar que todo sistema descrito por uma equação diferencial da forma

$$a_0 \frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_N y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \dots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x \quad (\star)$$

é um sistema **causal, com memória e linear**, onde $N \geq M$ e os coeficientes (**parâmetros**) a_i, b_i são constantes ou dependentes do tempo t .

Exemplo: $3 \frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} + \cos(5t)y = t \frac{dx}{dt} + x \quad (N = 2, M = 1)$

Quando **todos** os parâmetros a_i, b_i em (\star) são constantes, o sistema é **invariante no tempo**. Caso contrário, é **variante**.

1.7 Classificação de Sistemas

Propriedade (será mostrada na Seção 2.4): Considere um **sistema linear com memória causal invariante no tempo**. Suponha que $x(t), t \in \mathbb{R}$, é uma entrada **causal** e seja $T > 0$. Então, $y_{esn}(t), t \in \mathbb{R}$, é **causal** e:

$$\text{se } v(0) = 0, x(t), t \geq 0 \} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq 0$$

então $v(0) = 0, \bar{x}(t) = x(t-T), t \geq 0 \} \longrightarrow \bar{y}_{esn}(t) = y_{esn}(t-T), t \geq 0$

Isto significa que $x(t), t \geq 0 \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq 0$, **se comporta** como um **sistema linear sem memória invariante no tempo!**

5. Sistemas em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto: um **sistema em tempo contínuo** é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais em tempo contínuo. Um **sistema em tempo discreto** é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais em tempo discreto.

6. Sistemas Analógicos e Digitais: um **sistema analógico** é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais analógicos. Um **sistema digital** é um sistema em que as entradas e as saídas são sinais digitais.

1.7 Classificação de Sistemas

Ex: motor elétrico (sistema analógico em tempo contínuo), computador (sistema digital em tempo discreto).

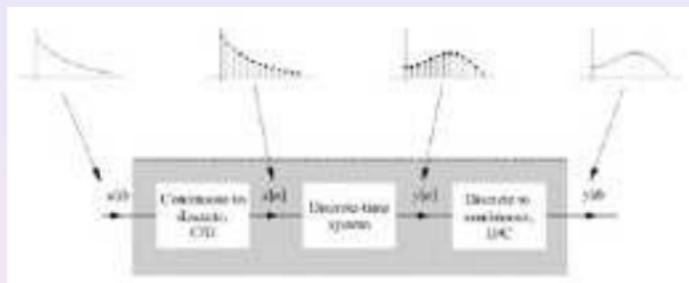


Figura : Processamento de um sinal contínuo por um computador.

7. Sistemas Invertíveis e Não-Invertíveis

Relembre que um sistema S associa uma única saída $y(t)$ para cada entrada $x(t)$, ou seja, corresponde a um mapeamento do conjunto de entradas no conjunto de saídas. Quando diferentes entradas geram diferentes saída, isto é,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \quad (\text{ou, equivalentemente, } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

dizemos que o sistema é **invertível**. Caso contrário, dizemos que o sistema é **não-invertível**.

Sistemas Invertíveis e Não-Invertíveis

Note que dizer que um S sistema é **invertível** é o mesmo que dizer que o mapeamento correspondente é **injetivo**. Neste caso, podemos, a princípio, determinar o **sistema inverso** S_i do sistema original S , o qual determina $x(t)$ a partir de $y(t)$. Desse modo, S em série com S_i resulta no **sistema identidade** ($y = x$).
Ex: gravação em vinil, .ZIP, criptografia

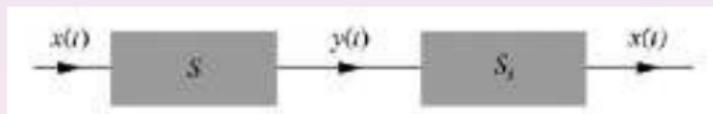


Figura : Sistema S em série com seu sistema inverso S_i .

Exemplos: (no quadro)

8. Sistemas BIBO (Bounded Input/Bounded Output) Estáveis e Instáveis

Relembre que um sinal $f(t)$ é limitado quando existe $M_f < \infty$ tal que

$$|f(t)| \leq M_f < \infty, \text{ para todo } t \in (-\infty, \infty)$$

ou, de maneira equivalente,

$$-M_f \leq f(t) \leq M_f, \text{ para todo } t \in (-\infty, \infty)$$

Propriedades:

a) Se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, então $f(t)$ é **ilimitado**.

b) Se $f(t) = 0$ para $t < t_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$, então $f(t)$ é **limitado**.

Dizemos que um sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada limitada resultar numa saída limitada. Caso contrário, dizemos que o sistema é **BIBO instável**.

Ex de sistemas BIBO instáveis: reatores químicos, aviões

Exemplos: (no quadro)

1.8-1 Modelagem de Circuitos Elétricos: Descrição Entrada-Saída (Externa)

- Resistor (R): $v_R(t) = R i_R(t)$
- Capacitor (C): $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$
- Indutor (L): $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

Utilizamos então a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT) e a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) para obter a relação entrada-saída.

Para simplificar, definimos os operadores diferenciais: $D = d/dt$, $D^2 = d^2/dt^2$, e assim por diante.

Exemplos: (no quadro)

Vejam as Seções 1.8-2 e 1.8-3 do Lathi para modelagem de sistemas mecânicos e eletromecânicos (motor CC).

1.10 Descrição Interna: Descrição em Espaço de Estado

Descrição interna: é a descrição matemática que é capaz de determinar todos os possíveis sinais de um sistema

Variáveis de estado: é um certo conjunto de sinais que permite determinar **todos** os demais sinais de um sistema.

Descrição em espaço de estado: é a descrição matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e a entrada do sistema por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado). Por exemplo, se $q_1(t), \dots, q_n(t)$ são as variáveis de estado e $x(t)$ é a entrada, então a descrição em espaço de estado é:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n, x) \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= f_n(q_1, \dots, q_n, x)\end{aligned}$$

Para um dado sistema, escolhemos as **variáveis de estado** como os sinais que correspondem aos **elementos armazenadores de energia** no sistema. Por exemplo, em **circuitos elétricos**, as **variáveis de estado** são: as **tensões nos capacitores** (energia armazenada no campo elétrico) e as **correntes dos indutores** (energia armazenada no campo magnético).

Exemplos: (no quadro)

Capítulo 2: Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Contínuo

Considere um **sistema linear em tempo contínuo invariante no tempo (LCIT)** em que a **relação entrada-saída** é descrita por uma equação diferencial da forma

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_N y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x$$

onde $N \geq M$ e os parâmetros a_i, b_i são **constantes e reais**. Denominamos N de **ordem** do sistema. Utilizando o operador diferencial $D = d/dt$, podemos rescrever tal equação como

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_{N-M} D^M + \cdots + b_{N-1} D + b_N$$

O estado inicial do sistema em $t_0 = 0^-$ é o **vetor**

$$v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \ \dots \ y^{(1)}(0^-) \ y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$$

Isto significa que

$$\left. \begin{array}{l} v_0, \\ x(t), \ t \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), \ t \geq 0$$

Como o sistema é **linear**, sabemos que a **resposta total** $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) \ (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) \ (v_0=0)}$
--

Propriedade de Decomposição

Obs: Para **efeitos de cálculo** de $y_{esn}(t)$, $t \geq 0$, considera-se que $x(t) = 0$, $t < 0$ (**entrada causal!**).

Relembre que um sinal $f(t)$ é **suave** quando as derivadas de todas as ordens existem. Em nosso curso, **assumiremos** que a entrada $x(t)$ é **suave por partes**.

Seja $S_x = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots\} \subset [0, \infty)$ o conjunto de instantes de tempo em que $x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(M)}(t)$ apresentam saltos de descontinuidade. A **saída** correspondente do sistema é o (**único**) sinal **suave por partes** $y(t)$, $t \geq 0$, tal que:

1. $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(N)}(t)$ são **contínuas por partes**, e os possíveis **saltos de descontinuidade** estão em S_x
2. Para todo $t \geq 0$ com $t \notin S_x$, temos que $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(N)}(t)$ satisfazem

$$y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \dots + a_N y = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + \dots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + \dots + b_N x$$

3. A **resposta estado nulo** satisfaz $y_{esn}(t) = 0, t < 0$. A **resposta entrada nula** $y_0(t), t \in (-\infty, \infty)$, é **suave** e satisfaz

$$Q(D)y_0(t) = (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y_0(t) = 0$$

com $[y_0^{(N-1)}(0) \ \dots \ y_0^{(1)}(0) \ y_0(0)] = v_0$

4. A **saída** $y(t)$ satisfaz $[y^{(N-1)}(t) \ \dots \ y^{(1)}(t) \ y(t)]|_{t=0^-} = v_0$

2.2 Resposta Entrada Nula

Obs: $y_0(t)$ e $y_{esn}(t)$ são determinados de maneira independente

Exemplo: (no quadro)

Considere o sistema

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$.

Desse modo, a **resposta entrada zero** $y_0(t)$ é a solução **suave** da equação diferencial **homogênea**

$$Q(D)y_0(t) = (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y_0(t) = 0$$

com $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

- $Q(\lambda) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_{N-1} \lambda + a_N$: **polinômio característico** do sistema (**grau N !!!**)
- $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$: **equação característica**
- $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$: **raízes características** (ou **valores característicos, autovalores, frequências naturais**)

- **Raízes características** $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ **distintas e reais**: temos que

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

ou seja, $y_0(t)$ é uma combinação linear dos N **modos característicos** (ou **modos naturais**) $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$.

Os N coeficientes **reais** c_1, \dots, c_N são determinados a partir da condição $[y_0^{(N-1)}(0) \ \dots \ y_0^{(1)}(0) \ y_0(0)] = v_0$.

- **Raízes características** $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ **repetidas e reais**: quando quando a raiz característica λ_1 tem multiplicidade $r \geq 1$, temos que

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} \dots + c_N e^{\lambda_N t},$$

ou seja, $y_0(t)$ é uma combinação linear dos N **modos característicos** $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_{r+1} t}, \dots, e^{\lambda_N t}$. No caso de existirem várias raízes características com multiplicidade maior que 1, a expressão para $y_0(t)$ é análoga.

- **Raízes características** $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ **complexas**

As raízes complexas do polinômio característico

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_{N-1}\lambda + a_N$$

sempre ocorrem em pares complexos conjugados, pois os coeficientes a_i são reais. Logo, se $Q(\lambda) = 0$ com λ complexo, então $Q(\lambda^*) = 0$.

Suponha que $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ é uma raiz característica **complexa** do sistema de multiplicidade $r = 1$. Neste caso,

$$e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1)$$

é o **modo característico** do sistema associado a λ_1 complexo.

Por exemplo, se $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^*, \lambda_3, \dots, \lambda_N$ são raízes características com $\lambda_3, \dots, \lambda_N$ **reais e distintas**, então

$$y_0(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1) + c_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

onde os N coeficientes **reais** $c_1, \beta_1, c_3, \dots, c_N$ são determinados a partir da condição $[y_0^{(N-1)}(0) \dots y_0^{(1)}(0) y_0(0)] = v_0$.

De maneira semelhante, se $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ é **complexo** e tem multiplicidade $r \geq 1$, então

$e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1), te^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1), \dots, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t + \theta_1)$,
são os r **modos característicos** do sistema associados a λ_1 .

Método Alternativo (equivalente e mais fácil!): podemos sempre escolher $2r$ **modos característicos** associados a uma raiz característica complexa $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ de multiplicidade $r \geq 1$:

$$e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, e^{\alpha_1 t} \sen \beta_1 t, te^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, te^{\alpha_1 t} \sen \beta_1 t, \\ \dots, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, t^{r-1} e^{\alpha_1 t} \sen \beta_1 t$$

Em resumo: $y_0(t)$ é sempre uma combinação linear (com coeficientes reais) dos modos característicos do sistema. Os coeficientes da tal combinação linear sempre existem, são **únicos**, e são obtidos a partir da condição

$$[y_0^{(N-1)}(0) \ \dots \ y_0^{(1)}(0) \ y_0(0)] = v_0.$$

Portanto, quando $x(t) = 0, t \geq 0$ (entrada nula), então $y(t) = y_0(t), t \geq 0$, fica **completamente determinada** pela **condição inicial** v_0 e pelos **modos característicos** do sistema!

Obs 1: Quando utilizamos o **método alternativo**, $y_0(t)$ será uma combinação linear de N modos característicos. Os N coeficientes reais de tal combinação linear sempre existem, são **únicos**, e são obtidos a partir de um **sistema de equações lineares** determinado pela condição $[y_0^{(N-1)}(0) \ \dots \ y_0^{(1)}(0) \ y_0(0)] = v_0$.

Obs 2: Quando $v_0 = 0$, então $y_0(t) = 0, t \in (-\infty, \infty)$, ou seja a resposta entrada nula é **zero**! Logo, se $v_0 = 0$, então $y(t) = y_{esn}(t), t \geq 0$ (como teria que ser!).

Exemplos: (no quadro)

2.3 Resposta ao Impulso Unitário de um Sistema LCIT

Considere um sistema descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

onde ($N = M$)

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Suponha que $x(t) = \delta(t)$, ou seja, aplicamos um impulso unitário em $t = 0$ no sistema. Nosso objetivo é determinar

$h(t) = y_{esn}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, ou seja, encontrar a **resposta estado nulo** do sistema quando $x(t) = \delta(t)$. Isto pode ser feito da seguinte maneira:

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

onde $y_n(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é a solução de

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

com as seguintes condições iniciais

$$y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \dots = y_n^{(N-2)}(0) = 0, \quad y_n^{(N-1)}(0) = 1$$

Resposta ao Impulso

Em outras palavras, $y_n(t)$ é uma combinação linear dos modos característicos do sistema, cujos coeficientes são obtidos a partir das condições iniciais

$$y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \dots = y^{(N-2)}(0) = 0, \quad y^{(N-1)}(0) = 1$$

Denominamos $h(t)$ de **resposta ao impulso** ou **resposta impulsiva** do sistema.

Obs 1: Quando $N > M$, temos que $b_0 = 0$. Logo,

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

e a resposta impulsiva não apresenta nenhum impulso em $t = 0$.

Obs 2: Note que a resposta impulsiva $h(t)$ é **causal** para $N = M$ ou $N > M$. Além disso, $h(t)$ é determinada pelos **modos característicos** do sistema!

Exemplos: (no quadro)

2.4 Resposta do Sistema à Entrada Externa: Resposta Estado Nulo

Considere um sistema LCIT com memória. Relembre que a **resposta total** $y(t)$, $t \geq t_0$, é dada por

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t)}$$

Propriedade de Decomposição

Assuma que $t_0 = -\infty$. Relembre que $v(-\infty) = 0$ **por hipótese**. Assim, $y(t) = y_{esn}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ para uma dada entrada $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Como o impulso unitário $\delta(t)$ é uma função par, obtemos pela **propriedade de amostragem** que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) \end{aligned}$$

Logo,

entrada \longrightarrow saída

$\delta(t) \longrightarrow h(t)$ (resposta impulsiva)

$\delta(t - n\Delta\tau) \longrightarrow h(t - n\Delta\tau)$ (invariância)

$x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) \longrightarrow x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)$ (homogeneidade)

Portanto, usando a **propriedade de aditividade** (e assumindo continuidade na relação entrada-saída do sistema), concluímos que

$$\begin{aligned}x(t) \longrightarrow y(t) = y_{esn}(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &\triangleq x(t) * h(t) \quad (\text{integral de convolução})\end{aligned}$$

pois

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)$$

Ao repetirmos o mesmo raciocínio acima considerando que $t_0 = 0$ e $v(0) = 0$, obtemos que

$$x(t), t \geq 0 \longrightarrow y_{esn}(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau, t \geq 0$$

Portanto, para **efeitos de cálculo**, podemos assumir (e é o que **sempre faremos!**) que $x(t) = 0, t < 0$ (**entrada causal!**), e assim

$$\begin{aligned} x(t), t \geq 0 \longrightarrow y_{esn}(t) &= \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * h(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

2.4-1 A Integral de Convolução

Sejam $x_1(t), x_2(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais. A **integral de convolução** de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o sinal real $c(t)$ definido por

$$\begin{aligned}c(t) &= x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \\&= \int_{-\infty}^0 x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(desde que a integral imprópria seja **finita** para qualquer $t \in \mathbb{R}$).

Obs 1: A variável de integração é τ , e não t !

Obs 2: Para calcularmos $c(\bar{t})$ no instante \bar{t} , primeiro fazemos uma reversão temporal de $x_2(\tau)$ seguida de um deslocamento por \bar{t} , depois multiplicamos por $x_1(\tau)$, e então integramos de $-\infty$ a ∞ .

Obs 3: O valor de $c(\bar{t})$ no instante \bar{t} depende do comportamento dos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em **todo** o eixo temporal $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$!

Propriedades: Sejam $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais e k um número real. Então:

1. $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$ (comutatividade)
2. $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ (associatividade)
3. $x_1(t) * [x_2(t) \pm x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] \pm [x_1(t) * x_3(t)]$
(distributividade)
4. Se $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, então
$$x_1(t) * x_2(t - T) = x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T)$$
$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2) = c(t - (T_1 + T_2))$$
(propriedade de deslocamento)
5. $x_1(t) * \delta(t) = x_1(t)$ ($\delta(t)$ é o elemento neutro da convolução)
6. $[kx_1(t)] * x_2(t) = x_1(t) * [kx_2(t)] = k[x_1(t) * x_2(t)]$
7. Se $x_1(t)$ é diferenciável, então $[Dx_1(t)] * x_2(t) = D[x_1(t) * x_2(t)]$
8. Se $x_1(t)$ tem duração finita T_1 , e $x_2(t)$ tem duração finita T_2 , então $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$ tem duração finita $T_1 + T_2$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT

Considere um sistema descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$
em $t_0 = 0^-$, onde $(N = M)$

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Relembre que este é um sistema LCIT com **memória** e **causal**, e que a resposta total $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) (v_0=0)}$
--

Propriedade de Decomposição

Além disso, relembre que a **resposta impulsiva** $h(t)$ é **causal** e determinada a partir dos **modos característicos** do sistema.

Relembre, ainda, que para encontrarmos $y_{esn}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, assumimos que $x(t) = 0$, para $t < 0$ (**entrada causal**). Ao seguirmos o mesmo raciocínio utilizado no início da Seção 2.4, encontramos que

$$\begin{aligned} y_{esn}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)h(t - \tau) d\tau + \int_{0^-}^{0^+} x(\tau)h(t - \tau) d\tau + \int_{0^+}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

No entanto, como $x(t)$ e $h(t)$ são **causais**, temos que $x(\tau) = 0$, para $\tau < 0$, e $h(t - \tau) = 0$, para $t < \tau$. Portanto,

$$\begin{cases} t < 0 \Rightarrow x(\tau)h(t - \tau) = 0 \text{ para } \tau \in \mathbb{R} \Rightarrow y_{esn}(t) = 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow x(\tau)h(t - \tau) = 0 \text{ para } \tau > t \Rightarrow y_{esn}(t) = \int_{0^-}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{cases}$$

Logo, a **resposta estado nulo** $y_{esn}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é **causal** e dada por

$$y_{esn}(t) = \begin{cases} \int_{0^-}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^t h(\tau)x(t-\tau) d\tau, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$y_{esn}(t) = \left[\int_{0^-}^t x(\tau)h(t-\tau) d\tau \right] u(t) = \left[\int_{0^-}^t h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right] u(t), t \in \mathbb{R}$$

Obs 1: O limite inferior de integração é escolhido como 0^- para cobrirmos o caso em que a entrada $x(t)$ e/ou a resposta impulsiva $h(t)$ possuem um impulso $\delta(t)$ em $t = 0$. Em tal situação, não temos como calcular $y_{esn}(0)$, mas somente $y_{esn}(0^+)$. Quando nem $x(t)$ nem $h(t)$ possuem impulsos em $t = 0$, podemos trocar 0^- por 0 no limite inferior de integração.

Obs 2: Relembre que a resposta impulsiva $h(t)$ é calculada a partir dos modos característicos do sistema. Desta maneira, concluímos que a **resposta estado nulo** $y_{esn}(t)$ fica **completamente determinada** pela **entrada** $x(t)$ e pelos **modos característicos!**

Obs 3: A resposta estado nulo possui o comportamento esperado:

- Se $x(t) = \delta(t)$, então $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$, pois $\delta(t)$ é o elemento neutro da convolução.
- Se $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, então $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $y(t) = y_0(t)$, $t \geq 0$.

Obs 4: Há duas maneira de interpretar $h(t)$:

- (**Intuitiva**) Se $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ e $h_\epsilon(t)$ é a resposta estado nulo para a entrada $\delta_\epsilon(t)$, então $h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(t)$.
- (**Técnica**) $\delta(t)$ é o sinal tal que $x(t) * \delta(t) = x(t)$, e $h(t) = b_0\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$ é o sinal tal que $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = b_0x(t) + x(t) * \{[P(D)y_n(t)]u(t)\}$ é a resposta estado nulo para a entrada $x(t)$.

Tabela de Convolução: veja a Tabela 2.1, p. 166, do Lathi. Por exemplo:

$$e^{\lambda t} u(t) * u(t) = \frac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda} u(t) \quad (\text{Linha 1})$$

$$u(t) * u(t) = tu(t) \quad (\text{Linha 2})$$

$$e^{\lambda_1 t} u(t) * e^{\lambda_2 t} u(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (\text{Linha 4})$$

$$e^{\lambda t} u(t) * e^{\lambda t} u(t) = te^{\lambda t} u(t) \quad (\text{Linha 5})$$

$$e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) u(t) * e^{\lambda t} u(t) = \frac{\cos(\theta - \phi) e^{\lambda t} - e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2} (= |z|)} u(t),$$

onde $z = (\alpha + \lambda) - j\beta = |z|e^{j\phi}$ (Linha 12)

Relembre que $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$ (**comutatividade**).

Exemplos: (no quadro)

Pelo o que mostramos nos slides anteriores, podemos concluir que:

- Se $x_1(t) = f_1(t)u(t)$ é um **signal causal**, então

$$c(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Se $x_1(t) = f_1(t)u(t)$ e $x_2(t) = f_2(t)u(t)$ são **causais**, então

$$c(t) = x_1(t) * x_2(t) = \left[\int_{0^-}^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] u(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, temos que:

Um **sistema LCIT é causal** \Leftrightarrow a resposta impulsiva $h(t)$ é **causal**

Considere um sistema **LCIT causal** com $x(t), t \in \mathbb{R}$, **causal** (logo, $y_{esn}(t), t \in \mathbb{R}$, é **causal**). Obtemos pela **propriedade de deslocamento da convolação** que, para $T > 0$:

$$\text{se } v(0) = 0, x(t), t \geq 0 \} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq 0$$

$$\text{então } v(0) = 0, \bar{x}(t) = x(t-T), t \geq 0 \} \longrightarrow \bar{y}_{esn}(t) = y_{esn}(t-T), t \geq 0$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT a Entradas Complexas

Considere um sistema LCIT. Em um sistema físico real, as entradas e saídas só podem ser sinais que assumem valores reais, e não valores complexos. Na Seção 1.4, vimos que diversos sinais reais de interesse prático podem ser expressos como uma combinação linear de exponenciais complexas e^{st} . Desse modo, pela linearidade, se soubermos encontrar a resposta do **modelo do sistema** para a exponencial complexa e^{st} , então saberemos a resposta do **sistema real** para tais sinais reais.

