Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC
Departamento de Automação e Sistemas – DAS
Prof. Hector Bessa Silveira
E-mail: hector.silveira@ufsc.br
Website: http://hector.paginas.ufsc.br

DAS 5142 – Sistemas Dinâmicos

2016/1

Sumário

1 Lab 1 – Simulação de Sistemas Lineares e Não-Lineares

Objetivos

Primeiramente, vamos apresentar certos conceitos fundamentais sobre sistemas: sistemas dinâmicos, variáveis de estados, linearidade, invariância no tempo e modelo em espaço de estado. Na sequência, veremos exemplos de como modelar, simular, e analisar sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.

1.1 Conceitos Fundamentais

Sistema: é uma entidade em que as variáveis de saída são alterados pelas variáveis de entrada (controles). Ex: motores elétricos, veículos, aeronaves, ecossistemas.

Sistema dinâmico (ou com memória): quando ao menos uma das variáveis de saída do sistema no instante t **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro de certas variáveis de entrada.

Sistemas dinâmicos SISO, SIMO e MIMO: vamos considerar sistemas dinâmicos que apresentam m variáveis de entrada $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ e p variáveis de saída $y_1(t),\ldots,y_p(t)$. Quando $m = p = 1$, dizemos que o sistema é **SISO** (Single-Input Single-Output). Quando $m = 1$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **SIMO** (Single-Input Multi-Output). Quando $m \geq 2$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **MIMO** (Multi-Input Multi-Output). Denominamos $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ de **vetor de entrada** (ou **vetor de controle**) e $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ de **vetor de saída**.

Vetor de estado de um sistema dinâmico: o **vetor de estado** $x(t_0) = (x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ (ou, simplesmente, **estado**) de um sistema dinâmico no instante de tempo $t_0 \geq 0$ é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento do vetor de entrada $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$ (futuro), determina um **único** vetor de saída $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro das saídas, não importa a maneira como o sistema atingiu o vetor de estado $x(t_0)$, ou seja, $x(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0. Assim,

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0), \\ u(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y(t),\ t \geq t_0.$$

Dizemos que $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ é o **estado inicial** (ou a **condição inicial**) do sistema no **instante inicial** $t_0 \geq 0$. Denominamos $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de **variáveis de estado** do sistema, e dizemos que o sistema é de **ordem** n ($n = 1$ é primeira ordem, $n = 2$ é segunda ordem, etc).

Em muitos sistemas dinâmicos, escolhemos as **variáveis de estado** como sinais que correspondem aos **elementos armazenadores de energia** no sistema. Por exemplo, em **circuitos elétricos**, as **variáveis de estado** são: as **tensões nos capacitores** (energia armazenada no campo elétrico) e as **correntes dos indutores** (energia armazenada no campo magnético).

De agora em diante, todos os sistemas que trataremos serão dinâmicos. Desse modo, para simplificar, quando dizemos **sistema**, estaremos sempre nos referindo a um **sistema dinâmico**.

1.1.1 Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

• **Linear**: quando o sistema satisfaz ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

(Princípio da Superposição) Se

$$\left.\begin{array}{l} x_a(t_0), \\ u_a(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y_a(t),\ t \geq t_0, \qquad \left.\begin{array}{l} x_b(t_0), \\ u_b(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y_b(t),\ t \geq t_0,$$

então,

$$\left.\begin{array}{l} x_c(t_0) = k_1 x_a(t_0) + k_2 x_b(t_0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq t_0.$$

Ao tomarmos $k_1 = k_2 = 0$ na condição acima, concluímos que todo sistema linear satisfaz:

$$\boxed{x(t_0) = 0,\ u(t) = 0, t \geq t_0\} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0}.$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x(t_0) = 0,\ u(t) = 0, t \geq t_0\} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0$.

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando $u(t) = 0, t \geq t_0$:

$$\boxed{x(t_0),\ u(t) = 0, t \geq t_0\} \longrightarrow y_0(t), t \geq t_0}.$$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando $x(t_0) = 0$:

$$\boxed{x(t_0) = 0,\ u(t), t \geq t_0\} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0}.$$

Concluímos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um **sistema linear** é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\boxed{\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}}$$

Propriedade de Decomposição.

• **Não-Linear**: quando o sistema não é linear.

Importante! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $u(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois o princípio da separação não é satisfeito. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico "Linearização de Sistemas Não-Lineares".

1.1.2 Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico por exemplo sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

• **Invariante no tempo**: quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = v_0, \\ u(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y(t),\ t \geq t_0,$$

então,

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}(t_0+T) = v_0, \\ \bar{u}(t) = u(t-T),\ t \geq t_0+T \end{array}\right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t-T),\ t \geq t_0+T.$$

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

• **Variante no tempo**: quando não é invariante no tempo.