Considere um sinal complexo $x(t) = x_r(t) + j x_i(t)$, onde $x_r(t)$ e $x_i(t)$ são sinais reais. Considere que

$$x_r(t) \longrightarrow y_{esn_r}(t)$$

$$x_i(t) \longrightarrow y_{esn_i}(t)$$

Definimos então

$$x(t) = x_r(t) + j x_i(t) \longrightarrow y_{esn}(t) = y_{esn_r}(t) + j y_{esn_i}(t)$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT a Entradas Complexas

Agora, seja $h(t)$ a resposta impulsiva (real) do sistema. Definimos

$$\begin{aligned} y_{esn}(t) &= x(t) * h(t) = (x_r(t) + j x_i(t)) * h(t) \triangleq x_r(t) * h(t) + j x_i(t) * h(t) \\ &= y_{esn_r}(t) + j y_{esn_i}(t) \end{aligned}$$

Assim,

$$x(t) = x_r(t) + j x_i(t) \longrightarrow y_{esn}(t) = y_{esn_r}(t) + j y_{esn_i}(t)$$

se e somente se

$$x_r(t) \longrightarrow y_{esn_r}(t)$$

$$x_i(t) \longrightarrow y_{esn_i}(t)$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LCIT a Múltiplas Entradas

Suponha que

$$x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t) \quad (m \text{ entradas})$$

Concluimos então pela linearidade do sistema que

$$y_{esn}(t) = \sum_{k=1}^m y_{esn_k}(t),$$

onde

$$x_k(t) \longrightarrow y_{esn_k}(t)$$

2.4-2 Entendimento Gráfico da Operação de Convolução

Desejamos calcular a integral de convolução dos sinais $x(t)$ e $g(t)$:

$$c(t) = x(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau) d\tau = g(t)*x(t)$$

Note que a variável de integração é τ , e que $g(t - \tau)$ e $x(t - \tau)$ correspondem a uma **reversão** seguida de um **deslocamento** por t . Como **regra geral** para facilitar o cálculo de $c(t)$, escolhemos o sinal a ser revertido como o **mais simples** entre x e g . Suponha que vamos reverter g . Seguimos então o método abaixo.

Procedimento Gráfico para Calcular $c(t) = x(t) * g(t)$:

1. Mantenha o sinal $x(\tau)$ fixo.
2. Faça a reversão de $g(\tau)$, obtendo $g(-\tau)$.
3. Faça um deslocamento de $g(-\tau)$ por t , obtendo $g(t - \tau)$. Logo, $t > 0$ é um **atraso** de $g(-\tau)$ (deslocamento de $g(-\tau)$ pra **direita**), e $t < 0$ é um **avanço** (deslocamento pra **esquerda**).
4. A área abaixo do produto $x(\tau)g(t - \tau)$ é o valor da convolução $c(t)$ no instante t . Temos que variar t em $(-\infty, \infty)$.

Animação: John Hopkins University – Signals Systems Control
<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

Exemplos: (no quadro)

Exemplo: Motor CC (no quadro)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v : \text{tensão de armadura (entrada)} \\ y = \omega : \text{velocidade angular do eixo do motor (saída)} \\ L : \text{indutância do enrolamento} \\ R : \text{resistência do enrolamento} \\ K_b : \text{constante de tensão} \\ J : \text{momento de inércia equivalente do motor} \\ b : \text{coeficiente de atrito viscoso} \\ K_t : \text{constante de torque do motor} \end{array} \right.$$

$$L = 0.01\text{H}, R = 1.2\Omega, J = 0.2, b = 0.1, K_b = K_t = 1$$

Considere um sistema LCIT descrito por

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)y(t) = (b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y(0^-) \ y^{(1)}(0^-) \ \dots \ y^{(N-1)}(0^-)] \in \mathbb{R}^N$ em $t_0 = 0^-$ e $M = N - 1$ ($b_0 = 0$). Para simularmos este sistema num pacote computacional como o Matlab, seguimos os seguintes passos:

1. Montamos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{N-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}_{N \times 1}$$
$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N}$$
$$D = 0$$

2. Definimos a matriz quadrada (é sempre **invertível!**)

$$K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (\text{comando } K=\text{ctrb}(A',C') \text{ no Matlab})$$

3. Simulamos (**espaço de estados**)

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

com condição inicial

$$q(0) = K^{-1}v'_0,$$

onde $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_N(t)]' \in \mathbb{R}^N$ são as **variáveis de estado**.

Exemplo: Motor CC (no quadro)

2.4-3 Sistemas Interconectados

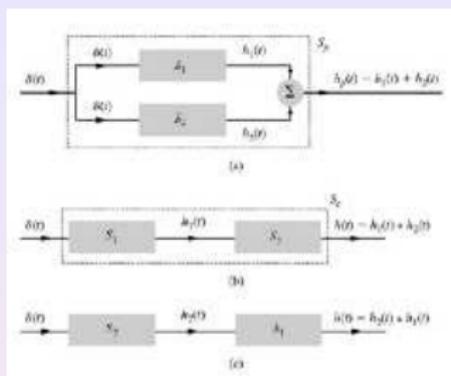


Figura : Sistemas interconectados.

Suponha que o sistema S_1 tem resposta impulsiva $h_1(t)$ e que o sistema S_2 tem resposta impulsiva $h_2(t)$. Então:

- Conexão em **paralelo**: o sistema S_p tem resposta impulsiva $h_p(t) = h_1(t) + h_2(t)$
- Conexão em **cascata (ou série)**: o sistema S_c tem resposta impulsiva $h_c(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$. Assim, em termos da resposta impulsiva $h_c(t)$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, **fisicamente** a ordem importa. Por exemplo, o sistema **motor-gerador** é diferente do sistema **gerador-motor**.

- **Integração:**

$$x(t) \longrightarrow y_{esn}(t) = x(t)*h(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longrightarrow \bar{y}_{esn}(t) = \int_{-\infty}^t y_{esn}(\tau) d\tau$$

Exemplos:

a) Seja $g(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = u(t)$ (**degrau unitário**). Como $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$, temos $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$.

b) Seja $f(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = tu(t)$ (**rampa unitária**). Como $tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$, temos $f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$.

- **Derivação (veja a Propriedade 7 da Convolução):**

$$x(t) \longrightarrow y_{esn}(t) = x(t)*h(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow \bar{y}_{esn}(t) = \frac{dy_{esn}(t)}{dt} \text{ (der. gen!)}$$

Exemplos:

a) $h(t) = dg(t)/dt$, pois $\delta(t) = du(t)/dt$

b) $y_{esn}(t) = x(t) * h(t) = x(t) * dg(t)/dt = dx(t)/dt * g(t)$, pela Propriedade 7 da Convolução

2.4-5 Resposta Natural e Resposta Forçada

Considere um sistema LCIT descrito por

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = [y^{(N-1)}(0^-) \dots y^{(1)}(0^-) y(0^-)] \in \mathbb{R}^N$
em $t_0 = 0^-$ e $N \geq M$. Temos que

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y(t)} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0(t) (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}(t) (v_0=0)}$$

Relembre que $y_0(t)$ depende da **condição inicial** v_0 e dos **modos característicos** do sistema, e que $y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$ depende da **entrada** $x(t)$ e dos **modos característicos** através de $h(t)$.

Resposta Natural e Resposta Forçada

Para o sistema

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

com $v_0 = [0 \ -5]$ e $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$, determinamos anteriormente que os modos característicos são $\{e^{-t}, e^{-2t}\}$, e que

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_0(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{esn}(t)}, \quad t \geq 0$$

Agora, ao juntarmos os termos **envolvendo** os **modos característicos** em $y(t)$, obtemos uma componente $y_n(t)$ denominada de **resposta natural (ou solução homogênea)**. E, ao juntarmos os termos que **não envolvem** os **modos característicos** em $y(t)$, encontramos uma componente $y_\phi(t)$ denominada de **resposta forçada (ou solução particular)**. Logo,

$$y(t) = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{y_n(t)} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{y_\phi(t)}, \quad t \geq 0$$

Obs: Em geral, $y_0(t) \neq y_n(t)$ e $y_{esn}(t) \neq y_\phi(t)$!

2.5 Solução Clássica de Equações Diferenciais

Tarefa: Ler a Seção 2.5 do Lathi

Desvantagens da solução clássica em relação às técnicas estudadas até aqui:

1. Fornece **resposta total = resposta natural + resposta forçada**, e não **resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo**
2. Restringe as entradas $x(t)$ possíveis de serem aplicadas
3. Exige que as condições iniciais sejam conhecidas em $t_0 = 0^+$ (e não em $t_0 = 0^-$!). E isto pode ser bastante complicado de se determinar na prática (veja a p. 152 e o Exemplo 2.2 do Lathi).

Dica: no Exemplo 2.2 do Lathi, a tensão no capacitor e a corrente no indutor são as **variáveis de estados** (armazenadores de energia). E as variáveis de estado são **sempre** funções **contínuas** do tempo! É por isso que podemos garantir que $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+)$!

4. Não apresenta uma relação direta com a Transformada de Laplace (Capítulo 4 do Lathi)

2.6 Estabilidade de Sistemas

Considere um sistema LCIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação diferencial). Assuma que $v(-\infty) = 0$ (condição inicial nula em $t_0 = -\infty$). Na Seção 2.4, encontramos que

$$y(t) = y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$$

Dizemos que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Propriedade:

$$\text{O sistema é BIBO estável} \Leftrightarrow M_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Neste caso, se $|x(t)| \leq M_x < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ (entrada limitada), então $|y_{esn}(t)| \leq M_x M_h = M_{y_{esn}}$, $t \in \mathbb{R}$ (saída limitada). Isto significa que para termos $M_{y_{esn}}$ **arbitrariamente** pequeno, basta que M_x seja **suficientemente** pequeno.

2.6 Estabilidade de Sistemas

Agora, considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$. Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0(t) = 0$. Dizemos que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Propriedade: Se $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, então o sistema é BIBO **instável**.

Obs: **BIBO** estabilidade refere-se à estabilidade **externa** ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

2.6-1 Estabilidade Interna (Assintótica)

Considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$.

Relembre que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{esn} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ **mas** $v_0 \neq 0$? Este é o conceito de **estabilidade interna (ou assintótica)** do sistema.

Estabilidade Interna (Assintótica)

Temos então a seguinte classificação em relação à **estabilidade interna** ($v_0 \neq 0$ e $x(t) = 0$) do sistema:

1. Assintoticamente estável: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$.

Ex: pêndulo simples com atrito.

Critério (\Leftrightarrow): *todas as raízes características estão no SPE (Semi-Plano Esquerdo) do plano complexo, ou seja, possuem parte real negativa.*

2. Assintoticamente instável: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y(t) = y_0(t)$ é *ilimitada*.

Critério (\Leftrightarrow): *quando houver ao menos uma raiz característica no SPD (Semi-Plano Direito) (i.e. com parte real positiva) e/ou raízes com multiplicidade em cima do eixo imaginário.*

2.6-2 Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

3. Marginalmente estável: quando para termos $y(t) = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, limitada e *arbitrariamente* próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja *suficientemente* próxima de zero.

Ex: pêndulo simples sem atrito.

Critério (\Leftrightarrow): quando *não há* raízes características no *SPD* (Semi-Plano Direito), mas *existem* raízes *sem multiplicidade* em cima do *eixo imaginário*.

Temos as seguintes relações entre a estabilidade **externa** (BIBO) e a estabilidade **interna** (assintótica) de um sistema **descrito** por uma **equação diferencial**:

Propriedades:

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável **ou** marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Exemplos: (no quadro)

3. Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Um sinal em **tempo discreto** é aquele em que o tempo **dá saltos**. Matematicamente, o sinal é dado por uma função

$$x[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde \mathbb{Z} é o conjunto dos **números inteiros**. Desse modo, $x[n]$ é uma sequência de números:

$$\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots$$

Exemplos:

- Os valores $x[n]$ do PIB no trimestre n
- **Amostragem** de um **sinal contínuo** $x(t)$ com período $T > 0$:

$$x[n] = x(nT)$$

é a n -ésima amostra de $x(t)$, e as amostras estão espaçadas no tempo em T segundos. Denominamos $T > 0$ de **período de amostragem**. Note que $x[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) dt$.

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Um **sistema em tempo discreto** é um sistema em que os sinais de entrada $x[n]$ e de saída $y[n]$ são sinais em tempo discreto.

Exemplo: computador (digital)

Motivação: Processamento Digital de um Sinal Analógico $x(t)$ por um Microcontrolador (no quadro)

Na sequência, apresentaremos para sinais e sistemas **em tempo discreto**, definições, propriedades, operações e modelos, de maneira semelhante ao que estudamos anteriormente para sinais e sistemas em **tempo contínuo**.

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Seja $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, um sinal. Considere as **somas parciais**

$$s[n] = x[0] + x[1] + \cdots + x[n] = \sum_{m=0}^n x[m], \quad n \geq 0$$

$$r[n] = x[-n] + x[-n+1] + \cdots + x[-2] + x[-1] = \sum_{m=-n}^{-1} x[m], \quad n \geq 1$$

Se os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n x[m], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^{-1} x[m]$$

existem, então escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n x[m], \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^{-1} x[m]$$

3.1-1 Tamanho do Sinal

Quando ambos os limites acima existem, definimos a **série** associada a $x[n]$ por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] + \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]$$

Energia de um sinal real $x[n]$: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 \leq \infty$

Energia de um sinal complexo $x[n]$: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \infty$

Potência de um sinal real $x[n]$:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]^2 \leq \infty$$

Potência de um sinal complexo $x[n]$:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \leq \infty$$

- P_x : valor médio quadrático de $x[n]$
- $P_{x\ rms} = \sqrt{P_x}$: valor *rms* (Raiz Média Quadrática – *Root Mean Square*)

Dizemos que $x[n]$ é **periódico** quando existe $N \geq 1$ tal que

$$x[n + N] = x[n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O menor $N_0 \geq 1$ que satisfaz $x[n + N_0] = x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é denominado de **período fundamental** de $x[n]$. Neste caso,

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]^2 < \infty \quad (\text{real})$$

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 < \infty \quad (\text{complexo})$$

Propriedades:

1. Suponha que $x_1[n]$ e $x_2[n]$ têm o **mesmo** período N_0 . Então os seguintes sinais **também** possuem período N_0 :

- $x[n] = Cx_1[n]$, C real ou complexo
- $x[n] = x_1[n] \pm x_2[n]$
- $x[n] = x_1[n]x_2[n]$
- $x[n] = x_1[n]/x_2[n]$, com $x_2[n] \neq 0$ para todo n

Prova da soma: Seja $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$. Então,

$$x[n + N_0] = x_1[n + N_0] + x_2[n + N_0] = x_1[n] + x_2[n] = x[n]$$

Energia e Potência de um Sinal

Obs 1: Existem 4 situações:

1. $E_x < \infty$: energia finita (neste caso,

$$E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x[n]^2 < \infty)$$

2. $E_x = \infty$: energia infinita

3. $P_x < \infty$: potência finita

4. $P_x = \infty$: potência infinita

É fácil ver que

$$\bullet E_x < \infty \Rightarrow P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_x / (2N + 1) = 0$$

$$\bullet 0 < P_x \leq \infty \Rightarrow E_x = \infty.$$

Quando $E_x < \infty$, dizemos que $x[n]$ é um sinal de **energia**. E, quando $0 < P_x < \infty$, dizemos $x[n]$ é um sinal de **potência**. Logo, não existem sinais $x[n]$ que são **simultaneamente** de energia e de potência. No entanto, existem sinais que não são **nem de energia nem de potência** (por exemplo, $x[n] = n$, $E_x = \infty$, $P_x = \infty$).

Energia e Potência de um Sinal

Obs 2: Se $x[n]$ tem **duração finita**, ou seja,

$$x[n] = 0, \quad n < N_1 \text{ ou } n > N_2,$$

então $E_x = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]^2 < \infty$ e $P_x = 0$.

Obs 3: Seja a um número real. Considere o sinal definido por

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Então:

- $|a| < 1 \Rightarrow E_x = \frac{1}{1 - |a|^2}$ (sinal de energia)
- $|a| = 1 \Rightarrow P_x = 0.5$ (sinal de potência).
- $|a| > 1 \Rightarrow$ nem de energia nem de potência

Exemplos: (no quadro)

3.2 Operações Úteis com Sinais

1. Deslocamento temporal: $x_s[n] = x[n \pm M]$, $M \geq 1$ (inteiro)

- **+**: **adiantamento** no tempo em M unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x[n]$ para a **esquerda** em M unidades
- **-**: **atraso** no tempo em M unidades \Rightarrow deslocamento do gráfico de $x[n]$ para a **direita** em M unidades

2. Reversão (inversão) temporal: $x_r[n] = x[-n]$

- O gráfico de $x[n]$ é rebatido sobre o eixo **vertical**.

Cuidado: O gráfico de $x[n]$ é rebatido sobre o eixo **horizontal** quando $x_r[n] = -x[n]$!

Exemplos: (no quadro)

Operações Combinadas: $z[n] = x[k - n]$ com k inteiro pode ser interpretado de duas maneiras equivalentes:

1. Primeiramente fazemos a reversão de $x[n]$, obtendo $y[n] = x[-n]$. Em seguida, deslocamos $y[n]$ por k , obtendo $z[n] = y[n - k] = x[-(n - k)] = x[k - n]$.
2. Primeiramente deslocamos $x[n]$ por k , obtendo $y[n] = x[n + k]$. Em seguida, fazemos a reversão de $y[n]$, obtendo $z[n] = y[-n] = x[k - n]$.

Propriedades: Suponha que um sinal $x[n]$ tem energia E_x e potência P_x (**cuidado:** $P_y = P_x$ em **2** e **3** são válidas apenas quando $x[n]$ for periódico!).

1. Se $y[n] = -x[n]$, então $E_y = E_x$ e $P_y = P_x$.
2. Se $y[n] = x[-n]$, então $E_y = E_x$ e $P_y = P_x$.
3. Se $y[n] = x[n - M]$ com M inteiro, então $E_y = E_x$ e $P_y = P_x$.
4. Se $y[n] = Cx[n]$ com C real, então $E_y = C^2 E_x$ e $P_y = C^2 P_x$.

3. Decimação pelo fator $M \geq 1$ (inteiro): $x_d[n] = x[Mn]$

- Há perda de valores de $x[n]$!

4. Expansão pelo fator $L \geq 1$ (inteiro) :

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{quando } n/L \text{ é inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_e[0] = x[0], \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1 \text{ zeros}}, x_e[L] = x[1], \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1 \text{ zeros}}, x_e[2L] = x[2], \dots$$

- Não há perda de valores de $x[n]$!

Decimação e Expansão

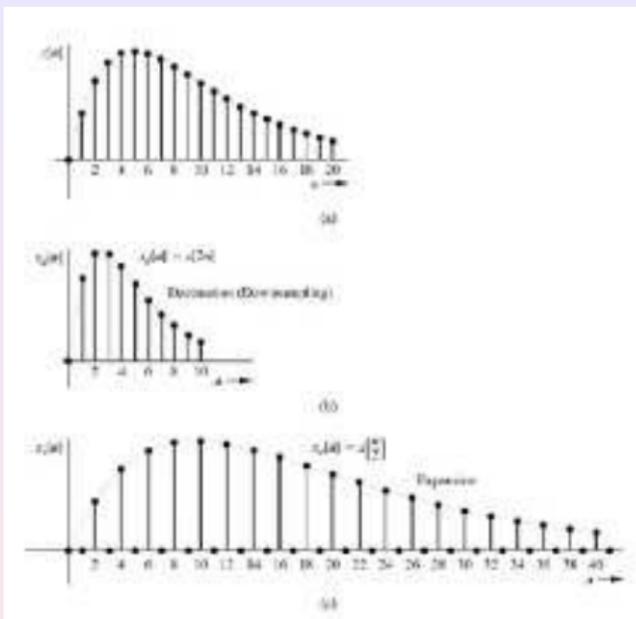


Figura : Decimação e expansão de $x[n]$ pelo fator $M = L = 2$.

3.3 Alguns Modelos Úteis em Tempo Discreto

1. Função Impulso Unitário ou **delta de Kronecker** $\delta[n]$: é o sinal definido por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

• Note que $\delta[n]$ é um sinal **usual**, ao contrário de $\delta(t)$!

Propriedades

a. $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$, $x[n]\delta[n - m] = x[m]\delta[n - m]$

b. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - m] = 1$

c. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - m] = x[m]$

2. Função Degrau Unitário $u[n]$: é o sinal definido por

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Exemplos: (no quadro)

3. Exponencial γ^n

- $\gamma \neq 0$ real: é o sinal definido por

$$x[n] = \gamma^n = e^{\lambda n} = (e^\lambda)^n \quad (\gamma > 0) \quad \text{ou} \quad x[n] = (\gamma)^n = (-e^\lambda)^n \quad (\gamma < 0)$$

onde $|\gamma| = e^\lambda$ ou $\lambda = \ln |\gamma|$. Logo,

- $|\gamma| < 1$ (**dentro** do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0$
- $|\gamma| > 1$ (**fora** do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow x[n]$ é ilimitado
- $|\gamma| = 1$ (**no** Círculo Unitário) $\Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow |x[n]| = 1$

- $\gamma = e^\lambda$ com $\lambda = a + jb$: é o sinal definido por

$$x[n] = \gamma^n = (e^\lambda)^n = (e^{a+jb})^n = (e^a e^{jb})^n = (e^a)^n e^{jbn}$$

Note que $|\lambda| = |e^a| |e^{jb}| = e^a$. Logo,

- $|\gamma| < 1$ (**dentro** do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = 0$
- $|\gamma| > 1$ (**fora** do Círculo Unitário) $\Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow x[n]$ é ilimitado
- $|\gamma| = 1$ (**no** Círculo Unitário) $\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x[n] = e^{jbn} \Leftrightarrow |x[n]| = 1$

Exponencial

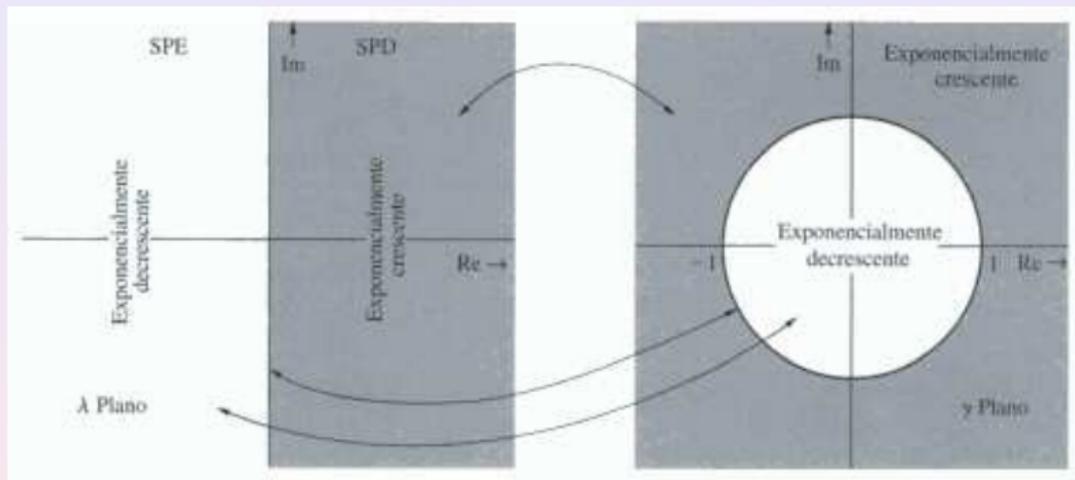


Figura : Plano λ e plano γ .

Exponencial

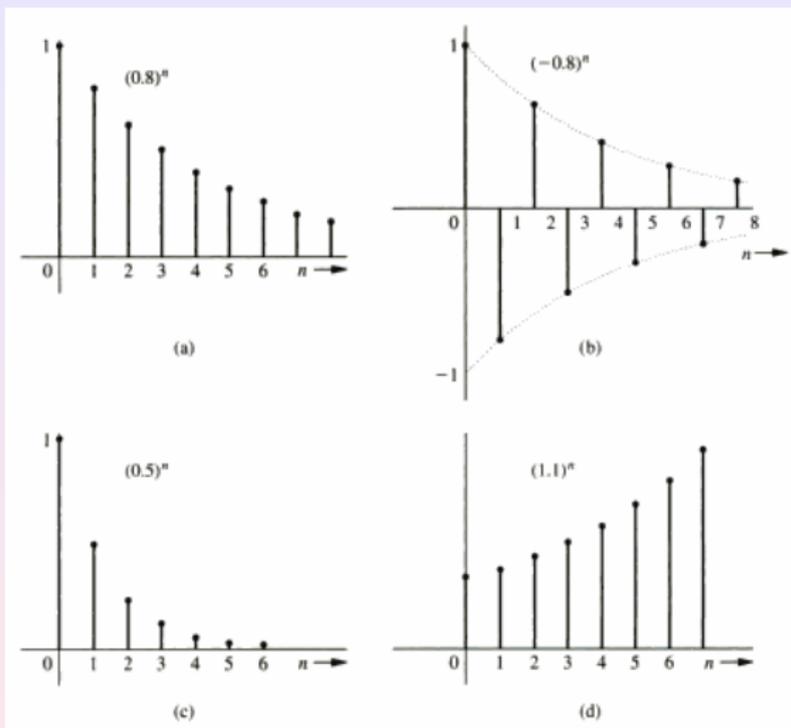


Figura : (a) $\gamma = 0.8 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (b) $\gamma = -0.8 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (c) $\gamma = 0.5 \Rightarrow$ dentro do Cir. Unit. (d) $\gamma = 1.1 \Rightarrow$ fora do Cir. Unit.

4. **Exponencial complexa** $e^{j\Omega n}$ com Ω real: é o sinal definido por

$$x[n] = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sen \Omega n$$

Cuidado! (veja as Seções 5.5-1 e 9.1 do Lathi)

$x[n] = e^{j\Omega n}$ é periódico $\Leftrightarrow \frac{\Omega}{2\pi}$ é racional

Relembre que $\gamma^{-n} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n$ para γ real.

Exemplos: (no quadro)

5. **Senóide:** é o sinal definido por

$$x[n] = C \cos(\Omega n + \theta) = C \cos(2\pi \mathcal{F} n + \theta)$$

- $C \geq 0$ é a **amplitude**
- $\Omega > 0$ é a **frequência angular**
- θ é a **fase** (radianos)
- $\mathcal{F} = \Omega/(2\pi)$ é a **frequência**
- $N_0 = 1/\mathcal{F} = 2\pi/\Omega$ é o **período**

Cuidado! (veja as Seções 5.5-1 e 9.1 do Lathi)

$$x[n] = C \cos(\Omega n) \text{ é } \mathbf{periódico} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \frac{\Omega}{2\pi} \text{ é } \mathbf{racional}$$

Exemplos:

- $x[n] = \text{sen}(0.1\pi n)$ é periódica pois $0.1\pi/(2\pi) = 1/20$ é racional
- $x[n] = \text{sen}(3n)$ não é periódica pois $3/(2\pi)$ não é racional
- $x(t) = \text{sen}(3t)$, $T = 1.8 \Rightarrow x[n] = x(nT) = \text{sen}(5.4n)$ não é periódica (e tem **frequência aparente** menor!)

Sinal Causal: quando $x[n]$ **não começa** antes de $n = 0$, ou seja, $x[n] = 0$ **para todo** $n < 0$

Sinal Não-Causal: quando $x[n]$ não é causal. Isto significa que $x[n]$ começa antes de $n = 0$, ou seja, existe pelo menos **algum** $\bar{n} < 0$ tal que $x[\bar{n}] \neq 0$

Sinal Anti-Causal: quando $x[n] = 0$ **para todo** $n \geq 0$

Classificação de Sinais

Um sinal $x_e[n]$ é **par** quando, para todo n ,

$$x_e[n] = x_e[-n], \text{ (simetria em relação ao eixo vertical),}$$

Um sinal $x_o[n]$ é **ímpar** quando, para todo n ,

$$x_o[n] = -x_o[-n], \text{ (rebatimento diagonal do gráfico),}$$

Se $x[n]$ é ímpar, então $x[0] = -x[-0]$, ou seja, $x[0] = 0$. Portanto:

- $x[n]$ é ímpar $\Rightarrow x[0] = 0$
- $x[0] \neq 0 \Rightarrow x[n]$ não é ímpar

Exemplos:

1. $x[n] = C \cos[\Omega n]$ é par, pois $C \cos(\Omega n) = C \cos(-\Omega n)$
2. $x[n] = C \sen[\Omega n]$ é ímpar, pois $C \sen(\Omega n) = -C \sen(-\Omega n)$
3. $x[n] = n^p$, com $p > 0$ par, é um sinal par
4. $x[n] = n^p$, com $p > 0$ ímpar, é um sinal ímpar
5. O impulso $\delta[n]$ é par. Logo, $\delta[n] = \delta[-n]$ e $\delta[k - n] = \delta[n - k]$

Propriedades:

1. par \pm par = par
2. ímpar \pm ímpar = ímpar
3. par \times ímpar = ímpar
4. par \times par = ímpar \times ímpar = par
5. $1/\text{par} = \text{par}$ $1/\text{ímpar} = \text{ímpar}$

Componentes Pares e Ímpares de um Sinal: Seja $x[n]$ um sinal. Então, podemos decompor $x[n]$ como

$$x[n] = \underbrace{\frac{1}{2}(x[n] + x[-n])}_{x_e[n] \text{ é par}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x[n] - x[-n])}_{x_o[n] \text{ é ímpar}}$$

Note que:

- $x[n] = x_e[n]$ ($x_o[n] = 0$) $\Leftrightarrow x[n]$ é par
- $x[n] = x_o[n]$ ($x_e[n] = 0$) $\Leftrightarrow x[n]$ é ímpar

3.4 Exemplos de Sistemas em Tempo Discreto

Exemplo 1: Conta Bancária (no quadro)

Exemplo 2: Integrador Digital (no quadro)

3.4-1 Classificação de Sistemas em Tempo Discreto

1. Sistemas Sem Memória e Com Memória

Sem Memória (ou Instantâneo): quando a saída no instante n depende apenas da entrada no instante n , ou seja, a saída em n **independe** dos valores da entrada antes de n e após n .

Com Memória (ou Dinâmico): quando o sistema não é sem memória. Isto significa que a saída no instante n **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro da entrada.

2. Sistemas Causais e Não-Causais

Causal (ou Físico ou Não-Antecipativo): quando a saída no instante n **independe** dos valores da entrada após n (futuro).

Não-Causal (ou Antecipativo): quando o sistema não é causal. Isto significa que a saída no instante n **depende** de **algum** valor futuro da entrada.

Obs: Todo **sistema real** deve ser **causal**. Sistemas não-causais não podem ser construídos (**realizados**) na prática. No entanto, alguns sistemas não-causais são vistos como sistemas ideais a serem aproximados por sistemas causais reais.

3. Sistemas Lineares e Não-Lineares

3.1 Sistemas Sem Memória

• **Linear**: quando o sistema satisfaz (k é real ou imaginário):

(a) $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \rightarrow y_3 = y_1 + y_2$
(aditividade)

(b) $x \rightarrow y \Rightarrow \bar{x} = kx \rightarrow \bar{y} = ky$ (**homogeneidade**)

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

$x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 = k_1x_1 + k_2x_2 \rightarrow y_3 = k_1y_1 + k_2y_2$
(**princípio da superposição**)

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear satisfaz: $x = 0 \rightarrow y = 0$. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x = 0 \rightarrow y = 0$.

Importante! Aditividade \nRightarrow Homogeneidade

• **Não-Linear**: quando o sistema não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade **ou** não satisfaz a homogeneidade

3.2 Sistemas com Memória

Condição Inicial (ou Estado Inicial) $v[n_0]$ de um sistema com memória no instante n_0 : é a informação em n_0 que, juntamente com o conhecimento da entrada $x[n]$, $n \geq n_0$ (futuro), determina uma **única saída** $y[n]$ para todo $n \geq n_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro da saída, não importa a maneira como o sistema atingiu a condição inicial $v[n_0]$, ou seja, $v[n_0]$ contém toda a informação passada do sistema até o instante n_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0], \\ x[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y[n], n \geq n_0$$

Resposta Entrada Nula $y_0[n]$: é a resposta do sistema quando

$$x[n] = 0, n \geq n_0: \boxed{v[n_0], x[n] = 0, n \geq n_0} \longrightarrow y_0[n], n \geq n_0$$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}[n]$: é a resposta do sistema quando

$$v[n_0] = 0: \boxed{v[n_0] = 0, x[n], n \geq n_0} \longrightarrow y_{esn}[n], n \geq n_0$$

Sistemas com Memória Lineares e Não-Lineares

• **Linear:** quando o sistema (com memória) satisfaz (k é real ou imaginário):

(a) **(Aditividade)** Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1[n_0], \\ x_1[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1[n], n \geq n_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2[n_0], \\ x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2[n], n \geq n_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3[n_0] = v_1[n_0] + v_2[n_0], \\ x_3[n] = x_1[n] + x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3[n] = y_1[n] + y_2[n], n \geq n_0$$

(b) **(Homogeneidade)** Se

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0], \\ x[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y[n], n \geq n_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}[n_0] = kv[n_0], \\ \bar{x}[n] = kx[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}[n] = ky[n], n \geq n_0$$

Sistemas com Memória Lineares e Não-Lineares

Note que as duas condições acima são equivalentes a:

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} v_1[n_0], \\ x_1[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_1[n], n \geq n_0 \quad \left. \begin{array}{l} v_2[n_0], \\ x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_2[n], n \geq n_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} v_3[n_0] = k_1 v_1[n_0] + k_2 v_2[n_0], \\ x_3[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_3[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n], n \geq n_0$$

Ao tomarmos $k = 0$ na condição de homogeneidade, concluímos que todo sistema linear (com memória) satisfaz:

$$\boxed{v[n_0] = 0, x[n] = 0, n \geq n_0 \} \longrightarrow y[n] = 0, n \geq n_0 .}$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $v[n_0] = 0, x[n] = 0, n \geq n_0 \} \longrightarrow y[n] = 0, n \geq n_0 .$

Importante! Aditividade \nrightarrow Homogeneidade

• **Não-Linear:** quando o sistema (com memória) não é linear, ou seja, não satisfaz a aditividade **ou** não satisfaz a homogeneidade

Obs: Sistemas sem memória não possuem estado inicial. Para sistemas com memória, sempre assumimos que $v[-\infty] = 0$.

Concluimos então que resposta total $y[n]$, $n \geq n_0$, de um **sistema linear com memória** é dada por $y[n] = y_0[n] + y_{esn}[n]$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } v[n_0]} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } x[n]}$$

Propriedade de Decomposição

4. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

4.1 Sistemas sem Memória

- **Invariante no tempo:** quando

$$x[n] \longrightarrow y[n] \Rightarrow \bar{x}[n] = x[n - M] \longrightarrow \bar{y}[n] = y[n - M]$$

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

4.2 Sistemas com Memória

- **Invariante no tempo:** quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} v[n_0] = v_0, \\ x[n], n \geq n_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y[n], n \geq n_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}[t_0 + M] = v_0, \\ \bar{x}[n] = x[n - M], n \geq n_0 + M \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}[n] = y[n - M], n \geq n_0 + M$$

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial n_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $n_0 = 0$.

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

Propriedade (será mostrada na Seção 3.8): Considere um sistema linear com memória causal invariante no tempo.

Suponha que $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma entrada **causal** e seja $M > 0$.

Então $y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é **causal** e:

$$\text{se } v[0] = 0, x[n], n \geq 0 \} \longrightarrow y_{esn}[n], n \geq 0$$

$$\text{então } v[0] = 0, \bar{x}[n] = x[n-M], n \geq 0 \} \longrightarrow \bar{y}_{esn}[n] = y_{esn}[n-M], n \geq 0$$

Isto significa que $x[n], n \geq 0 \longrightarrow y_{esn}[n], n \geq 0$, se comporta como um **sistema linear sem memória invariante no tempo!**

5. Sistemas Invertíveis e Não-Invertíveis

Relembre que um sistema S associa uma única saída $y[n]$ para cada entrada $x[n]$, ou seja, corresponde a um mapeamento do conjunto de entradas no conjunto de saídas. Quando diferentes entradas geram diferentes saída, ou seja,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \quad (\text{ou, equivalentemente, } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

dizemos que o sistema é **invertível**. Caso contrário, dizemos que o sistema é **não-invertível**.

Note que dizer que um S sistema é **invertível** é o mesmo que dizer que o mapeamento correspondente é **injetivo**. Neste caso, podemos, à princípio, determinar o **sistema inverso** S_i ; do sistema original S , o qual determina $x[n]$ a partir de $y[n]$. Desse modo, S em série com S_i resulta no **sistema identidade** ($y = x$).

6. Sistemas BIBO Estáveis e Instáveis

Um sinal $f[n]$ é **limitado** quando existe $M_f < \infty$ tal que

$$|f[n]| \leq M_f < \infty, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

ou, de maneira equivalente,

$$-M_f \leq f[n] \leq M_f, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Propriedades:

a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \infty$, então $f[n]$ é **ilimitado**.

b) Se $f[n] = 0$ para $n < n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = c$, então $f[n]$ é **limitado**.

Dizemos que um sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada limitada resultar numa saída limitada. Caso contrário, dizemos que o sistema é **BIBO instável**.

Exemplos: (no quadro)

3.5 Equações de Sistemas em Tempo Discreto

Considere um sistema em tempo discreto descrito por uma equação a diferenças na forma operador **avanço**

$$y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \cdots + a_{N-1} y[n + 1] + a_N y[n] \\ = b_{N-M} x[n + M] + \cdots + b_{N-1} x[n + 1] + b_N x[n] \quad (*)$$

onde $N \geq 1$, $M \geq 0$, e os coeficientes (**parâmetros**) a_i, b_i são constantes ou dependentes do tempo t . Pode-se mostrar que tal sistema é **linear** e **com memória**. De agora em diante, vamos considerar que $x[n_0 - N] = x[n_0 - N + 1] = \cdots = x[n_0 - 1] = 0$. O **estado inicial** no instante n_0 é o **vetor**

$$v[n_0] = (y[n_0 - N] \ \dots \ y[n_0 - 2] \ y[n_0 - 1]) \in \mathbb{R}^N.$$

Se $N \geq M$, então o sistema é **causal**. E, se $M > N$, então o sistema é **não-causal**. Quando **todos** os parâmetros a_i, b_i em (*) são constantes, o sistema é **invariante no tempo**. Caso contrário, é **variante**. Denominamos $\max(N, M)$ de **ordem** do sistema.

Exemplo: $y[n + 2] - 2y[n + 1] + 3y[n] = 5x[n + 1] + x[n]$
($N = 2, M = 1$) é um sistema **LDIT causal** de 2a **ordem**

Equações de Sistemas em Tempo Discreto

Agora, atrasando ambos os lados de (\star) por N , obtemos a forma operador **atraso**

$$\begin{aligned}y[n] + a_1y[n-1] + \cdots + a_{N-1}y[n-N+1] + a_Ny[n-N] \\ = b_{N-M}x[n+M-N] + \cdots + b_{N-1}x[n-N+1] + b_Nx[n-N] \quad (\star\star)\end{aligned}$$

Suponha que especificamos um **estado inicial** do sistema em n_0

$$v[n_0] = (y[n_0 - N] \ \dots \ y[n_0 - 2] \ y[n_0 - 1]) \in \mathbb{R}^N,$$

e que escolhemos uma **entrada**

$$x[n], \quad n \geq n_0.$$

Temos que um sinal discreto $y[n]$, $n \geq n_0 - N$, com $(y[n - N] \ \dots \ y[n - 2] \ y[n - 1])|_{n=n_0} = v[n_0]$ **satisfaz** (\star) para todo $n \geq n_0 - N$ **se e somente se satisfaz** $(\star\star)$ para todo $n \geq n_0$. Isto significa que (\star) e $(\star\star)$ possuem as **mesmas soluções**, ou seja, descrevem o mesmo sistema!

Equações de Sistemas em Tempo Discreto

Suponha que $N = M$ (sistema **causal**). Rescrevemos (***) como

$$y[n] = -a_1y[n-1] - \dots - a_{N-1}y[n-N+1] - a_Ny[n-N] \\ + b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{N-1}x[n-N+1] + b_Nx[n-N]$$

Portanto, a solução $y[n]$, $n \geq n_0 - N$, desta equação a diferenças pode ser obtida **recursivamente** (iterativamente) a partir de $v[n_0]$ e da entrada $x[n]$, $n \geq n_0$.

Exemplo: Considere o sistema LDIT descrito por

$$y[n+2] - y[n+1] + 0.24y[n] = x[n+2] - 2x[n+1]$$

com $n_0 = 0$, $v[0] = (y[-2] \ y[-1]) = (1 \ 2)$ e $x[n] = nu[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ (entrada causal). Logo,

$$y[n] = y[n-1] - 0.24y[n-2] + x[n] - 2x[n-1]$$

$$y[0] = y[-1] - 0.24y[-2] + x[0] - 2x[-1] = 1.76 \quad (n = 0)$$

$$y[1] = y[0] - 0.24y[-1] + x[1] - 2x[0] = 2.28 \quad (n = 1)$$

$$y[2] = y[1] - 0.24y[0] + x[2] - 2x[1] = 1.8576 \quad (n = 2)$$

e assim por diante ...

Considere um **sistema linear em tempo discreto invariante no tempo (LDIT)** em que a **relação entrada-saída** é descrita por uma equação a diferenças na forma operador **avanço**

$$\begin{aligned}y[n + N] + a_1y[n + N - 1] + \cdots + a_{N-1}[n + 1]y + a_Ny[n] \\ = b_0x[n + N] + b_1x[n + N - 1] + \cdots + b_{N-1}x[n + 1] + b_Nx[n]\end{aligned}$$

onde $N = M$ (**causal**) e os parâmetros a_i, b_i são **constantes e reais**. Assim, N é a **ordem** do sistema. Utilizando o operador **avanço unitário** E ($Ef[n] = f[n + 1], E^2f[n] = f[n + 2], \dots$), podemos rescrever tal equação como

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

onde

$$Q(E) = E^N + a_1E^{N-1} + \cdots + a_{N-1}E + a_N$$

$$P(E) = b_0E^N + b_1E^{N-1} + \cdots + b_{N-1}E + b_N$$

O estado inicial do sistema em $n_0 = 0$ é o **vetor**

$$v_0 = (y[-N] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$$

Isto significa que

$$\left. \begin{array}{l} v_0, \\ x[n], n \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y[n], n \geq 0$$

Como o sistema é **linear**, sabemos que a **resposta total** $y[n]$, $n \geq 0$, é dada por

$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y[n]} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0[n] (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}[n] (v_0=0)}$
--

Propriedade de Decomposição

Obs: Para **efeitos de cálculo** de $y_{esn}[n]$, $n \geq 0$, considera-se que $x[n] = 0$, $n < 0$ (**entrada causal!**).

A **saída** correspondente do sistema é o (**único**) sinal discreto $y[n]$, $n \geq -N$, tal que:

1. $(y[n - N] \dots y[n - 2] y[n - 1])|_{n=0} = v_0$ e, para todo $n \geq -N$,

$$\begin{aligned} y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \dots + a_{N-1} y[n + 1] + a_N y[n] \\ = b_0 x[n + N] + b_1 x[n + N - 1] + \dots + b_{N-1} x[n + 1] + b_N x[n] \end{aligned}$$

2. A **resposta estado nulo** satisfaz $y_{esn}[n] = 0, n < 0$. A **resposta entrada nula** $y_0[n], n \in \mathbb{Z}$, é a solução da equação a diferenças **homogênea**

$$Q(E)y_0[n] = (E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N)y_0[n] = 0$$

com $(y_0[-N] \dots y_0[-2] y_0[-1]) = v_0$.

Obs: $y_0[n]$ e $y_{esn}[n]$ são determinados de maneira independente

3.6 Resposta Entrada Nula

Considere o sistema LDIT causal ($N = M$)

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-M] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$.

Desse modo, a **resposta entrada zero** $y_0[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é a solução da equação a diferenças **homogênea**

$$Q(E)y_0[n] = (E^N + a_1E^{N-1} + \dots + a_{N-1}E + a_N)y_0[n] = 0$$

com $(y_0[-1] y_0[-2] \dots y_0[-N]) = v_0$.

- $Q(\gamma) = \gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + a_{N-1}\gamma + a_N$: **polinômio característico** do sistema (**grau N !!!**)
- $Q(\gamma) = (\gamma - \gamma_1)\dots(\gamma - \gamma_N) = 0$: **equação característica**
- $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{C}$: **raízes características** (ou **valores característicos, autovalores, frequências naturais**)

- **Raízes características** $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ **distintas e reais**: temos que

$$y_0[n] = c_1 \gamma_1^n + \dots + c_N \gamma_N^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ou seja, $y_0[n]$ é uma combinação linear dos N **modos característicos** (ou **modos naturais**) $\gamma_1^n, \dots, \gamma_N^n$.

Os N coeficientes **reais** c_1, \dots, c_N são determinados a partir da condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

- **Raízes características** $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ **repetidas e reais**: quando a raiz característica γ_1 tem multiplicidade $r \geq 1$, temos que

$$y_0[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 n \gamma_1^n + \dots + c_r n^{r-1} \gamma_1^n + c_{r+1} \gamma_{r+1}^n \dots + c_N \gamma_N^n,$$

ou seja, $y_0[n]$ é uma combinação linear dos N **modos característicos** $\gamma_1^n, n \gamma_1^n, \dots, n^{r-1} \gamma_1^n, \gamma_{r+1}^n, \dots, \gamma_N^n$. No caso de existirem várias raízes características com multiplicidade maior que 1, a expressão para $y_0[n]$ é análoga.

- **Raízes características** $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ **complexas**

As raízes complexas do polinômio característico

$$Q(\gamma) = \gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + a_{N-1}\gamma + a_N$$

sempre ocorrem em pares complexos conjugados, pois os coeficientes a_i são reais. Logo, se $Q(\gamma) = 0$ com γ complexo, então $Q(\gamma^*) = 0$.

Suponha que $\gamma_1 = |\gamma_1|e^{j\beta_1}$ (forma polar com β_1 em **rad**) é uma raiz característica **complexa** do sistema de multiplicidade $r = 1$. Neste caso,

$$|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], \quad |\gamma_1|^n \text{sen}[\beta_1 n]$$

são os **dois modos característicos** do sistema associado a γ_1 complexo.

Por exemplo, se $\gamma_1, \gamma_2 = \gamma_1^*, \gamma_3, \dots, \gamma_N$ são raízes características com $\gamma_3, \dots, \gamma_N$ **reais e distintas**, então

$$y_0[n] = c_1|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n] + c_2|\gamma_1|^n \sen[\beta_1 n] + c_3\gamma_3^n + \dots + c_N\gamma_N^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde os N coeficientes **reais** $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N$ são determinados a partir da condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

De maneira semelhante, se $\gamma_1 = |\gamma_1|e^{j\beta_1}$ é **complexo** e tem multiplicidade $r \geq 1$, então

$$\begin{array}{cc} |\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], & |\gamma_1|^n \sen[\beta_1 n], \\ n|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], & n|\gamma_1|^n \sen[\beta_1 n], \\ \vdots & \vdots \\ n^{r-1}|\gamma_1|^n \cos[\beta_1 n], & n^{r-1}|\gamma_1|^n \sen[\beta_1 n] \end{array}$$

são os $2r$ **modos característicos** do sistema associados a γ_1 .

Em resumo: $y_0[n]$ é sempre uma combinação linear (com N coeficientes **reais**) dos N modos característicos do sistema. Os N coeficientes da tal combinação linear sempre existem, são **únicos**, e são obtidos a partir de um **sistema de equações lineares** determinado pela condição $(y_0[-1] \ y_0[-2] \ \dots \ y_0[-N]) = v_0$.

Portanto, quando $x[n] = 0, n \geq 0$ (entrada nula), então $y[n] = y_0[n], n \geq 0$, fica **completamente determinada** pela **condição inicial** v_0 e pelos **modos característicos** do sistema!

Obs 1: Quando $v_0 = 0$, então $y_0[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, ou seja a resposta entrada nula é **zero**! Logo, se $v_0 = 0$, então $y[n] = y_{esn}[n], n \geq 0$ (como teria que ser!)

Obs 2: Suponha que $\gamma > 0$ (real). Então $\gamma = e^{\ln(\gamma)}$. Portanto, $\gamma^n = e^{n \ln(\gamma)}$. Do mesmo modo, considere que $\bar{\gamma} = -\gamma$ com $\gamma > 0$. Então, $\gamma = e^{\ln(\gamma)}$. Logo, $(\bar{\gamma})^n = (-\gamma)^n = (-1)^n \gamma^n = (-1)^n e^{n \ln(\gamma)}$.

Exemplos: (no quadro)

3.7 Resposta $h[n]$ ao Impulso Unitário

Considere um sistema descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

onde ($N = M$)

$$Q(E) = E^N + a_1E^{N-1} + \cdots + a_{N-1}E + a_N$$

$$P(E) = b_0E^N + \cdots + b_{N-1}E + b_N$$

Suponha que $x[n] = \delta[n]$, ou seja, aplicamos um impulso unitário em $n = 0$ no sistema. Nosso objetivo é determinar

$h[n] = y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, encontrar a **resposta estado nulo** do sistema quando $x[n] = \delta[n]$.

Denominamos $h[n]$ de **resposta ao impulso** ou **resposta impulsiva** do sistema.

- Quando $a_N \neq 0$, determinamos $h[n]$ da seguinte maneira:

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N} \delta[n] + y_c[n] u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde $y_c[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma **combinação linear** dos N **modos característicos** do sistema com coeficientes reais c_1, \dots, c_N . Para encontramos c_1, \dots, c_N , devemos resolver **recursivamente**

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - \dots - a_{N-1} h[n-N+1] - a_N h[n-N] \\ + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_{N-1} \delta[n-N+1] + b_N \delta[n-N]$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$ com $h[-N] = \dots = h[-2] = h[-1] = 0$.

Resposta $h[n]$ ao Impulso Unitário

- Quando $a_N = \dots = a_{N-K-1} = 0$ mas $a_{N-K} \neq 0$ (lembre que $a_0 = 1!$), determinamos $h[n]$ da seguinte maneira:

$$h[n] = A_0\delta[n] + A_1\delta[n-1] + \dots + A_K\delta[n-K] + y_c[n]u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde $y_c[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma **combinação linear** dos N **modos característicos** do sistema com coeficientes c_1, \dots, c_N . Para encontrarmos os $N + K + 1$ coeficientes reais

$A_0, A_1, \dots, A_K, c_1, \dots, c_N$, devemos resolver **recursivamente**

$$h[n] = -a_1h[n-1] - \dots - a_{N-1}h[n-N+1] - a_Nh[n-N] \\ + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \dots + b_{N-1}\delta[n-N+1] + b_N\delta[n-N]$$

para $n = 0, \dots, N + K$ com $h[-N] = \dots = h[-2] = h[-1] = 0$.

Obs: Note que a resposta impulsiva $h[n]$ é **causal** para $N \geq M$. Além disso, $h[n]$ é determinada pelos **modos característicos** do sistema!

Exemplos: (no quadro)

3.8 Resposta do Sistema à Entrada Externa: Resposta Estado Nulo

Considere um sistema LDIT com memória. Relembre que a **resposta total** $y[n]$, $n \geq n_0$, é dada por

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y[n]} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0[n]} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}[n]}$$

Propriedade de Decomposição

Assuma que $n_0 = -\infty$. Relembre que $v[-\infty] = 0$ **por hipótese**. Assim, $y[n] = y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ para uma dada entrada $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Como o impulso unitário $\delta[n]$ é uma função par, obtemos que

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[m-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

Logo,

$$\begin{array}{lll} \text{entrada} & \longrightarrow & \text{saída} \\ \delta[n] & \longrightarrow & h[n] \quad (\text{resposta impulsiva}) \\ \delta[n - m] & \longrightarrow & h[n - m] \quad (\text{invariância}) \\ x[m]\delta[n - m] & \longrightarrow & x[m]h[n - m] \quad (\text{homogeneidade}) \end{array}$$

Portanto, usando a **propriedade de aditividade** (e assumindo continuidade na relação entrada-saída do sistema), concluímos que

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m] \longrightarrow y[n] = y_{esn}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n - m] \triangleq \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{convolução}}$$

Ao repetirmos o mesmo raciocínio acima considerando que $n_0 = 0$ e $v[0] = 0$, obtemos que

$$x[n], n \geq 0 \longrightarrow y_{esn}[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m], n \geq 0$$

Portanto, para **efeitos de cálculo**, podemos assumir (e é o que **sempre faremos!**) que $x[n] = 0, n < 0$ (**entrada causal!**), e assim

$$\begin{aligned} x[n], n \geq 0 \longrightarrow y_{esn}[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n], n \geq 0 \end{aligned}$$

O Somatório de Convolução

Sejam $x_1[n], x_2[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, sinais reais. O **somatório de convolução** de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ é o sinal real $c[n]$ definido por

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

(desde que a série seja **finita** para qualquer $n \in \mathbb{Z}$).

Obs 1: A variável do somatório é m , e não n !

Obs 2: Para calcularmos $c[\bar{n}]$ no instante \bar{n} , primeiro fazemos uma reversão temporal de $x_2[m]$ seguida de um deslocamento por \bar{n} , depois multiplicamos por $x_1[m]$, e então somamos de $-\infty$ a ∞ .

Obs 3: O valor de $c[\bar{n}]$ no instante \bar{n} depende do comportamento dos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$ em **todo** o eixo temporal \mathbb{Z} !

Propriedades: Sejam $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$, $t \in (-\infty, \infty)$, sinais reais e k um número real. Então:

1. $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ (comutatividade)
2. $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$ (associatividade)
3. $x_1[n] * (x_2[n] \pm x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) \pm (x_1[n] * x_3[n])$
(distributividade)
4. Se $x_1[n] * x_2[n] = c[n]$, então

$$x_1[n] * x_2[n - M] = x_1[n - M] * x_2[n] = c[n - M]$$

$$x_1[n - M_1] * x_2[n - M_2] = c[n - M_1 - M_2] = c[n - (M_1 + M_2)]$$

(propriedade de deslocamento)

5. $x_1[n] * \delta[n] = x_1[n]$ ($\delta[n]$ é o elemento neutro da convolação)
6. $(kx_1[n]) * x_2[n] = x_1[n] * (kx_2[n]) = k(x_1[n] * x_2[n])$
7. Se $x_1[n]$ tem duração finita W_1 , e $x_2[n]$ tem duração finita W_2 , então $c[n] = x_1[n] * x_2[n]$ tem duração finita $W_1 + W_2$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT

Considere um sistema descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-N] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$ em $n_0 = 0$, onde $(N = M)$

$$Q(E) = E^N + a_1 E^{N-1} + \dots + a_{N-1} E + a_N$$

$$P(E) = b_0 E^N + \dots + b_{N-1} E + b_N$$

Relembre que este é um sistema LDIT com **memória** e **causal**, e que a resposta total $y[n]$, $n \geq 0$, é dada por

$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y[n]} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0[n] (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}[n] (v_0=0)}$
--

Propriedade de Decomposição

Além disso, relembre que a **resposta impulsiva** $h[n]$ é **causal** e determinada a partir dos **modos característicos** do sistema.

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT

Relembre, ainda, que para encontrarmos $y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, assumimos que $x[n] = 0$, para $n < 0$ (**entrada causal**). Ao seguirmos o mesmo raciocínio utilizado nos slides anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned}y_{esn}[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} x[m]h[n-m] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[n-m]\end{aligned}$$

No entanto, como $x[n]$ e $h[n]$ são **causais**, temos que $x[m] = 0$, para $m < 0$, e $h[n-m] = 0$, para $n < m$. Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} n < 0 \Rightarrow x[m]h[n-m] = 0 \text{ para } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_{esn}[n] = 0 \\ n \geq 0 \Rightarrow x[m]h[n-m] = 0 \text{ para } m > n \Rightarrow y_{esn}[n] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \end{array} \right.$$

Logo, a **resposta estado nulo** $y_{esn}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, é **causal** e dada por

$$y_{esn}[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^n h[m]x[n-m], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$y_{esn}[n] = \left(\sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] \right) u[n] = \left(\sum_{m=0}^n h[m]x[n-m] \right) u[n], n \in \mathbb{Z}$$

Obs 1: Relembre que a resposta impulsiva $h[n]$ é calculada a partir dos modos característicos do sistema. Desta maneira, concluímos que a **resposta estado nulo** $y_{esn}[n]$ fica **completamente determinada** pela **entrada** $x[n]$ e pelos **modos característicos**!

Obs 2: A resposta estado nulo possui o comportamento esperado:

- Se $x[n] = \delta[n]$, então $y_{esn}[n] = x[n] * h[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$, pois $\delta[n]$ é o elemento neutro da convolução.
- Se $x[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, então $y_{esn}[n] = x[n] * h[n] = 0, n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $y[n] = y_0[n], n \geq 0$.

Obs 3: $h[n]$ é o sinal tal que $y_{esn}[n] = x[n] * h[n]$ é a resposta estado nulo para a entrada $x[n]$.

Tabela de Convolução: veja a Tabela 3.1, p. 263, do Lathi. Por exemplo:

$$\gamma^n u[n] * u[n] = \left(\frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma} \right) u[n] \quad (\text{Linha 2})$$

$$u[n] * u[n] = (n + 1)u[n] \quad (\text{Linha 3})$$

$$\gamma_1^n u[n] * \gamma_2^n u[n] = \left(\frac{\gamma_1^{n+1} - \gamma_2^{n+1}}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) u[n], \quad \gamma_1 \neq \gamma_2 \quad (\text{Linha 4})$$

$$\gamma^n u[n] * \gamma^n u[n] = (n + 1)\gamma^n u[n] \quad (\text{Linha 8})$$

Relembre que $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ (**comutatividade**).

Exemplos: (no quadro)

Convolação e Sistemas LDIT Causais

Pelo o que mostramos nos slides anteriores, podemos concluir que:

- Se $x_1[n] = f_1[n]u[n]$ é um **signal causal**, então

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} f_1[m]x_2[n-m], \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Se $x_1[n] = f_1[n]u[n]$ e $x_2[n] = f_2[n]u[n]$ são **causais**, então

$$c[n] = x_1[n] * x_2[n] = \left(\sum_{m=0}^n f_1[m]f_2[n-m] \right) u[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

Além disso, temos que:

Um **sistema LDIT** é **causal** \Leftrightarrow a resposta impulsiva $h[n]$ é **causal**

Considere um sistema **LDIT causal** com $x[n], n \in \mathbb{Z}$, **causal** (logo, $y_{esn}[n], n \in \mathbb{Z}$, é **causal**). Obtemos pela **propriedade de deslocamento da convolação** que, para $M > 0$:

$$\text{se } v(0) = 0, \{x[n], n \geq 0\} \longrightarrow y_{esn}[n], n \geq 0$$

$$\text{então } v(0) = 0, \{\bar{x}[n] = x[n-M], n \geq 0\} \longrightarrow \bar{y}_{esn}[n] = y_{esn}[n-M], n \geq 0$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT a Entradas Complexas

Considere um sinal complexo $x[n] = x_r[n] + j x_i[n]$, onde $x_r[n]$ e $x_i[n]$ são sinais reais. Considere que

$$x_r[n] \longrightarrow y_{esn_r}[n]$$

$$x_i[n] \longrightarrow y_{esn_i}[n]$$

Definimos então

$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n] \longrightarrow y_{esn}[n] = y_{esn_r}[n] + j y_{esn_i}[n]$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT a Entradas Complexas

Agora, seja $h[n]$ a resposta impulsiva (real) do sistema. Definimos

$$\begin{aligned}y_{esn}[n] &= x[n] * h[n] = (x_r[n] + j x_i[n]) * h[n] \triangleq x_r[n] * h[n] + j x_i[n] * h[n] \\ &= y_{esn_r}[n] + j y_{esn_i}[n]\end{aligned}$$

Assim,

$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n] \longrightarrow y_{esn}[n] = y_{esn_r}[n] + j y_{esn_i}[n]$$

se e somente se

$$x_r[n] \longrightarrow y_{esn_r}[n]$$

$$x_i[n] \longrightarrow y_{esn_i}[n]$$

Resposta Estado Nulo de Sistemas LDIT a Múltiplas Entradas

Suponha que

$$x[n] = \sum_{k=1}^m x_k[n] \quad (m \text{ entradas})$$

Concluimos então pela linearidade do sistema que

$$y_{esn}[n] = \sum_{k=1}^m y_{esn_k}[n],$$

onde

$$x_k[n] \longrightarrow y_{esn_k}[n]$$

3.8-1 Procedimento Gráfico para o Somatório de Convolução

Desejamos calcular a integral de convolução dos sinais $x[n]$ e $g[n]$:

$$c[n] = x[n]*g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m]x[n-m] = g[n]*x[n]$$

Note que a variável do somatório é m , e que $g[n-m]$ e $x[n-m]$ correspondem a uma **reversão** seguida de um **deslocamento** por m . Como **regra geral** para facilitar o cálculo de $c[n]$, escolhemos o sinal a ser revertido como o **mais simples** entre x e g . Suponha que vamos reverter g . Seguimos então o método abaixo.

Procedimento Gráfico para Calcular $c[n] = x[n] * g[n]$:

1. Mantenha o sinal $x[m]$ fixo.
2. Faça a reversão de $g[m]$, obtendo $g[-m]$.
3. Faça um deslocamento de $g[-m]$ por n , obtendo $g[n-m]$. Logo, $n > 0$ é um **atraso** de $g[-m]$ (deslocamento de $g[-m]$ pra **direita**), e $n < 0$ é um **avanço** (deslocamento pra **esquerda**).
4. O somatório do produto $x[m]g[n-m]$ é o valor $c[n]$ em $n \in \mathbb{Z}$.

3.8-2 Sistemas Interconectados

Exemplo: (no quadro)

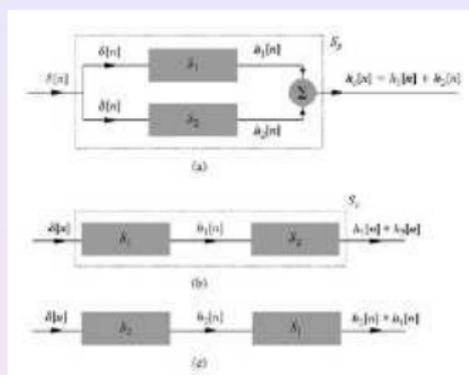


Figura : Sistemas interconectados.

Suponha que o sistema S_1 tem resposta impulsiva $h_1[n]$ e que o sistema S_2 tem resposta impulsiva $h_2[n]$. Então:

- Conexão em **paralelo**: o sistema S_p tem resposta impulsiva $h_p[n] = h_1[n] + h_2[n]$
- Conexão em **cascata (ou série)**: o sistema S_c tem resposta impulsiva $h_c[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$. Assim, em termos da resposta impulsiva $h_c[n]$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, **fisicamente** a ordem importa!

- **Somatório**

$$x[n] \longrightarrow y_{esn}[n] = x[n]*h[n] \Rightarrow \bar{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \longrightarrow \bar{y}_{esn}[n] = \sum_{m=-\infty}^n y_{esn}[m]$$

Exemplos:

a) Seja $g[n]$ a resposta estado nulo para $x[n] = u[n]$ (**degrau unitário**). Como $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$, $n \in \mathbb{Z}$, obtemos $g[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$.

b) Como $g[n] = h[n] + \sum_{m=-\infty}^{n-1} h[m] = h[n] + g[n-1]$, temos $h[n] = g[n] - g[n-1]$.

c) Seja $f[n]$ a resposta estado nulo para $x[n] = nu[n]$ (**rampa unitária**). Como $nu[n] = \sum_{m=-\infty}^n u[m]$, concluimos que $f[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m]$.

3.8-4 Resposta Natural e Resposta Forçada

Considere um sistema LDIT descrito por

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial $v_0 = (y[-N] \dots y[-2] y[-1]) \in \mathbb{R}^N$ em $n_0 = 0$ e $N \geq M$ (causal). Temos que

$$\underbrace{\text{Resposta Total}}_{y[n]} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{y_0[n] (x=0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{y_{esn}[n] (v_0=0)}$$

Relembre que $y_0[n]$ depende da **condição inicial** v_0 e dos **modos característicos** do sistema, e que $y_{esn}[n] = x[n] * h[n]$ depende da **entrada** $x[n]$ e dos **modos característicos** através de $h[n]$.

Resposta Natural e Resposta Forçada

Para o sistema

$$(E^2 - 0.6E - 0.16)y[n] = 5E^2x[n]$$

com $v_0 = (25/4 \ 0)$ e $x[n] = 4^{-n}u[n]$, determinamos anteriormente que os modos característicos são $\{(-0.2)^n, 0.8^n\}$, e que, $n \geq 0$,

$$y[n] = \underbrace{0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n}_{y_0[n]} - \underbrace{1.26(4)^{-n} + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n}_{y_{esn}[n]}$$

Agora, ao juntarmos os termos **envolvendo** os **modos característicos** em $y[n]$, obtemos uma componente $y_c[n]$ denominada de **resposta natural (ou solução homogênea)**. E, ao juntarmos os termos que **não envolvem** os **modos característicos** em $y[n]$, encontramos uma componente $y_\phi[n]$ denominada de **resposta forçada (ou solução particular)**. Logo,

$$y[n] = \underbrace{0.644(-0.2)^n + 6.61(0.8)^n}_{y_c[n]} - \underbrace{1.26(4)^{-n}}_{y_\phi[n]}, \quad n \geq 0$$

Obs: Em geral, $y_0[n] \neq y_c[n]$ e $y_{esn}[n] \neq y_\phi[n]$!

3.9 Solução Clássica de Equações a Diferenças Lineares

Tarefa: Ler a Seção 3.9 do Lathi

Desvantagens da solução clássica em relação às técnicas estudadas até aqui:

1. Fornece **resposta total = resposta natural + resposta forçada**, e não **resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo**
2. Restringe as entradas $x[n]$ possíveis de serem aplicadas
3. Exige que as condições iniciais sejam conhecidas em $(y[0] \ y[1] \ \dots \ y[N-1]) \in \mathbb{R}^N$. Isto pode ser obtido recursivamente a partir de $v_0 = (y[-N] \ \dots \ y[-2] \ y[-1]) \in \mathbb{R}^N$.
4. Não apresenta uma relação direta com a Transformada Z (Capítulo 5 do Lathi \Rightarrow Sinais e Sistemas Lineares II !)

3.10 Estabilidade de Sistemas

Considere um sistema LDIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação a diferenças). Assuma que $v[-\infty] = 0$ (condição inicial nula em $n_0 = -\infty$). Na Seção 3.8, encontramos que

$$y[n] = y_{esn}[n] = x[n] * h[n]$$

Dizemos que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x[n]$ limitada resultar em $y[n]$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Propriedade:

$$\text{O sistema é BIBO estável} \Leftrightarrow M_h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$$

Neste caso, se $|x[n]| \leq M_x < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$ (entrada limitada), então $|y_{esn}[n]| \leq M_x M_h = M_{y_{esn}}$, $n \in \mathbb{Z}$ (saída limitada). Isto significa que para termos $M_{y_{esn}}$ **arbitrariamente** pequeno, basta que M_x seja **suficientemente** pequeno.

Agora, considere um sistema LDIT descrito por uma equação a diferenças da forma

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial v_0 em $n_0 = 0$. Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0[n] = 0$. Dizemos que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x[n]$ limitada resultar em $y[n] = y_{esn}[n]$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Obs: **BIBO** estabilidade refere-se à estabilidade **externa** ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

3.10-1 Estabilidade Interna (Assintótica)

Considere um sistema LDIT descrito por uma equação a diferenças da forma

$$Q(E)y[n] = P(E)x[n]$$

com condição inicial v_0 em $n_0 = 0$.

Relembre que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{esn} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ **mas** $v_0 \neq 0$? Este é o conceito de **estabilidade interna (ou assintótica)** do sistema.

Estabilidade Interna (Assintótica)

Temos então a seguinte classificação em relação à **estabilidade interna** ($v_0 \neq 0$ e $x = 0$) do sistema:

1. Assintoticamente estável: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0[n] = 0$.

Critério (\Leftrightarrow): **todas** as raízes características estão **dentro** do Círculo unitário, ou seja, possuem módulo **menor** que 1.

2. Assintoticamente instável: quando para qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y[n] = y_0[n]$ é *ilimitada*.

Critério (\Leftrightarrow): quando houver **ao menos uma** raiz característica **fora** do Círculo Unitário (i.e. com módulo **maior** que 1) **e/ou** raízes **com multiplicidade em cima** do Círculo Unitário.

3.10-2 Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

3. Marginalmente estável: quando para termos $y[n] = y_0[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, limitada e *arbitrariamente* próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja *suficientemente* próxima de zero.

Crítério (\Leftrightarrow): quando **não há** raízes características **fora** do Círculo Unitário, mas **existem** raízes **sem multiplicidade em cima** do Círculo Unitário.

Temos as seguintes relações entre a estabilidade **externa** (BIBO) e a estabilidade **interna** (assintótica) de um sistema **causal descrito** por uma **equação a diferenças**:

Propriedades:

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável **ou** marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Exemplos: (no quadro)

Exemplo 1: Integrador Digital ($T \cong 0$)

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$\Rightarrow y[n] = y(nT), \quad x[n] = x(nT) \Rightarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \cong \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = x[n]$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = y[n-1] + Tx[n]}$$

Exemplo 2: Para o sistema

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2]$$

com $v_0 = (25/4 \ 0)$ e $x[n] = 4^{-n}u[n]$, vimos anteriormente que, para $n \geq 0$,

$$y[n] = 0.2(-0.2)^n + 0.8(0.8)^n - 1.26(4)^{-n} + 0.444(-0.2)^n + 5.81(0.8)^n$$

A forma recursiva é dada por

$$y[n] = 0.6y[n-1] + 0.16y[n-2] + 5x[n]$$

Comandos adicionais do Matlab: veja Lathi, pp. 288–293

Capítulo 4: Análise de Sistemas em Tempo Contínuo Usando a Transformada de Laplace

Motivação: Vimos no Capítulo 2 que a determinação da saída total $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$ de um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial envolve:

- a) Manipulações algébricas: as 4 operações básicas (+, -, ×, /)
- b) Diferenciações: no cálculo de $y_0(t)$ e $h(t)$
- c) Integrações: no cálculo da convolução $y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$

A grosso modo, neste capítulo introduziremos a **transformada de Laplace** para obter $y(t)$ **somente** através de **manipulações algébricas** de **funções racionais** (polinômio $p(s)$ /polinômio $q(s)$) na variável complexa s . Tal método consiste basicamente de 3 passos:

- 1) **Transformar** a **equação diferencial** que descreve o sistema numa **equação algébrica** através da transformada de Laplace
- 2) Fazer manipulações algébricas
- 3) Calcular a transformada inversa de Laplace para obter $y(t)$

Veremos que a transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa para a análise e controle de sistemas. Por exemplo: a análise da **resposta impulsiva** de **diversos** sistemas em **série** se torna muito mais fácil: as **convoluções** dão lugar a **manipulações algébricas**.

4.1 A Transformada de Laplace (Bilateral)

Seja $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, um sinal em tempo contínuo. A **transformada de Laplace (bilateral ou de dois lados)** $X(s)$ de $x(t)$ é definida por

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Note que a variável de integração é $t \in \mathbb{R}$, mas $X(s) \in \mathbb{C}$ é uma **função complexa** na **variável complexa** $s \in \mathbb{C}$. Pode-se mostrar que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

onde o número real c deve ser adequadamente escolhido. O par de equações acima é denominado de **par da transformada de Laplace (bilateral)**, ou simplesmente **par de Laplace**. Dizemos então que $X(s)$ é a transformada **direta** de Laplace de $x(t)$, e que $x(t)$ é a transformada **inversa** de Laplace de $X(s)$. Assim,

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[x(t)]\}$$

A Transformada de Laplace

Para indicar que $x(t)$ e $X(s)$ são um par de Laplace, escrevemos

$$x(t) \iff X(s)$$

- A transformada de Laplace é uma **operação linear**, ou seja, se

$$x_1(t) \iff X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)] \quad \text{e} \quad x_2(t) \iff X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)]$$

então

$$ax_1(t) + bx_2(t) \iff \mathcal{L}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\mathcal{L}[x_1(t)] + b\mathcal{L}[x_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$$

- **Região de convergência (RDC)** ou **região de existência** de $X(s)$: é o conjunto de valores de s no plano complexo em que a integral imprópria

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

converge.

Propriedades da RDC:

- 1) Se $x_1(t)$ tem RDC \mathcal{R}_1 e $x_2(t)$ tem RDC \mathcal{R}_2 , então $ax_1(t) + bx_2(t)$ tem RDC $\mathcal{R} \supset \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.
- 2) Se $x(t)$ tem **duração finita**, então sua RDC é $\mathcal{R} = \mathbb{C}$.
- 3) Se $x_1(t)$ tem **duração finita** e $x_2(t)$ tem RDC \mathcal{R}_2 , então $ax_1(t) + bx_2(t)$ tem RDC $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$

Exemplos: (no quadro)

A Transformada de Laplace

Acabamos de ver nos exemplos acima que

$$x(t) = e^{-at}u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a, \text{ onde } a \in \mathbb{C}$$

Semelhantemente, pode-se mostrar que

$$y(t) = -e^{-at}u(-t) \iff Y(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} a$$

Note que $x \neq y$ e $X(s) = Y(s)$, mas os RDC's são **diferentes!**

Desse modo, existe mais de uma transformada inversa de Laplace para

$$\frac{1}{s+a}$$

dependendo da RDC.

Portanto, concluímos que, **a não ser que seja especificada a RDC, não existe uma correspondência um-para-um** (bijetiva) entre $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, o que gera dificuldades práticas.

A Transformada de Laplace

Para contornarmos este problema, vamos restringir o tempo a $t \geq 0$. Com isto, **não precisamos especificar a RDC**, e **temos uma correspondência um-para-um** (bijetiva) entre $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$. Desse modo, não há ambiguidade entre $x(t)$, $t \geq 0$, e $X(s)$. Isto significa que para cada $X(s)$ existe uma **única** transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$ (exceto por um conjunto de comprimento nulo!).

Relembre que, para encontrarmos a resposta $y(t)$, $t \geq t_0 = 0$ de um sistema LCIT para uma dada entrada $x(t)$, podemos sempre supor que $x(t)$ é causal!

A Transformada de Laplace Unilateral

De agora em diante, vamos nos preocupar apenas com o **tempo futuro** dos sinais. Para isto, consideramos a **transformada de Laplace unilateral** (ou **de um lado**) de um sinal $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que é dada por

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Com esta definição, **não precisamos mais especificar a RDC** para determinamos a transformada **inversa**, e **temos** uma **correspondência um-para-um** (bijetiva) entre a transformada $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, para $t \geq 0$ (**somente tempo futuro!**). Desse modo, não há ambiguidade entre $x(t)$, $t \geq 0$, e $X(s)$. Isto significa que para cada $X(s)$ existe uma **única** transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $t \geq 0$ (exceto por um conjunto de comprimento nulo!).

A Transformada de Laplace Unilateral

Obs 1: Note que, para **sinais causais**, as transformadas bilateral e unilateral **coincidem!**

Obs 2: Definimos o limite de integração inferior como 0^- para considerar sinais $x(t)$ que possuem um impulso na origem $t = 0$ e para tratar equações diferenciais com condições iniciais em $t_0 = 0^-$. Salvo menção contrária, durante todo o restante deste capítulo o termo **transformada de Laplace** significará a transformada **unilateral**.

Além disso, **adotaremos** a seguinte **convenção**: ao escrevermos $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = f(t)u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, queremos dizer que $x(t) = f(t)$, para $t \geq 0$, **mas não necessariamente** que $x(t) = 0$, para $t < 0$ (isto será verdade somente quando $x(t)$ for de fato **causal!**).

Relembre que, para encontrarmos a resposta $y(t)$, $t \geq t_0 = 0$ de um sistema LCIT para uma dada entrada $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, **não importa** os valores de $x(t)$ para $t < 0$, e podemos sempre supor que $x(t)$ é causal!

Existência da Transformada de Laplace

Dizemos que um sinal $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é de **ordem exponencial** σ_0 quando existirem $M > 0$, σ_0 real e $\bar{t} \geq 0$ tais que

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}, \text{ para } t \geq \bar{t} \geq 0$$

Para sinais $x(t)$ de ordem exponencial, a transformada de Laplace (unilateral) $X(s)$ **sempre existe** e sua RDC **contém** a região $\text{Re } s > \sigma_0$.

De acordo com os interesses práticos em engenharia de nosso curso, consideraremos de agora em diante apenas sinais $x(t)$ de **ordem exponencial** cuja transformada de Laplace é uma **função racional** em s , ou seja,

$$x(t) \iff X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios na **variável complexa** s com coeficientes **reais**.

Existência da Transformada de Laplace

Desse modo, como consequência do resultado de **continuidade analítica** da teoria de funções a variáveis complexas, **podemos sempre supor** que a RDC é todo o plano complexo \mathbb{C} , com exceção dos pontos em que $Q(s) = 0$. Por exemplo,

$$e^{-2t} u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s \neq -2$$

No restante deste capítulo, a transformada direta $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e a transformada inversa $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ serão obtidas por tabelas de pares de Laplace.

A Transformada de Laplace

Tabela de Transformadas de Laplace: veja a Tabela 4.1, p. 310, do Lathi. Por exemplo:

$$\delta(t) \iff 1 \quad (\text{Linha 1})$$

$$u(t) \iff \frac{1}{s} \quad (\text{Linha 2})$$

$$tu(t) \iff \frac{1}{s^2} \quad (\text{Linha 3})$$

$$t^n u(t) \iff \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{Linha 4})$$

$$e^{\lambda t} u(t) \iff \frac{1}{s - \lambda} \quad (\text{Linha 5})$$

$$t^n e^{\lambda t} u(t) \iff \frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}} \quad (\text{Linha 7})$$

$$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t) \iff \frac{0.5re^{j\theta}}{s + a - jb} + \frac{0.5re^{-j\theta}}{s + a + jb} \quad (\text{Linha 10b})$$

$$t^n re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t) \iff \frac{0.5n!re^{j\theta}}{(s + a - jb)^{n+1}} + \frac{0.5n!re^{-j\theta}}{(s + a + jb)^{n+1}} \quad (\star)$$

4.1-1 Determinando a Transformada Inversa

Seja

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

uma função racional em s com coeficientes reais. Suponha que os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ **não possuem raízes em comum**, e que $\text{grau}(Q(s)) = N \geq M = \text{grau}(P(s))$.

As raízes de $P(s)$ são denominadas de **zeros** de $X(s)$, e as raízes de $Q(s)$ de **pólos** de $X(s)$. Assim, $X(s)$ possui $M = \text{grau}(P(s))$ zeros e $N = \text{grau}(Q(s))$ pólos. Dizemos que um pólo é **simples** quando sua multiplicidade é igual a 1.

Nosso objetivo é encontrar

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)], \quad \text{para } t \geq 0 \text{ (somente tempo futuro!)}$$

Para isto, vamos expandir $X(s)$ em frações parciais, de modo que cada termo da expansão pertença à Tabela de Transformadas de Laplace.

Determinando a Transformada Inversa

Assuma que $X(s)$ possui **pólos simples** a_i e um **pólo repetido** b de multiplicidade $m \geq 2$. Podemos expandir $X(s)$ em frações parciais da seguinte maneira:

$$X(s) = k_0 + \sum_i \frac{k_i}{s - a_i} + \frac{c_1}{s - b} + \frac{c_2}{(s - b)^2} + \cdots + \frac{c_m}{(s - b)^m} \quad (*)$$

onde os coeficientes são dados por

$$k_0 = X(\infty) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow \infty} X(s)$$

$$k_i = [(s - a_i)X(s)]|_{s=a_i}$$

$$c_j = \frac{1}{(m - j)!} \left. \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} [(s - b)^m X(s)] \right|_{s=b}$$

Quando $X(s)$ possui vários pólos repetidos, a expressão é análoga.

Observações:

- 1) Se $\text{grau}(Q(s)) = N > M = \text{grau}(P(s))$, então $k_0 = X(\infty) = 0$.
- 2) Se $a_i = \alpha + j\beta$ é um pólo complexo, então $a_{i+1} = a_i^* = \alpha - j\beta$ também é um pólo complexo, e $k_{i+1} = k_i^*$.
- 3) A **forma da expressão** (\star) é determinada somente pelos **pólos** de $X(s)$! Os **zeros** de $X(s)$ influenciam apenas nos valores dos **coeficientes** k_i, c_1, \dots, c_m em (\star) !
- 4) Para evitarmos as diferenciações envolvidas nos cálculos dos c_j 's, podemos primeiramente encontrar os coeficientes k_0, a_i e $c_m = [(s - b)^m X(s)]|_{s=b}$, e então determinar os $m - 1$ coeficientes restantes c_1, c_2, \dots, c_{m-1} através de um **sistema de equações lineares** resultante da substituição de $m - 1$ valores reais para s em ambos os lados de (\star) .

Exemplos: (no quadro)

4.2 Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Suponha que $x(t) \iff X(s)$, $x_1(t) \iff X_1(s)$, $x_2(t) \iff X_2(s)$.

1) **Linearidade:** $ax_1(t) + bx_2(t) \iff aX_1(s) + bX_2(s)$

2) **Deslocamento no tempo:** se $x(t) = f(t)u(t) \iff X(s)$,
então

$$y(t) = x(t-t_0) = f(t-t_0)u(t-t_0) \iff Y(s) = X(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0$$

Note que $y(t) = x(t-t_0) = 0$, $t < t_0$ (causal), pois $x(t)$ é causal!

3) **Deslocamento na frequência:**

$$x(t)e^{s_0 t} \iff X(s - s_0)$$

4) **Diferenciação no tempo (derivada generalizada!):**

$$\frac{dx}{dt} \iff sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \iff s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

5) Integração no tempo:

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$$

Obs: Se $x(t)$ é causal, então

$$\frac{d^n x}{dt^n} \iff s^n X(s) \quad \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s}X(s)$$

6) Diferenciação na frequência:

$$-tx(t) \iff \frac{dX(s)}{ds}$$

7) Escalonamento:

$$x(at), \text{ onde } a > 0 \iff \frac{1}{a}X(s/a)$$

8) Convolução no tempo:

$$x_1(t) * x_2(t) \iff X_1(s)X_2(s)$$

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

9) Teorema do Valor Inicial: Suponha que $X(s) = P(s)/Q(s)$ com $\text{grau}(Q(s)) = N > M = \text{grau}(P(s))$. Então,

$$x(0^+) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow \infty} sX(s)$$

10) Teorema do Valor Final: Temos que $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe se e somente se $sX(s)$ possui todos os pólos no SPE (parte real negativa). Neste caso, $x(\infty)$ pode ser diretamente calculado por

$$x(\infty) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \rightarrow 0} sX(s)$$

Justificativa: Pela **Tabela de Transformadas de Laplace**, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ se e somente se todos os pólos de $X(s)$ estão no **SPE**. Além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c \neq 0$ se e somente se $X(s)$ possui **um pólo simples** em $s = 0$ e **todos os outros** pólos estão no **SPE**.

Exemplos: (no quadro)

4.3 Solução de Equações Diferenciais e Integro-Diferenciais

Considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ **causal**, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Com base na transformada de Laplace, vamos reduzir a equação diferencial acima a uma **equação algébrica** em s , e então encontrar $Y(s)$ através de **operações algébricas**. Desse modo, determinamos $y(t)$, $t \geq 0$. Para isto, necessitaremos apenas de:

Linearidade: $ax_1(t) + bx_2(t) \iff aX_1(s) + bX_2(s)$

Diferenciação no tempo:

$$\frac{dx}{dt} \iff sX(s) - x(0^-) \quad \frac{d^2x}{dt^2} \iff s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

Exemplo de motivação: (no quadro)

4.3-1 Resposta Estado Nulo

Considere um sistema LCIT com memória (não necessariamente descrito por uma equação diferencial). Assuma que $v(0^-) = 0$ (condição inicial nula em $t_0 = 0^-$). Na Seção 2.4, encontramos que

$$y(t) = y_{esn}(t) = x(t) * h(t)$$

onde $h(t)$ é a **resposta impulsiva**. Considere que

$$x(t) \iff X(s) \quad y(t) \iff Y(s) \quad h(t) \iff H(s)$$

Logo, pela propriedade de **convolução no tempo** da transformada de Laplace, concluímos que

$$\boxed{Y(s) = H(s)X(s)} \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Denominamos $H(s)$ de **função de transferência** do sistema e escrevemos

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)}$$

Resposta Estado Nulo

Agora, considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial $v_0 = 0$ em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ **causal**, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Assim,

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(N-1)}(0^-) = 0 \quad x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \dots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Considere que

$$x(t) \iff X(s) \quad y(t) = y_{esn}(t) \iff Y(s) = Y_{esn}(s)$$

Pela propriedade de **diferenciação no tempo** da transformada de Laplace, temos

$$D^k y(t) \iff s^k Y(s) \quad D^k x(t) \iff s^k X(s)$$

Resposta Estado Nulo

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial, obtemos

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s)$$

Considere que

$$h(t) \iff H(s)$$

onde $h(t)$ é a **resposta impulsiva**. Para $x(t) = \delta(t)$, temos que $X(s) = 1$. Portanto,

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

e

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Temos que $H(s)$ é a **função de transferência** do sistema e escrevemos

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)}$$

Como $H(s) = P(s)/Q(s)$, concluímos que ($P(s)$ e $Q(s)$ podem ter **raízes em comum = cancelamento pólo-zero!**):

$$\{\text{pólos } H(s)\} \subset \{\text{pólos } Q(s)\} = \{\text{raízes características}\}$$

E, como

$$Y(s) = H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s)$$

concluímos que (pode haver um **cancelamento** entre um **zero** de $H(s)$ e um **pólo** de $X(s)$, **ou** um **cancelamento** entre um **pólo** de $H(s)$ e um **zero** de $X(s)$):

$$\{\text{pólos } Y(s)\} \subset \{\text{pólos } Q(s) + \text{pólos } X(s)\}$$

Obs: Seja $g(t)$ a resposta estado nulo para $x(t) = u(t)$ (degrau unitário). Como

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$

concluimos que:

$$g(t) \iff G(s) = H(s)X(s) = H(s)\frac{1}{s}$$

$$h(t) \iff H(s) = sG(s)$$

De acordo com as propriedades de integração e diferenciação no tempo da Transformada de Laplace, resgatamos que

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \text{ e } h(t) = dg(t)/dt \text{ (veja a Seção 2.6).}$$

Considere um sistema LCIT descrito por ($N = M$)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$ e entrada $x(t)$ **causal**, onde

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_N, \quad P(D) = b_0 D^N + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

Assim,

$$x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \dots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Pela propriedade de **diferenciação no tempo** da transformada de Laplace, temos

$$D^k y(t) \iff s^k Y(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} y^{(j-1)}(0^-) \quad D^k x(t) \iff s^k X(s)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial, obtemos

$$Q(s)Y(s) - R(s) = P(s)X(s)$$

onde os coeficientes do polinômio $R(s)$ dependem do estado inicial v_0 (mas, **se** $v_0 = 0$, **então** $R(s) = 0!$). Portanto,

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R(s)}{Q(s)}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{P(s)}{Q(s)}X(s)}_{Y_{esn}(s)}$$

onde

$$h(t) \iff H(s) = P(s)/Q(s) \quad (\text{resposta impulsiva})$$

$$y_0(t) \iff Y_0(s) = R(s)/Q(s) \quad (\text{resposta entrada nula})$$

$$y_{esn}(t) = h(t) * x(t) \iff Y_{esn}(s) = H(s)X(s) \quad (\text{resposta estado nulo})$$

Exemplos: (no quadro)

Sabemos que um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial determina uma **função de transferência**

$Y(s)/X(s) = H(s)$. É possível também fazermos o **caminho contrário**: dado um sistema LCIT com função de transferência $H(s) = P(s)/Q(s)$, podemos encontrar uma equação diferencial cuja função de transferência é $H(s)$.

Para isto, considere um sistema LCIT com $H(s)$ da forma

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde **não há cancelamentos pólo-zero**, ou seja, $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem raízes em comum. Suponha também que esta forma de $H(s)$ não é resultante de **cancelamentos anteriores entre pólos e zeros** (isto significa que o **sistema é controlável e observável**).

Fazendo

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

obtemos que

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

é uma equação diferencial cuja função de transferência é de fato $H(s) = P(s)/Q(s)$.

Exemplo: (no quadro)

Considere um sistema LCIT **com memória causal** (não necessariamente descrito por uma equação diferencial) com função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $Q(s)$ e $P(s)$ **não possuem** raízes em comum. Assuma que $v(-\infty) = 0$ em $t_0 = -\infty$. Relembre que dizemos que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Propriedade 1: Suponha que $\text{grau}(Q) = N \geq \text{grau}(P) = M$. Então:

O sistema é BIBO **estável** \Leftrightarrow **todos** os **pólos** de $H(s)$ estão no **SPE**

Propriedade 2: Se $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, então o sistema é BIBO **instável**.

Justificativa: Quando $\text{grau}(Q)=N < \text{grau}(P)=M$, sempre poderemos escrever

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = Z(s) + \frac{P'(s)}{Q'(s)}$$

onde $\text{grau}(Z)=M - N$ e $\text{grau}(P'(s)) \leq \text{grau}(Q')=\text{grau}(Q)=N$. Assim, $Z(s)$ (domínio da frequência) corresponderá a diferenciadores (no tempo)!

Exemplo

Considere

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

Logo,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \underbrace{sX(s)}_{\iff \dot{x}(t)} + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}X(s)$$

Portanto, tal sistema é **BIBO instável** pois, conforme vimos no Capítulo 2, o diferenciador ideal é **BIBO instável!**

Agora, considere um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial da forma

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

com condição inicial v_0 em $t_0 = 0^-$, onde $Q(\lambda)$ e $P(\lambda)$ **não possuem** raízes em comum (ou seja, o sistema é **controlável** e **observável**).

Suponha que $v_0 = 0$. Assim, $y_0(t) = 0$ e

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) \quad \text{(resposta estado nulo!)}$$

Relembre que o sistema é **BIBO estável** quando **toda** entrada $x(t)$ limitada resultar em $y(t) = y_{esn}(t)$ limitada. Caso contrário, o sistema é **BIBO instável**.

Obs *BIBO* estabilidade refere-se à estabilidade *externa* ($v_0 = 0$ e $x \neq 0$) do sistema.

Sabemos que

$$v_0 = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow y = y_0 = y_{esn} = 0$$

No entanto, o que acontece com $y = y_0$ quando $x = 0$ **mas** $v_0 \neq 0$? Relembre que este é o conceito de **estabilidade interna (ou assintótica)** do sistema.

Como estamos assumindo que em

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

não há cancelamentos pólo-zero, temos que

$$\{\text{pólos } H(s)\} = \{\text{zeros } Q(s)\} = \{\text{raízes características}\}$$

Desse modo, a partir dos resultados do Capítulo 2, obtemos os seguintes **critérios**:

1. Assintoticamente estável se e somente se todos os pólos de $H(s)$ estão no **SPE**, ou seja, possuem parte real negativa.

Relembre que isto significa que, dada qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$.

2. Assintoticamente instável se e somente se houver ao menos um pólo de $H(s)$ no **SPD** (i.e. com parte real positiva) **e/ou pólos com multiplicidade** em cima do **eixo imaginário**.

Relembre que isto significa que, dada qualquer condição inicial $v_0 \neq 0$, tem-se que $y(t) = y_0(t)$ é **ilimitada!**

3. Marginalmente estável se e somente se não há pólos de $H(s)$ no **SPD**, mas **existem pólos simples** (sem multiplicidade) em cima do **eixo imaginário**.

Relembre que isto significa que, para termos $y(t) = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, limitada e **arbitrariamente** próxima de zero, basta que $v_0 \neq 0$ seja **suficientemente** próxima de zero.

Relação entre Estabilidade BIBO e Assintótica

Obs: A posição dos **zeros** de $H(s)$ no plano complexo **não influenciam** na estabilidade assintótica!

Para um sistema **descrito** por uma **equação diferencial**, relembramos do Capítulo 2 que:

Propriedades:

1. Assintoticamente estável \Rightarrow BIBO estável
2. Assintoticamente instável **ou** marginalmente estável \Rightarrow BIBO instável

Logo (somente para **equações diferenciais** sem cancelamentos pólo-zero!):

Assint. estável \iff BIBO estável \iff **todos** os pólos de $H(s)$ no SPE

Exemplos: (no quadro)

O Fenômeno de Ressonância (Lathi Seção 2.7-7)

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Assim,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) \quad (\text{resposta estado nulo!})$$

Quando os **pólos** da entrada $X(s)$ estão “longe” dos **pólos** de $H(s)$, a resposta $y(t)$ do sistema tende a ser “fraca”. E, quando a entrada $X(s)$ possui um **pólo** “próximo” de algum dos **pólos** de $H(s)$, a resposta $y(t)$ tende a ser “forte”, podendo inclusive se tornar ilimitada quando os pólos são imaginários e coincidem! Isto é o que denominamos de **ressonância**.

Vídeos

- Taça de vidro quebrada pelo som:

<http://www.physics.ucla.edu/demoweb/demomanual/acoustics>

- Ponte *Tacoma Narrows* nos Estados Unidos colapsa devido a rajadas de vento:

<http://www.youtube.com/watch?v=qb0jxPCfaFk>

Obs: A ponte *Tacoma Narrows* é considerada um exemplo clássico de ressonância, inclusive em livros de física. No entanto, Robert H. Scanlan, um dos precursores de **Aerodinâmica de Pontes**, propôs num artigo científico de 1991 que a causa do colapso da ponte não foi a ressonância (busque por *Resonance* em <http://en.wikipedia.org>).

Exemplos com Matlab: (no quadro)

4.4 Análise de Circuitos Elétricos: O Circuito Transformado

Veremos agora como analisar facilmente um **circuito elétrico** com **condições iniciais nulas** através da **transformada de Laplace**.

Relembre que

$$v_R(t) = R i_R(t), \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Como $v_C(0^-) = 0$ e $i_C(0^-) = 0$, obtemos que

$$V_R(s) = \underbrace{R}_{Z_R(s)} I_R(s), \quad V_C(s) = \underbrace{\frac{1}{Cs}}_{Z_C(s)} I_C(s), \quad V_L(s) = \underbrace{Ls}_{Z_L(s)} I_L(s)$$

Nestes 3 casos, podemos escrever

$$V(s) = Z(s)I(s) \quad (\text{generalização da Lei de Ohm})$$

e denominamos $Z(s)$ de **impedância**. Assim,

$$Z(s) = R \text{ (resistor)}, \quad Z(s) = \frac{1}{Cs} \text{ (capacitor)}, \quad Z(s) = Ls \text{ (indutor)}$$

Análise de Circuitos Elétricos: O Circuito Transformado

Note que, se considerarmos que $V(s)$ é a **saída** e que $I(s)$ é a **entrada**, então impedância $Z(s)$ é a **função de transferência**, pois $V(s)/I(s) = Z(s)$.

A manipulação de impedâncias é idêntica à manipulação de resistores:

- Se $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são conectadas em **série**, então a impedância equivalente é:

$$Z_{eq}(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

- Se $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são conectadas em **paralelo**, então a impedância equivalente é:

$$Z_{eq}(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

A consequência dos resultados acima é que podemos facilmente simular um circuito elétrico no Matlab com base em funções de transferência!

Exemplo: (no quadro)

4.5 Diagrama de Blocos

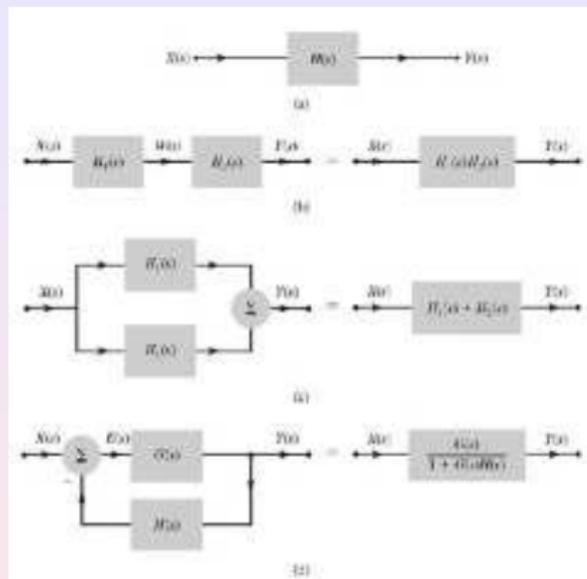


Figura : Conexões elementares de blocos e seus equivalentes.

Suponha que o sistema S_1 tem função de transferência $H_1(s)$ e que o sistema S_2 tem função de transferência $H_2(s)$. Então:

- Conexão em **paralelo**: o sistema S_p tem função de transferência $Y(s)/X(s) = H_p(s) = H_1(s) + H_2(s)$
- Conexão em **cascata (ou série)**: o sistema S_c tem função de transferência $Y(s)/X(s) = H_c(s) = H_1(s)H_2(s) = H_2(s)H_1(s)$. Assim, em termos da função de transferência $H_c(s)$, tanto faz ligarmos S_2 após S_1 ou S_1 após S_2 . No entanto, lembre que **fisicamente** a ordem importa!

- Conexão em **realimentação (feedback)**: temos que

$$E(s) = X(s) - H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)X(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

Logo,

$$G(s)X(s) = Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = Y(s)[1 + G(s)H(s)]$$

Portanto, a **função de transferência do sistema realimentado** é

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Quando $H(s) = 1$, dizemos que a realimentação é **unitária**. Neste caso,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{P(s)}{Q(s)}}{1 + \frac{P(s)}{Q(s)}} = \frac{P(s)}{P(s) + Q(s)}$$

onde $G(s) = P(s)/Q(s)$, $P(s)$ é o polinômio que determina os **zeros** de $G(s)$, $Q(s)$ é o polinômio que determina os **pólos** de $G(s)$, e $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$. Desse modo (somente para realimentação unitária!):

- 1 $F(s)$ e $G(s)$ possuem a **mesma ordem** e os **mesmos zeros**!
- 2 Os pólos de $F(s)$ são dados por $P(s) + Q(s) = 0$, ou seja, são influenciados pelos zeros e pólos de $G(s)$!

Exemplo: (no quadro)

4.6-5 Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas

Realizar (ou **implementar**) uma função de transferência $H(s)$ é construir um sistema físico cuja função de transferência é $H(s)$.

A implementação de

$$H(s) = -\frac{Z_f(s)}{Z(s)}$$

através de um **circuito eletrônico** utilizando amplificadores operacionais (amp-ops) é ilustrada abaixo:

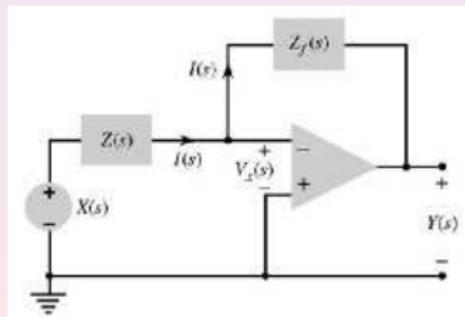


Figura : Implementação de $Y(s)/X(s) = H(s)$ com amp-os, onde $Z_f(s)$ e $Z(s)$ são impedâncias.

Realização com Amp-Ops

- Multiplicador escalar: $H(s) = -\frac{R_f}{R}$
 - Integrador: $H(s) = -\frac{1}{RC} \frac{1}{s}$
- $\left(Z_f(s) = Z_c(s) = \frac{1}{Cs}, Z(s) = Z_R(s) = R \right)$

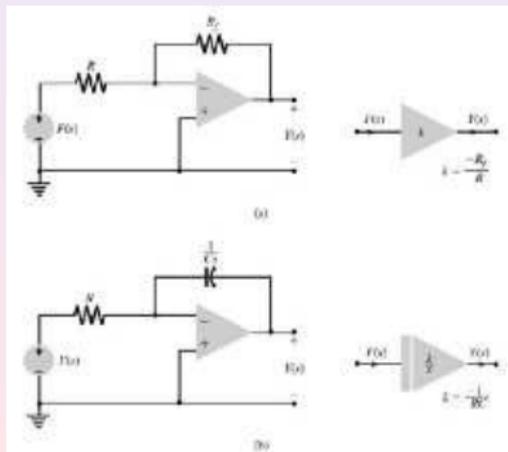


Figura : (a) Multiplicador escalar (b) integrador.

- Somador com ponderação: $Y(s) = \sum_{k=1}^r k_i X_i(s)$

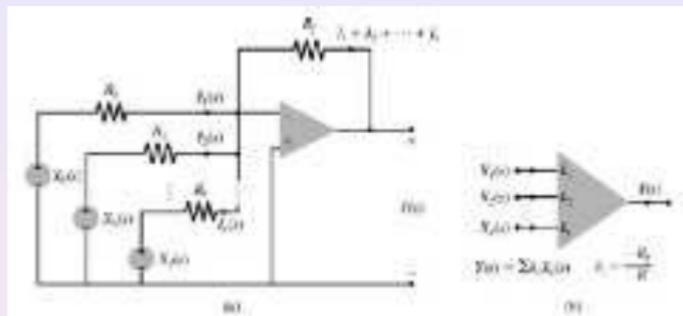


Figura : Somador com ponderação, onde $k_i = -R_f/R_i$.

Aplicações:

- Implementação de um controlador com realimentação
- Simulação **analógica** de sistemas elétricos, mecânicos, químicos, etc (na época em que não haviam computadores digitais)

4.8-1 Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Considere a seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)}$$

Suponha que $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$, $P(s)$ e $Q(s)$ **não possuem raízes em comum**, e que $H(s)$ é **BIBO estável**, ou seja, os n pólos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ estão no **SPE** (parte real negativa!).

Primeiramente, vamos analisar a resposta $y(t)$, $t \geq 0$, para a entrada

$$x(t) = e^{j\omega t} u(t) \quad (\text{exponencial complexa})$$

Por simplicidade, assumiremos que todos os pólos são **simples** e **reais**.

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Temos que

$$X(s) = \frac{1}{s - j\omega}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) = \frac{P(s)}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)(s - j\omega)}$$

Expandindo $Y(s)$ em frações parciais, obtemos

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} + \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=j\omega} \frac{1}{s - j\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} + H(j\omega) \frac{1}{s - j\omega}$$

Logo,

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t}}_{y_{tr}(t)} + \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t}}_{y_{ss}(t)}, \quad t \geq 0$$

onde $y_{tr}(t)$ é a componente de **regime transitório** e $y_{ss}(t)$ é a componente de **regime permanente** (*steady state*) de $y(t)$.

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Como $H(s)$ é BIBO estável, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

Portanto,

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega t} u(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}} \quad (\star)$$

Obs: Rigorosamente, deveríamos escrever $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - H(j\omega) e^{j\omega t}] = 0$.

Agora, considere a entrada senoidal **causal**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) u(t) = A \operatorname{Re}[e^{j\theta} e^{j\omega t}] u(t)$$

onde $A > 0$ é a amplitude, $\omega \geq 0$ é a frequência angular (em rad/s), e θ é a fase (em rad).

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Como

$$\operatorname{Re}[s] = (s + s^*)/2, \quad H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} \text{ (forma polar)}$$

obtemos de (*) e por linearidade que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = A \operatorname{Re}[H(j\omega)e^{j\theta} e^{j\omega t}] = A \operatorname{Re}[|H(j\omega)|e^{j(\theta + \angle H(j\omega))} e^{j\omega t}]$$

$$= \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \underbrace{\theta + \overbrace{\angle H(j\omega)}^{\text{def. de fase}}}_{\text{fase (em rad)}}) \quad (**)$$

Assim, vemos que a saída em **regime permanente** é **senoidal** e com a **mesma frequência** ω de $x(t)$. Entretanto, a **amplitude** é $A|H(j\omega)|$, e a **fase** é $\theta + \angle H(j\omega)$.

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Denominamos $H(j\omega)$ de **resposta em frequência** de $H(s)$.

Denominamos o gráfico $\omega \times |H(j\omega)|$ de **resposta de amplitude** de $H(s)$, e o gráfico $\omega \times \angle H(j\omega)$ de **resposta de fase**, com $\omega \in [0, \infty)$.

Note que, para $\omega > 0$, podemos rescrever (***) como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) &= A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)) \\ &= A|H(j\omega)| \cos(\omega[t + \angle H(j\omega)/\omega] + \theta)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = |H(j\omega)|x(t + \underbrace{\angle H(j\omega)/\omega}_{\text{atraso (em s)}})$$

onde $\angle H(j\omega)$ é dado em **rad**.

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

E, como para $\omega = \theta = 0$, temos

$$x(t) = Au(t) \iff X(s) = \frac{A}{s}$$

concluimos que

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = AH(0)$$

Note que este mesmo resultado pode ser obtido diretamente do TVF. Denominamos $H(0)$ de *ganho estático* ou *ganho CC* (válido apenas apenas para $H(s)$ BIBO estável!).

Resposta em Regime Permanente para Entradas Senoidais Causais

Obs 1: Relembre que

$$y(t) = y_{esn}(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \text{ (resposta estado nulo!)} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

A **componente de regime transitório** $y_{tr}(t)$ está **sempre presente**, mas pode ter uma dinâmica bem rápida em certos casos.

Obs 2: Para um sistema LCIT descrito por uma equação diferencial sem cancelamentos pólo-zero em $H(s)$, relembre que: BIBO estável \Leftrightarrow Assintoticamente Estável $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$.

Logo:

$$\boxed{y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t) = y_0(t) + \underbrace{y_{tr}(t) + y_{ss}(t)}_{=y_{esn}(t)}} \text{ (resposta total!)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$$

Exemplos: (no quadro)

Um **filtro** é um sistema LCIT cuja função de transferência $H(s)$ é BIBO estável (todos os pólos no SPE).

Filtros Ideais × **Filtros Práticos**: (no quadro)

Relembre que todo **sistema físico real** deve ser **causal**. Sistemas não-causais não podem ser realizados (implementados) na prática.

Relembre também que um sistema LCIT é causal **se e somente se** $h(t)$ é causal.

A resposta impulsiva dos **filtros ideais** é **não-causal**. Portanto, filtros ideais não podem ser realizados na prática!

O objetivo da engenharia é construir filtros práticos que possuem um desempenho próximo ao do ideal.

● **Projeto e Implementação de Filtros Práticos** ⇒ **Sinais II**

Diferenciador Ideal e Amplificação de Ruídos

Considere o sistema **diferenciador ideal**

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

O diferenciador ideal não deve ser utilizado na prática por amplificar ruídos de alta frequência. Por exemplo,

$$r(t) = A \sin(\omega t) \longrightarrow y(t) = \dot{r}(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

ou seja, tal sistema amplifica a amplitude A do ruído $r(t)$ pelo fator ω . Logo, quando $\omega > 0$ é grande (alta frequência), temos que a amplitude da saída também será grande.

Exemplo no Matlab:

$$x(t) = s(t) + r(t) = t + 0.01 \sin(1000t) \longrightarrow y(t) = \dot{x}(t) = 1 + 10 \cos(1000t)$$

onde $s(t) = t$ é o sinal a ser derivado e $r(t) = 0.01 \sin(1000t)$ é um ruído de alta frequência.

Conclusão: funções de transferência $H(s) = P(s)/Q(s)$ com $M > N$ não devem ser implementadas na prática!

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $x(t)$ é a **entrada** do sistema e $y(t)$ é a **saída**. Suponha que $N = \text{grau}(Q(s)) \geq \text{grau}(P(s)) = M$ e que não há cancelamentos pólo-zero. Denominamos N de **ordem do sistema**.

Temos que toda função de transferência $G(s)$ de primeira ordem sem zero pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (\text{forma padrão})$$

De fato,

$$G(s) = \frac{\beta}{s + \alpha} = \frac{\overbrace{\beta/\alpha}^{=K}}{\underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{=\tau} s + 1}$$

Resposta de Sistemas de Primeira Ordem

Suponha que $G(s) = K/(\tau s + 1)$ é (BIBO) estável, ou seja, $\tau > 0$. Considere uma entrada $x(t) = A$ do tipo **degrau** de magnitude A . Temos que a saída correspondente é

$$y(t) = AK(1 - \exp^{-t/\tau}) \iff Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{A}{s}$$

Note que $K = G(0)$ é o **ganho estático**. Denominamos τ de **constante de tempo**. Logo,

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = AG(0) = AK.$$

O instante de tempo para se atingir 95% de $y(\infty)$ é denominado de **tempo de acomodação de 5%** ($t_s(5\%)$), e é calculado por

$$0.95y(\infty) = y(t_s(5\%)) = KA(1 - e^{-t_s(5\%)/\tau}) \Rightarrow t_s(5\%) = 3\tau$$

O instante de tempo para se atingir 63% de $y(\infty)$ é calculado por

$$0.63y(\infty) = y(t(63\%)) = KA(1 - e^{-t(63\%)/\tau}) \Rightarrow t(63\%) = \tau$$

Obs: $t_s(5\%)$ e $t(63\%)$ **independem** da **amplitude** A da entrada do tipo **degrau**! E quanto menor τ , menor $t_s(5\%)$ e $t(63\%)$!

Resposta de Sistemas de Primeira Ordem

Portanto,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \quad \tau = \frac{t_s(5\%)}{3} = t(63\%)$$

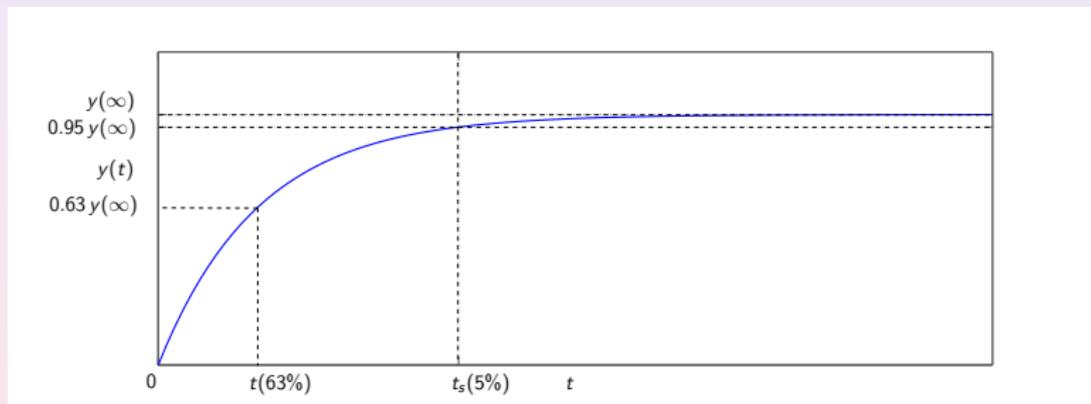


Figura : Resposta de um sistema de primeira ordem (estável e sem zero) ao degrau. **Não há oscilação nem sobressinal!**

Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Toda função de transferência $G(s)$ de segunda ordem sem zeros e com pólos não-nulos pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde $\omega_n > 0$. Os pólos de $G(s)$ são

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Note que $K = G(0)$ é o **ganho estático** quando $G(s)$ é (BIBO) estável. Denominamos ξ de **coeficiente de amortecimento** e ω_n de **frequência natural**. Temos as seguintes situações:

1. **Sistema não-amortecido** ($\xi = 0$): os pólos são **complexos** com $p_{1,2} = \pm j\omega_n$, e a resposta **em regime permanente** a uma entrada do tipo **degrau** é **senoidal** com frequência ω_n
2. **Sistema sub-amortecido** ($0 < \xi < 1$): os pólos são **complexos** com $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, e a resposta ao **degrau** apresenta **oscilação e sobressinal**

- 3. Sistema criticamente amortecido ($\xi = 1$):** os pólos são **reais e iguais** com $p_{1,2} = -\xi\omega_n$, e a resposta ao **degrau não** apresenta **oscilação nem sobressinal**, e há um **ponto de inflexão**
- 4. Sistema super-amortecido ($\xi > 1$):** os pólos são **reais, negativos e diferentes**, e a resposta ao **degrau não** apresenta **oscilação nem sobressinal**, e há um **ponto de inflexão**
- 5. Sistema (BIBO) instável ($\xi < 0$):** os pólos possuem parte real positiva (SPD)

Suponha que $G(s) = K\omega_n^2/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ é (BIBO) estável com $0 < \xi < 1$ (sub-amortecido). Considere uma entrada $x(t) = A$ do tipo **degrau** de magnitude A . Temos que

$$y(t) = KA \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \underbrace{\text{sen}\left(\underbrace{(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})}_{\omega_d} t + \cos^{-1}(\xi)\right)} \right]$$
$$\iff Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A}{s}$$

Assim,

$$y(\infty) = AG(0) = AK$$

A resposta $y(t)$ apresenta **sobressinal e oscilações**. A frequência de oscilação é $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, denominada de **frequência natural amortecida**.

Resposta de Sistemas de Segunda Ordem Sub-Amortecidos

Para encontramos o **instante de pico** t_p e o **valor de pico** $y_p = y(t_p)$, resolvemos a equação $\dot{y}(t) = 0$, encontrando

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-(\xi\pi)/\sqrt{1-\xi^2}}$$

onde M_p é o **sobressinal (máximo) relativo**. Logo,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}}$$

O instante de tempo $t_s(5\%)$ em que $y(t)$ **entra** na faixa de $\pm 5\%$ de $y(\infty)$ e lá **permanece** para todo **tempo futuro**, é denominado de **tempo de acomodação de 5%**. Temos que

$$t_s(5\%) \leq \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Obs: $t_s(5\%)$ e M_p **independem** da **amplitude** A da entrada do tipo **degrau!** E quanto menor o amortecimento $0 < \xi < 1$, maior M_p !

Resposta de Sistemas de Segunda Ordem Sub-Amortecidos

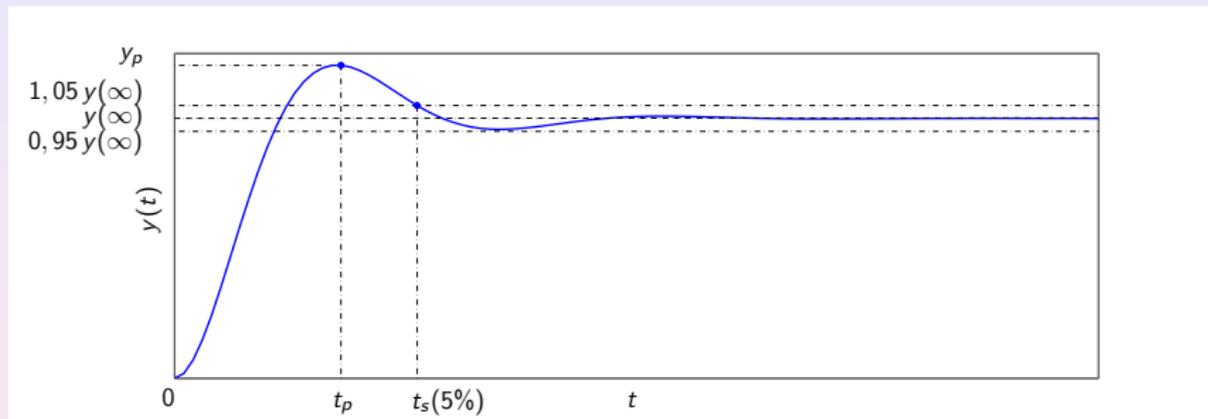


Figura : Resposta de um sistema de segunda ordem sub-amortecido (sem zeros) ao degrau.

1. Considere

$$G(s) = \frac{0.5}{2s + 1}$$

com $x(t) = 1$. Determine analiticamente τ , K , $y(\infty)$, $t_s(5\%)$. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta não apresenta sobressinal nem oscilação. Isto era esperado? Justifique.

2. Simule

$$G(s) = \frac{0.5}{2s - 1}$$

com $x(t) = 1$. Por qual razão não temos que $y(\infty) = G(0)$?

3. Considere

$$G(s) = \frac{4}{s + 10}$$

com $x(t) = 3$. Coloque $G(s)$ na forma padrão e determine analiticamente τ , K , $y(\infty)$, $t_s(5\%)$. Verifique os cálculos por simulação no Matlab.

4. Considere

$$G(s) = \frac{6.4}{s^2 + 3.648s + 16}$$

com $x(t) = 5$. Determine analiticamente K , $y(\infty)$, ξ , ω_n , M_p , e classifique o sistema. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta apresenta sobressinal e oscilação. Isto era esperado? Justifique. Observe que $t_s(5\%) \leq 3/(\xi\omega_n)$.

5. Repita o item anterior para

$$G(s) = \frac{6.4}{s^2 + 5.52s + 16}$$

6. Considere

$$G(s) = \frac{0.5}{(s+2)(s+2.5)} = \frac{0.5}{s^2 + 4.5s + 5}$$

com $x(t) = 10$. Determine analiticamente K , $y(\infty)$, ξ , ω_n , e classifique o sistema. Verifique os cálculos por simulação no Matlab. Note que a resposta não apresenta sobressinal nem oscilação. Isto era esperado? Justifique. Observe o ponto de inflexão na resposta.

Influência de Pólos e Zeros na Resposta

Considere um sistema LCIT com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Relembre que $G(s)$ é (BIBO) **estável** quando **todos** os **pólos** estão no **SPE**. Dizemos que $G(s)$ é de **fase não-mínima** quando há **pólos** ou **zeros** no **SPD**. Quando **todos** os **pólos** e **zeros** estão no **SPE**, dizemos que $G(s)$ é de **fase mínima**.

Suponha que $G(s)$ é (BIBO) estável. Em geral, para entradas $x(t)$ do tipo degrau, temos:

- A componente da resposta dinâmica referente a um pólo afastado da origem (do plano s) é relativamente rápida
- A componente da resposta dinâmica referente a um pólo próximo da origem é relativamente lenta

Influência de Pólos e Zeros na Resposta

- Um zero tende a fazer com que a resposta dinâmica apresente sobressinal. Quanto mais próximo da origem estiver o zero, maior o sobressinal. E, quanto mais longe da origem, menor se torna o sobressinal, podendo o mesmo não existir. Assim, um sistema de segunda ordem com pólos reais e um zero poderá apresentar sobressinal dependendo da posicionamento do zero no plano s
- Um zero bem próximo de um pólo tende a anular os efeitos dos mesmos na resposta dinâmica

Influência de Pólos e Zeros na Resposta

1. Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde $\tau = 1$, $\tau = 0.5$. Para cada valor de τ , determine o pólo e sua posição no plano s (use os comandos `zpk` e `pzmap` no Matlab), e conclua sobre a estabilidade e a rapidez da resposta do sistema. Simule para uma entrada do tipo degrau unitário.

2. Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{1.6}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1.6}{s^2 + 3s + 2}$$

Determine os pólos e suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que não há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique.

2. (Continuação)

Agora, adicionando um zero, temos

$$G_z(s) = \frac{1.6(\beta s + 1)}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1.6(\beta s + 1)}{s^2 + 3s + 2}$$

onde $\beta = 0.1$, $\beta = 0.6$, $\beta = 0.99$, $\beta = 1.2$, $\beta = 2$, $\beta = 10$. Para cada valor de β , determine os pólos e zeros, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados. Note que, dependendo da posição do zero, o sobressinal será maior ou menor, podendo também não estar presente.

3. Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2 + s + 1}$$

Determine os pólos e suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique. Agora, adicionando um zero, temos

$$G_z(s) = \frac{0.9(\beta s + 1)}{s^2 + s + 1}$$

onde $\beta = 0.05$, $\beta = 0.5$, $\beta = 1$, $\beta = 2.5$. Para cada valor de β , determine os pólos e o zero, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados.

Influência de Pólos e Zeros na Resposta

4. Considere o sistema de segunda ordem de fase não-mínima

$$G(s) = \frac{-\beta s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

onde $\beta = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\beta = 1$, $\beta = 10$. Para cada valor de β , determine os pólos e o zero, suas posições no plano s , e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que a resposta é negativa nos instantes iniciais quando β é grande o suficiente.

Justificaremos tal comportamento no que se segue. Escrevemos

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{-\beta s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\overbrace{G_1(s)}^1}{s^2 + 3s + 2} - \frac{\overbrace{G_2(s) = \beta s G_1(s)}^{\beta s}}{s^2 + 3s + 2}$$

Assim,

$$Y(s) = \underbrace{G_1(s)X(s)}_{Y_1(s)} - \underbrace{\beta s G_1(s)X(s)}_{Y_2(s) = \beta s Y_1(s)} \iff y(t) = y_1(t) - y_2(t) = y_1(t) - \beta \dot{y}_1(t)$$

Verifique a validade da equação acima no Simulink para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise o motivo da resposta ser negativa nos instantes iniciais quando β é grande o suficiente.

O conceito de **dominância** desempenha um papel fundamental na análise e controle de sistemas LCIT. Seja $G(s)$ uma função de transferência, e s_d um pólo real ou um par de pólos complexos conjugados de $G(s)$ no SPE. Dizemos que s_d é **dominante** quando:

1. Pólos e zeros à direita de s_d , ou à esquerda e próximos de s_d , sempre ocorrem aos pares e, além disso, cada zero está muito próximo do pólo do par correspondente. Isto significa que o zero praticamente anula o efeito do pólo na resposta dinâmica, e vice-versa (o pólo anula o efeito do zero).
2. Os demais pólos e zeros estão à esquerda de s_d e afastados.

Desse modo, se $G(s)$ tem um **pólo real dominante**, então a **resposta** dinâmica de $G(s)$ terá características muito **próximas** às de um **sistema de primeira ordem**. E, se $G(s)$ tem um **par de pólos complexos conjugados dominante**, então a **resposta** dinâmica terá **características** muito próximas às de um **sistema de segunda ordem subamortecido**.

Exemplos no Matlab:

1. Temos que

$$G(s) = \frac{0.8}{(s + 1)(0.05s + 1)}$$

se comporta como o sistema de primeira ordem

$F(s) = 0.8/(s + 1)$, pois o pólo real $s_d = -1$ é dominante.

Verificação: utilizar o comando `pzmap` no Matlab e simular!

2. Temos que

$$G(s) = \frac{0.8(0.99s + 1)}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(0.1s + 1)}$$

se comporta como o sistema de segunda ordem subamortecido

$F(s) = 0.8/(s^2 + s + 1)$, pois os pólos complexos conjugados $s_d = -0.5 \pm j0.87$ são dominantes.

Verificação: utilizar o comando `pzmap` no Matlab e simular!

Controle de Sistemas em Malha-Fechada

Motivação: (no quadro)

Considere o diagrama de blocos de um sistema em malha-fechada **modelado** por $G(s)$, onde $r(t)$ é a referência, $w(t)$ é uma perturbação (**externa**), $y(t)$ é a saída, $e(t) = r(t) - y(t)$ é o erro de rastreamento, $x(t)$ é o controle, e $C(s) = X(s)/E(s)$ é o controlador a ser projetado.

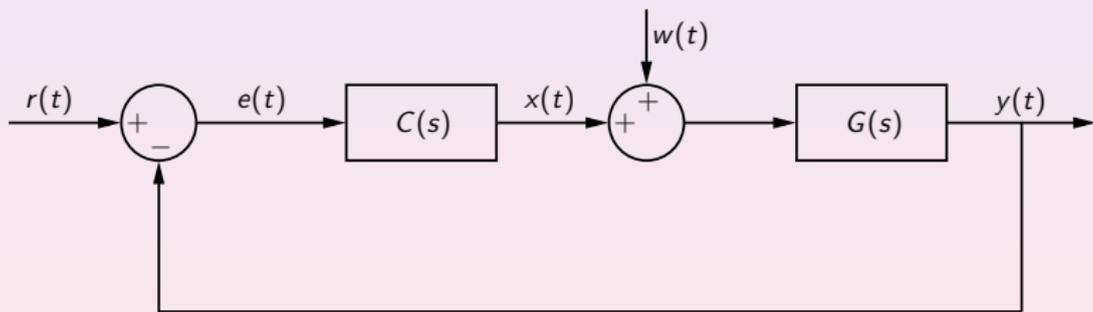


Figura : Diagrama de blocos do sistema $G(s)$ em malha-fechada com perturbação $w(t)$.

Projetar um controlador significa definir uma estrutura para

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

e então escolher adequadamente os parâmetros correspondentes de modo que o sistema em malha-fechada atenda a determinadas especificações de **regime transitório** (tempo de acomodação e sobressinal, por exemplo) e de **regime permanente** (erro nulo em regime permanente para referências e perturbações do tipo degrau, por exemplo).

Controladores Clássicos

Na prática, as seguintes estruturas de controladores são amplamente utilizadas, onde $K_c > 0$:

- **Proporcional (P):**

$$C(s) = E(s)/X(s) = K_c \Rightarrow x(t) = K_c e(t)$$

- **Integral (I):**

$$C(s) = E(s)/X(s) = \frac{K_c}{s} \Rightarrow x(t) = K_c \int_0^t e(\tau) d\tau$$

- **Proporcional-Integral (PI) = P + I:**

$$C(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_c(s + z)}{s}$$

É importante ressaltar que, na prática, devemos sempre procurar utilizar controladores com a estrutura mais simples possível. Isto implica em menos dificuldades na implementação e em menores custos.

Considerando que $w = 0$ (**sem perturbação**), temos que a função de transferência em malha-fechada é

$$F_{RY}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{N_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \quad (w = 0)$$

Uma maneira de projetarmos o controlador é primeiramente escolhermos a estrutura de $C(s)$ de modo que as especificações de regime permanente sejam atendidas e que $F_{RY}(s)$ seja uma função de transferência **estável** de primeira ou de segunda ordem. Note que a ordem de $F_{RY}(s)$ é **igual** à ordem de $C(s)G(s)$. Em muitos casos, isto pode ser alcançado através de um cancelamento entre um zero de $C(s)$ e um pólo de $G(s)$. Em seguida, os parâmetros de $C(s)$ são determinados por igualdade polinomial.

Obs: $F_{RY}(s)$ sempre deverá ser **estável**!

No entanto, tal método algébrico apresenta algumas restrições:

- Em geral, o método é válido para $G(s)$ de 1a ou 2a ordem
- Cancelamentos pólo-zero em $C(s)G(s)$ que estão no SPD (instável) não podem ser efetuados
- Mesmo quando fazemos um cancelamento pólo-zero em $C(s)G(s)$ que está no SPE (estável), temos que o regime transitório referente à perturbação $w(t)$ será influenciado pelo pólo de $G(s)$ que foi cancelado. Desse modo, se o pólo cancelado de $G(s)$ é muito lento, ou seja, está muito próximo do eixo imaginário, a dinâmica da rejeição de tais perturbações também será bastante lenta. Na disciplina **Sistemas Realimentados**, serão estudadas técnicas de projeto de controladores em que não se faz cancelamentos pólo-zero
- Quando desejamos que $F_{RY}(s)$ seja de segunda ordem, muitas vezes não conseguimos atender simultaneamente às especificações de tempo de acomodação ($t_s(5\%)$) e de sobressinal (M_p)

Erro em Regime Permanente

Analisaremos agora o erro de rastreamento $e(t) = r(t) - y(t)$ em **regime permanente** ($t \rightarrow \infty$) para referências e perturbações do tipo degrau. Temos que

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - [C(s)G(s)E(s) + G(s)W(s)]$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}W(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{D_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}R(s) - \frac{D_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}W(s)$$

Considere que $r(t)$ e $w(t)$ são do **tipo degrau** de magnitudes A e B , respectivamente. Assim, $R(s) = A/s$, $W(s) = B/s$. **Suponha** que $F_{RY}(s)$ é **estável**, ou seja, todas as raízes de

$$D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)$$

estão no SPE. Isto garante que o **Teorema do Valor Final** pode ser aplicado.

Erro em Reg. Perm. para um Controlador Proporcional (P)

Suponha que $D(0) \neq 0$, ou seja, $G(s)$ não tem pólos em $s = 0$.
Para $C(s) = K_c$, temos que

$$E(s) = \frac{D(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{A}{s} - \frac{N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{B}{s}$$

e (**Teorema do Valor Final**)

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\cancel{s} \frac{D(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{A}{\cancel{s}} - \cancel{s} \frac{N(s)}{D(s) + K_c N(s)} \frac{B}{\cancel{s}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{AD(s)}{D(s) + K_c N(s)} - \frac{BN(s)}{D(s) + K_c N(s)} \right) \\ &= \frac{AD(0)}{D(0) + K_c N(0)} - \frac{BN(0)}{D(0) + K_c N(0)} = \boxed{\frac{A}{1 + K_c G(0)} - \frac{BG(0)}{1 + K_c G(0)}} \end{aligned}$$

pois como $D(0) + K_c(0)N(0) \neq 0$ ($F_{RY}(s)$ é estável) e $D(0) \neq 0$, não há divisão por zero no limite! Portanto, **desde que $F_{RY}(s)$ é estável**, temos

$$\boxed{\lim_{K_c \rightarrow \infty} e(\infty) = 0.}$$

Erro em Reg. Perm. para um Controlador Integral (I)

Suponha que $D_c(s) = s\bar{D}_c(s)$, ou seja, $C(s)$ tem um pólo em $s = 0$ (integrador). Temos que

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{\cancel{s}\bar{D}_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{A}{\cancel{s}} - \frac{\cancel{s}\bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{B}{\cancel{s}} \\ &= \frac{A\bar{D}_c(s)D(s) - B\bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \end{aligned}$$

e (**Teorema do Valor Final**)

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A\bar{D}_c(s)D(s) - B\bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0 \cdot [A\bar{D}_c(0)D(0) - B\bar{D}_c(0)N(0)]}{D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0)} = \boxed{0}, \quad (1) \end{aligned}$$

pois como $D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0) \neq 0$ ($F_{RY}(s)$ é estável), não há divisão por zero! Desse modo, $e(\infty) = 0$ independente das magnitudes A e B de $r(t)$ e $w(t)$, respectivamente.

Portanto, **desde que** $F_{RY}(s)$ **é estável**, temos que, **em regime permanente**, a saída $y(t)$ **rastreia** a referência $r(t)$ com **rejeição da perturbação** $w(t)$.

Observe que o **princípio** utilizado foi: **o pólo do controlador cancela o pólo da referência e da perturbação.**

Função de Transferência $F_{RY}(s)$

- $F_{RY}(s)$ de primeira ordem

$$F_{RY}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde $\tau > 0$ (pólo estável em $s = -1/\tau$). Para referências $r(t)$ do tipo degrau, não há sobressinal (nem oscilação) em $y(t)$ e

$$t_s(5\%) = 3\tau, \quad e(\infty) = 0$$

- $F_{RY}(s)$ de segunda ordem

$$F_{RY}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde $0 < \xi < 1$ e $\omega_n > 0$ (pólos estáveis em $s = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$). Para referências $r(t)$ do tipo degrau, temos que

$$M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad t_s(5\%) \leq \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad e(\infty) = 0$$

Exemplo: (no quadro)

1. Considere o modelo do exemplo anterior, ou seja,

$$G(s) = \frac{0.5}{10s + 1}.$$

a) Simule $G(s)$ em malha-aberta para $x(t) = 1$ do tipo degrau. Conforme o esperado, observe que $t_s(5\%) = 30$ e $y(\infty) = G(0) = 0.5$. Agora, aplique uma perturbação $w(t) = 0.25$ do tipo degrau em $t = 100$. Note que a perturbação não é rejeitada.

b) Utilize um Controlador Proporcional $C(s) = K_c$ e $r(t) = 1$ do tipo degrau. Analise a dinâmica da saída $y(t)$ para os valores de ganho $K_c = 2$, $K_c = 6$, $K_c = 100$, $K_c = 1000$. O que acontece com a dinâmica de $y(t)$ e com o erro em regime permanente $e(\infty)$ à medida que aumentamos o valor do ganho K_c ? Tal resultado era esperado? Justifique sua resposta. Podemos então sempre escolher $K_c = \infty$ para que $e(\infty) = 0$? Justifique sua resposta. Dica: visualize $y(t)$ e o sinal de controle $x(t)$.

- c)** Projete $C(s)$ de modo que se tenha: (i) erro nulo em regime permanente para $r(t)$ e $w(t)$ do tipo degrau; (ii) $t_s^{MF}(5\%) = t_s^{MA}(5\%)/2$; e que (iii) a saída $y(t)$ não apresente sobressinal para referências do tipo degrau. Dica: utilize $C(s) = K_c(10s + 1)/s$ (PI) com cancelamento pólo-zero.
- d)** Simule o sistema em malha-fechada para $r(t) = 1$ e $w(t) = 0.25$ do tipo degrau, aplicando $w(t)$ em $t = 100$. Verifique se os requisitos de desempenho foram realmente atendidos e visualize o sinal de controle $x(t)$. Note que $x(\infty) = 1/G(0) - 0.25 = 1.75$. Isto era esperado? Justifique.
- e)** Mantendo o mesmo controlador $C(s)$, repita o item anterior para $G(s) = 0.45/(9.9s + 1)$. Explique o motivo pelo qual ainda temos que $e(\infty) = 0$.

2. Considere

$$G(s) = \frac{1.2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1.2}{(s + 1)(s + 3)}.$$

a) Simule $G(s)$ em malha-aberta para $x(t) = 3$ do tipo degrau e analise os resultados. Note que a saída $y(t)$ não apresenta sobressinal. Isto era esperado? Justifique.

b) Considere o controlador integral $C(s) = K_c/s$ e $r(t) = 3$ do tipo degrau. Analise a dinâmica de $y(t)$ em malha-fechada para os valores de ganho $K_c = 0.5$, $K_c = 1.5$, $K_c = 5$, $K_c = 10$, $K_c = 20$. O que acontece com a saída $y(t)$ à medida que aumentamos o valor do ganho K_c ? Note que, quando $e(\infty) = 0$, temos que $x(\infty) = 3/G(0)$. Isto era esperado? Justifique. Explique o motivo pelo qual não temos $e(\infty) = 0$ para $K_c = 20$. Assim, dado um sistema $G(s)$, basta colocarmos um controlador integral em série para que se tenha $e(\infty) = 0$ em malha-fechada? Justifique sua resposta.

4.9 Diagramas de Bode

Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $\text{grau}(P(s)) \leq \text{grau}(Q(s))$, $P(s)$ e $Q(s)$ **não possuem raízes em comum**, e $H(s)$ é **(BIBO) estável**, ou seja, todos os pólos estão no **SPE**.

Relembre que, se aplicarmos uma entrada senoidal **causal**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)u(t)$$

então a **resposta em regime permanente** é dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \theta + \underbrace{\overbrace{\angle H(j\omega)}^{\text{def. de fase}}}_{\text{fase (em rad)}})$$

Relembre também que: $H(j\omega)$ é a **resposta em frequência** de $H(s)$, o gráfico $\omega \times |H(j\omega)|$ é a **resposta de amplitude**, e o gráfico $\omega \times \angle H(j\omega)$ é a **resposta de fase**, com $\omega \in [0, \infty)$.

Diagramas de Bode

Agora, suponha que $H(s)$ possui todos os pólos no SPE, com exceção de um **único** pólo em $s = 0$. Se repetirmos o raciocínio utilizado na Seção 4.8-1, encontramos que a **resposta em regime permanente** para a entrada senoidal **causal**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) u(t), \quad \omega \neq 0$$

é dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss}(t) = K(\omega) + \underbrace{A|H(j\omega)|}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \underbrace{\theta + \overbrace{\angle H(j\omega)}^{\text{def. de fase}}}_{\text{fase (em rad)}})$$

onde $K(\omega)$ é uma constante real (**componente CC**) que depende da frequência $\omega \neq 0$ da entrada $x(t)$. Do mesmo modo, denominamos $H(j\omega)$ de **resposta em frequência** de $H(s)$, o gráfico $\omega \times |H(j\omega)|$ é a **resposta de amplitude**, e o gráfico $\omega \times \angle H(j\omega)$ é a **resposta de fase**, com $\omega \in (0, \infty)$.

Exemplo: Para o sistema **integrador ideal**

$$\dot{y}(t) = x(t)$$

temos que $H(s) = 1/s$, e a resposta em frequência é $H(j\omega) = 1/(j\omega) = -j/\omega$.

Obs: Dada uma função de transferência $H(s)$ qualquer (estável ou não), sempre podemos obter os gráficos $\omega \times |H(j\omega)|$ e $\omega \times \angle H(j\omega)$. No entanto, a **resposta em frequência** $H(j\omega)$, a qual determina a **resposta em regime permanente** $y_{ss}(t)$, só é definida quando:
(i) $H(s)$ é **estável**; ou **(ii)** todos os pólos de $H(s)$ estão no SPE, com exceção de **único** pólo em $s = 0$. Quando $H(s)$ não se enquadra nestas duas situações, $H(j\omega)$ não possui significado físico e, por isso, a **resposta em frequência não é definida!**

Relembre que uma função de transferência $H(s)$ é de **fase não-mínima** quando **há** pólos **ou** zeros no **SPD**. Quando **todos** os pólos **e** zeros estão no **SPE**, dizemos que $H(s)$ é de **fase mínima**.

Veremos agora como esboçar os gráficos $\omega \times |H(j\omega)|$ e $\omega \times \angle H(j\omega)$ de uma função de transferência $H(s)$ **qualquer** (estável, instável, fase-mínima, fase não-mínima). Para facilitar o esboço, utilizaremos **escalas logarítmicas** para a amplitude e para ω . Neste caso, tais gráficos são denominados de **diagramas de Bode**.

Exemplo: Considere a função de transferência sem pólos ou zeros no SPD

$$H(s) = \frac{K(s + a_1)(s + a_2)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2s + b_3)} = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \frac{\left(\frac{s}{a_1} + 1\right) \left(\frac{s}{a_2} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{b_1} + 1\right) \left(\frac{s^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}s + 1\right)}$$

onde as raízes de $s^2 + b_2s + b_3$ são complexas conjugadas.

Assim,

$$H(j\omega) = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \frac{\left(\frac{j\omega}{a_1} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{a_2} + 1\right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1\right) \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1\right)}$$

Pela propriedade do ângulo do produto de números complexos, obtemos que

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) = & \angle \left(\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} \right) + \angle \left(\frac{j\omega}{a_1} + 1 \right) + \angle \left(\frac{j\omega}{a_2} + 1 \right) \\ & - \angle(j\omega) - \angle \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1 \right) - \angle \left(\frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3}j\omega + 1 \right) \end{aligned}$$

Agora, definimos (dB = decibel)

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

Por exemplo:

$$0 \text{ dB} \leftrightarrow 1, \quad -3.01 \text{ dB} \leftrightarrow 0.7071 \cong \sqrt{2}/2, \quad -\infty \text{ dB} \leftrightarrow 0$$

Diagramas de Bode

Como $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ e $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$, temos que

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{dB} = & \left| \frac{Ka_1 a_2}{b_1 b_3} \right|_{dB} + \left| \frac{j\omega}{a_1} + 1 \right|_{dB} + \left| \frac{j\omega}{a_2} + 1 \right|_{dB} \\ & - |j\omega|_{dB} - \left| \frac{j\omega}{b_1} + 1 \right|_{dB} - \left| \frac{(j\omega)^2}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} j\omega + 1 \right|_{dB} \end{aligned}$$

Concluimos então que os diagramas de Bode $\omega \times \angle H(\omega)$ (**fase**) e $\omega \times |H(\omega)|_{dB}$ (**amplitude**) de toda função de transferência $H(s)$ sem pólos ou zeros no SPD podem sempre ser obtidos a partir da **soma** dos diagramas de Bode de 4 tipos de **termos básicos**: um termo constante C , pólos ou zeros na origem $j\omega$, pólos ou zeros de primeira ordem $(j\omega/a + 1)$, e pólos ou zeros complexos conjugados de segunda ordem $((j\omega/\omega_n)^2 + 2j\xi\omega/\omega_n + 1)$. Na sequência, analisaremos cada um dos 4 **termos básicos** separadamente.

- **Constante** C : $\angle C = 0^\circ$ se $C > 0$ e $\angle C = -180^\circ$ se $C < 0$;
 $|C|_{dB} = 20 \log |C|$

Diagramas de Bode

- Pólo (linha cheia) ou zero (linha tracejada) na **origem** ($j\omega$)

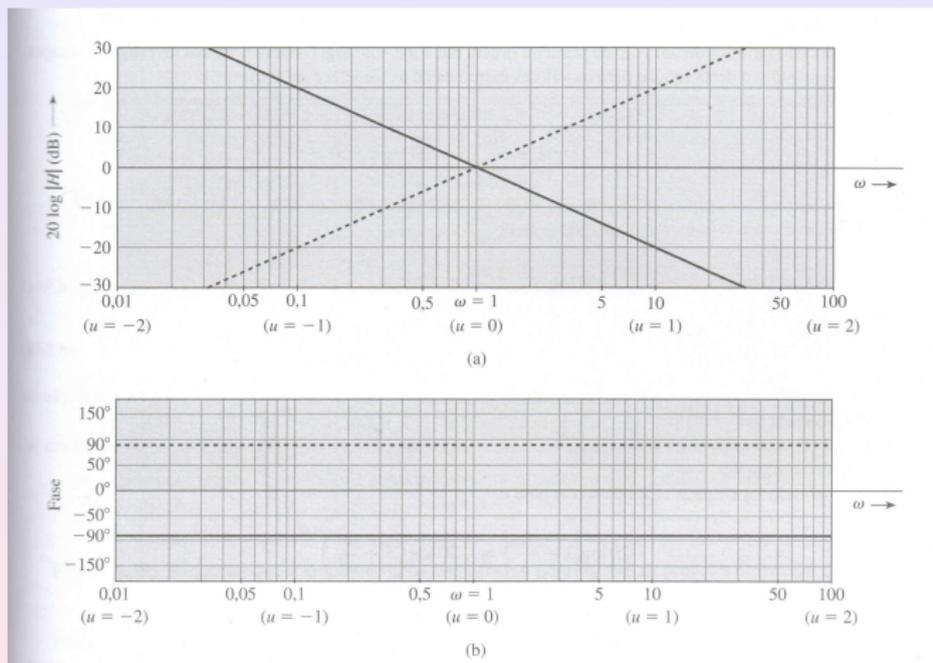


Figura : Diagrama de Bode de (a) amplitude e (b) fase. Note que o diagrama de amplitude é uma reta passando por 0 dB em $\omega = 1$ (pois $\omega = 1 \Rightarrow |\pm j\omega|_{dB} = 20 \log 1 = 0$ dB), e com inclinação de -20 dB/década para um pólo e de $+20$ dB/década para um zero. Para a fase, temos que $\angle \pm j\omega = \pm 90^\circ$.

Diagramas de Bode

- Pólo (linha cheia) ou zero (linha tracejada) de **primeira ordem** em $s = -a < 0$ ($j\omega/a + 1$, $a > 0$ é a **frequência de corte**)

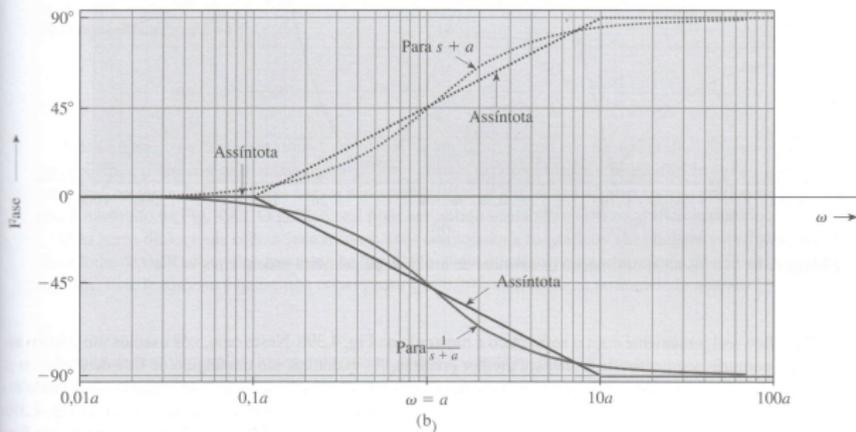
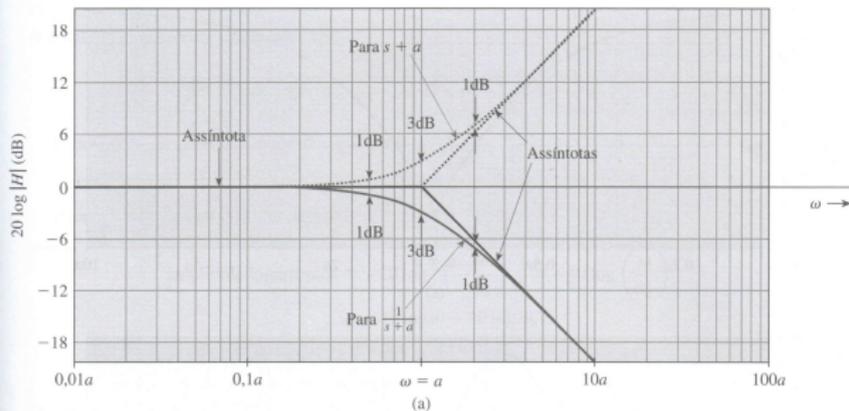
Existem **2 assíntotas de amplitude**: uma é delas é uma linha horizontal que passa por 0 dB e termina em $\omega = a$, e a outra começa em $\omega = a$ e tem inclinação de -20 dB/década para um pólo e de $+20 \text{ dB/década}$ para um zero. A diferença máxima entre o valor exato e o valor das assíntotas ocorre em $\omega = a$ e é de aproximadamente $\mp 3 \text{ dB}$. Observe que

$$\omega = a \Rightarrow |j\omega/a + 1|_{db} = 20 \log \sqrt{2} \cong 3 \text{ dB}.$$

Há **3 assíntotas de fase**: a primeira é uma linha horizontal que passa por 0° e termina em $\omega = a/10$; a segunda começa em $\omega = a/10$ com 0° (uma década abaixo de $\omega = a$) e termina em $\omega = 10a$ com $\mp 90^\circ$ (uma década acima de $\omega = a$), e tem inclinação de $-45^\circ/\text{década}$ para um pólo e de $+45^\circ/\text{década}$ para um zero; a terceira é uma linha horizontal que passa por $\mp 90^\circ$ e começa em $\omega = 10a$. O valor exato e o valor da assíntota são iguais a $\pm 45^\circ$ em $\omega = a$, e a fase **nunca ultrapassa** $\mp 90^\circ$.

Observe que $\omega = a \Rightarrow \angle(j\omega/a + 1) = 45^\circ$.

Diagramas de Bode de um Pólo ou Zero de Primeira Ordem em $s = -a < 0$

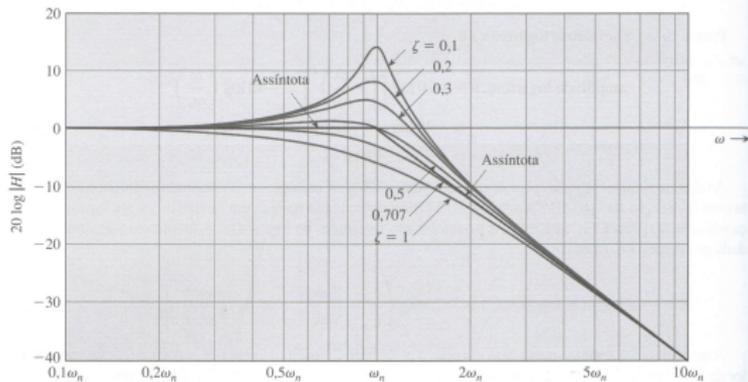


- Pólos complexos conjugados de segunda ordem (subamortecido)
 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ($(j\omega/\omega_n)^2 + 2j\xi\omega + 1$, $0 < \xi \leq 1$, ω_n é a **frequência de corte**)

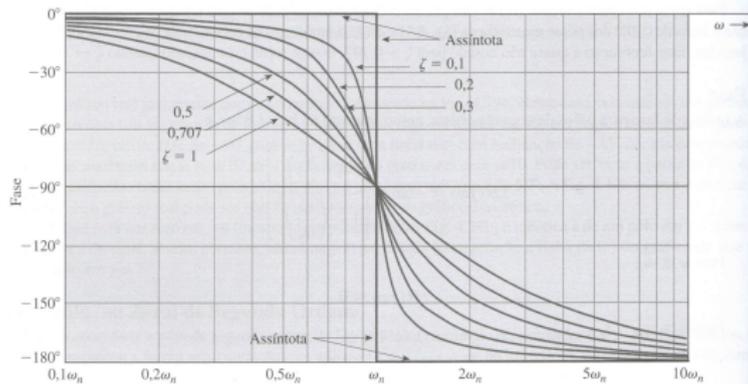
Existem **2 assíntotas de amplitude**: uma é delas é uma linha horizontal que passa por 0 dB e termina em $\omega = \omega_n$, e a outra começa em $\omega = \omega_n$ e tem inclinação de -40 dB/década . As diferenças entre os valores exatos e os valores das assíntotas dependem do amortecimento ξ , e pode haver **ressonância**.

Há **2 assíntotas de fase horizontais**: uma passando por 0° antes de $\omega = \omega_n$, e outra passando por -180° após $\omega = \omega_n$. O valor exato é igual à 45° em $\omega = \omega_n$. As diferenças entre os valores exatos e os valores das assíntotas dependem do amortecimento ξ . Observe que a fase **nunca ultrapassa** -180° .

Diagramas de Bode de Pólos Complexos Conjugados de Segunda Ordem



(a)



(b)

Diagramas de Bode de Pólos Complexos Conjugados de Segunda Ordem

Se $\xi > 1$, teremos **2 pólos reais**. Neste caso, seguimos o esboço dos diagramas de Bode para pólos de primeira ordem.

Para se obter os diagramas de Bode para **zeros complexos conjugados de segunda ordem** com $0 < \xi < 1$, basta **refletir** os diagramas de Bode de pólos complexos conjugados em relação ao **eixo horizontal**.

Exemplo: Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{20s(s + 100)}{(s + 2)(s + 10)}$$

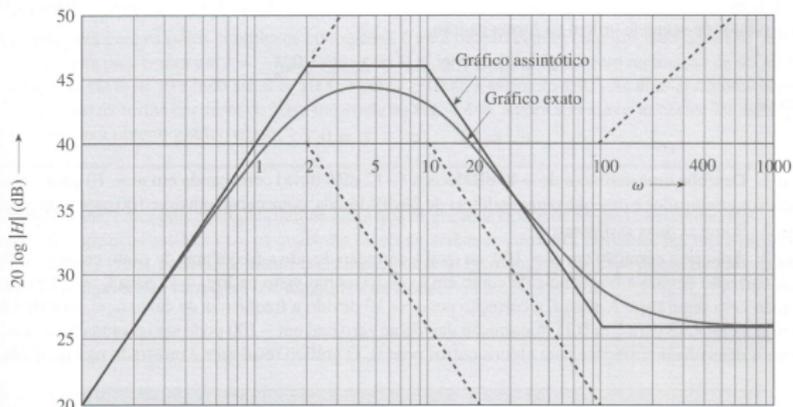
Temos zeros em $s = 0$ (origem) e $s = -100$, e pólos em $s = -2$ e $s = -10$. Logo, $s = -2$, $s = -10$ e $s = -100$ são as frequência de corte dos termos de primeira ordem. Rescrevendo $H(s)$ como

$$H(s) = \frac{20 \times 100}{2 \times 10} \frac{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)} = 100 \frac{s \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

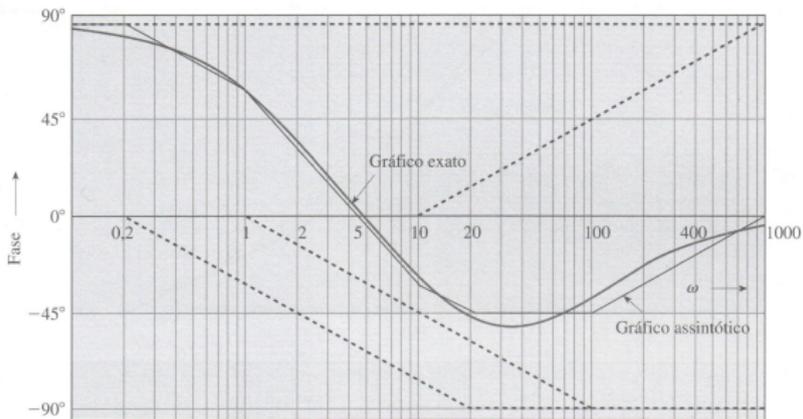
obtemos que o termo constante é 100. Com estes dados, traçamos as assíntotas dos diagramas de Bode de amplitude e de fase. Por fim, obtemos um esboço. No Matlab, o comando é `bode(H)`.

Obs: Como $H(s)$ é estável, os diagramas de Bode de $H(s)$ correspondem à resposta em frequência $H(j\omega)$!

Exemplo



(a)



(b)

Quando há pólos ou zeros de primeira ou segunda ordem no **SPD** (sistema de fase não-mínima), o **diagrama de amplitude** permanece **igual** ao de pólos ou zeros no **SPE**, mas o **diagrama de fase é refletido** em relação ao **eixo horizontal**.

Obs 1: A resposta em frequência e a resposta em regime permanente só estão definidas quando $H(s)$ possui todos os pólos no SPE, exceto por um possível pólo simples (sem multiplicidade) em $s = 0$. Se isto não for atendido, não há nenhum impedimento para que possamos esboçar os diagramas de Bode de $H(s)$. No entanto, não haverá nenhuma relação com a resposta em frequência!

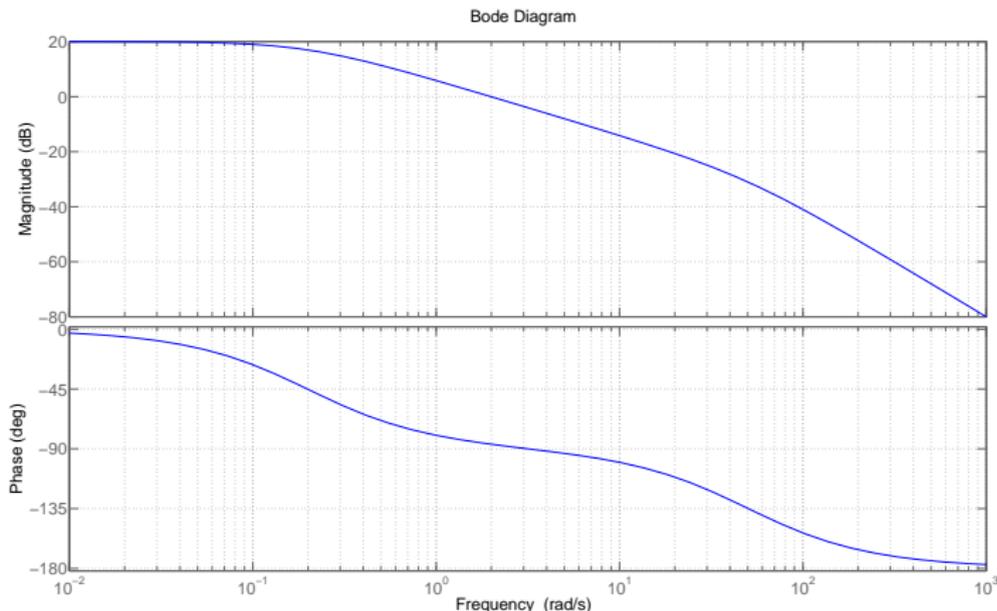
Obs 2: Quando $H(s)$ é de **fase mínima**, existe uma **relação única** entre os diagramas de amplitude e de fase. Isto significa que o diagrama de fase pode ser obtido a partir do diagrama de amplitude, e vice-versa.

Obs 3: Suponha que temos um sistema físico cuja função de transferência $H(s)$ tem todos os pólos no SPE ou que, exceto por único pólo em $s = 0$, os demais pólos estão no SPE. Neste caso, a resposta em frequência está definida e podemos **identificar** $H(s)$ **experimentalmente**. Para isto, aplicamos diversas entradas senoidais causais da forma

$$x(t) = \cos(\omega t)u(t)$$

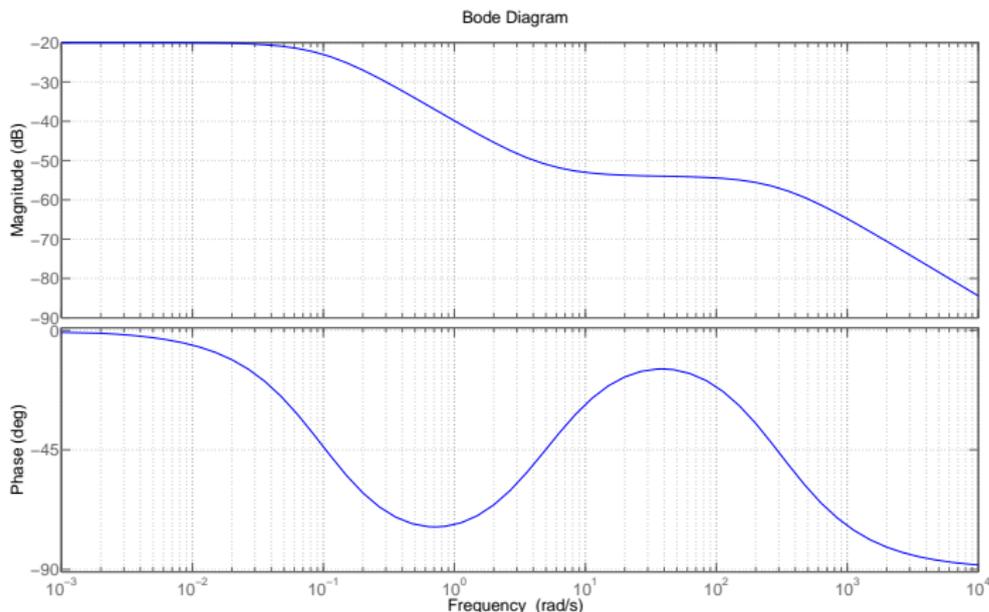
para vários valores de frequência $\omega \in (0, \infty)$ de modo a obtermos um esboço dos diagramas de Bode de amplitude e de fase. Quando os pólos e zeros de $H(s)$ estão relativamente distantes, podemos identificar os parâmetros de $H(s)$ através das propriedades gráficas vistas acima (caso os pólos e zeros estejam relativamente próximos, devemos utilizar algoritmos computacionais de identificação). Note que, pela **Obs 2** acima, se o sistema for de fase mínima, então basta levantarmos o diagrama de amplitude experimentalmente.

Exercício de Identificação 1



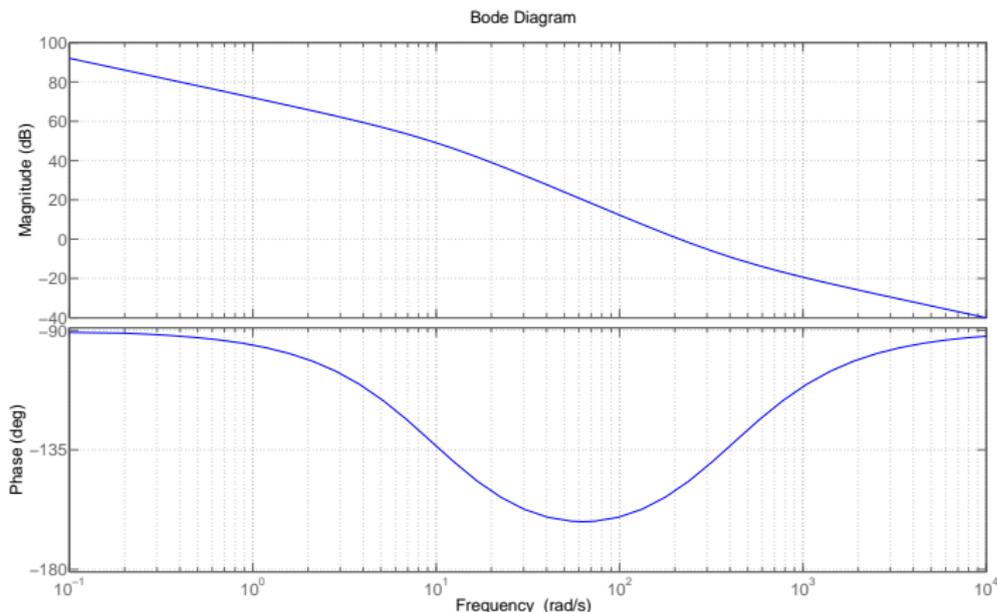
1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 3 \cos(100t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

Exercício de Identificação 2



1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 100 \cos(0.03t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

Exercício de Identificação 3



1. Há zeros ou pólos na origem? Qual a ordem de $H(s)$? Há algum zero em $H(s)$?
2. A resposta em frequência está definida? Em caso afirmativo, determine $y_{ss}(t)$ para $x(t) = 2 \cos(10t)u(t)$.
3. Identifique $H(s)$.

$$1. H(s) = \frac{100}{(s + 0.2)(s + 50)}$$

$$2. H(s) = \frac{0.6(s + 5)}{(s + 0.1)(s + 300)}$$

$$3. H(s) = \frac{100(s + 400)}{s(s + 10)}$$