1.2 Modelo em Espaço de Estado

Modelo em espaço de estado: é a modelagem matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e as entradas do sistema dinâmico por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado), e que determina as relações entre as saídas, as variáveis de estado e as entradas por equações algébricas (uma para cada saída).

Por exemplo, se $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))' \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_p(t))' \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, então o modelo em espaço de estado do sistema dinâmico é dado por:

$$\begin{aligned}
dx_1(t)/dt &= f_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t),\\
&\vdots\\
dx_n(t)/dt &= f_n(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t),\\
y_1(t) &= h_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t),\\
&\vdots\\
y_p(t) &= h_p(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t),
\end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\begin{aligned}
dx(t)/dt &= f(x(t),u(t),t)\\
y(t) &= h(x(t),u(t),t)
\end{aligned}$$

onde $f_1(x,u,t),\ldots,f_n(x,u,t),h_1(x,u,t),\ldots,h_p(x,u,t)\in\mathbb{R}$ e

$$f(x,u,t)=(f_1(x,u,t),\ldots,f_n(x,u,t))'\in\mathbb{R}^n,$$
$$h(x,u,t)=(h_1(x,u,t),\ldots,h_p(x,u,t))'\in\mathbb{R}^p.$$

Veremos mais adiante que:

• Todo sistema modelado por

$$dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t),$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t),$$

é **linear e invariante no tempo**, onde $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ (matriz $n\times m$), $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ (matriz $p\times n$) e $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$ (matriz $p\times m$) são **matrizes constantes**.

• Todo sistema modelado por

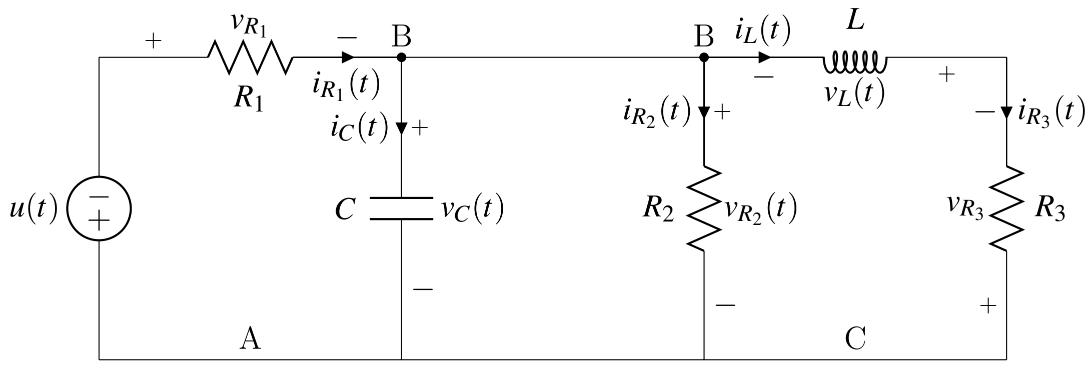
$$dx(t)/dt=f(x(t),u(t)),$$
$$y(t)=h(x(t),u(t)),$$

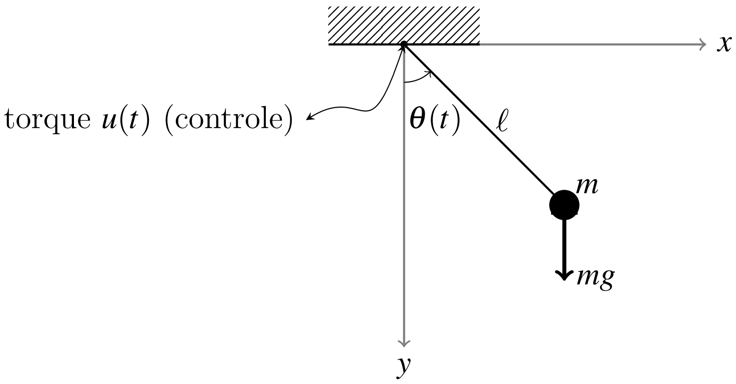
é **invariante no tempo**, onde f: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ e h: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ são aplicações continuamente diferenciáveis.

1.3 Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exemplo 1: Sistema elétrico – circuito elétrico

Exemplo 2: Sistema mecânico – pêndulo simples





1.4 Procedimentos

1. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema elétrico do Exemplo 1. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações. Dica: verifique o princípio da superposição com $u(t) = 0$, $u(t) = 1$ e $u(t) = \sin(t)$.

2. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema mecânico do Exemplo 2. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações com $\ell = 1$, $g = 9.8$, e $k = 0.5$, $k = 0$. Dica: teste o princípio da superposição para $u(t) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ e com $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi$.

3. No item anterior, justifique o comportamento observado (solução constante) com $\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$ quando $u(t) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$. Existe mais alguma outra solução constante? Justifique sua resposta.

2 Lab 2 – Introdução ao Problema de Rastreamento de Saída

Objetivos

Vamos introduzir o problema de rastreamento de saída para um motor CC e determinar uma realimentação de estado que soluciona tal problema de controle. Em seguida, veremos como implementar a realimentação de estado por diagrama de blocos. Por fim, iremos analisar os resultados de simulação obtidos para diversas saídas de referência.

2.1 Rastreamento de Saída de um Motor CC

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u,\\ y(t) &= x_1(t),\end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). O objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a rastrear assintoticamente uma saída de referência $\overline{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}[y(t) - \overline{y}(t)] = 0,$$

onde $\overline{y}$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua).

2.2 Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Considere a **realimentação de estado** $u = \alpha(x_1, x_2, t)$:

$$u = \alpha(x_1,x_2,t) \triangleq x_2 + \ddot{\overline{y}}(t) - k_1[x_1 - \overline{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\overline{y}}(t)],$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem escolhidos. Note que o controle $u(t)$ ao longo do tempo $t \geq 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) = \alpha(x_1(t), x_2(t), t) &= x_2(t) + \dddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \dddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \dddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{termo\ PD!}, \end{aligned}$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento da saída.

Ao substituirmos a realimentação de estado $u = \alpha(x_1, x_2, t)$ acima no modelo do motor, encontramos a dinâmica em **malha-fechada**:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \dddot{\bar{y}}(t) - k_1 \overbrace{[x_1(t) - \bar{y}(t)]}^{e(t)} - k_2 \overbrace{[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)]}^{\dot{e}(t)}, \quad y = x_1.$$

Desse modo,

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dddot{\bar{y}}(t) - k_1 e(t) - k_2 \dot{e}(t),$$

ou seja,

$$\ddot{e}(t) + k_2 \dot{e}(t) + k_1 e(t) = 0. \qquad \text{(EDO Linear Homogênea!)}$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2 s + k_1 = 0.$$

Agora, suponha que os pólos (estáveis!) de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (partes reais negativas!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2 s + k_1 = (s - p_1)(s - p2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}_{\text{polinômio característico de MF}}$$

ou seja, escolhemos $\boxed{k_2 = -(p_1 + p_2),\ k_1 = p_1 p_2}$.

Concluímos então que, com tais escolhas de $u = \alpha(x_1, x_2, t)$, k_1 e k_2, garantimos que

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(t_0), x_2(t_0)$, $t_0 \geq 0$, resolvendo assim o **problema de rastreamento de saída** através de uma **realimentação de estado** adequada.

Ao longo do curso, vamos generalizar as ideias acima para sistemas MIMO lineares e não-lineares.

2.3 Procedimentos

1. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o motor CC considerado. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo?

2. Agora, implemente a realimentação de estado $u = \alpha(x_1, x_2, t)$ projetada que soluciona o problema de rastreamento de saída. Considere que:

1. $\bar{y}(t) = 1$, $t \geq 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$;

2. $\bar{y}(t) = 2(1 - e^{-t})$, $t \geq 0$, $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$;

3. $\bar{y}(t) = 3\sin(5t)$, $t \geq 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Em cada um dos casos acima, analise os resultados de simulação obtidos (saída, controle e erro) para uma escolha de pólos "rápidos" e "lentos" da dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada. Note que, nos dois primeiros casos acima, a dinâmica do erro de rastreamento é idêntica. Isto era esperado? Justifique sua resposta.

3. Repita o item acima para: $\bar{y}(t) = \cos(t^2)$, $t \geq 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$. É possível implementarmos a lei de controle projetada neste caso? Isto era esperado? Justifique sua resposta.

3 Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Relembre do Lab 1 que o modelo em espaço de estado (ou, simplesmente, **modelo de estado**) de um sistema dinâmico tem a seguinte forma:

$$dx(t)/dt = f(x(t), u, t),$$
$$y(t) = h(x(t), u, t),$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada (controle), $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, e $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $h = (h_1, \ldots, h_p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ são aplicações (vetoriais). A primeira equação do modelo de estado acima é denominada de **equação de estado** e, a segunda, de **equação de saída**.

Definição: A **bola aberta** centrada em $x \in \mathbb{R}^n$ e de raio (finito) $\delta > 0$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$B(x, \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \delta\},$$

onde $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \cdots + w_n^2}$ é a **norma euclidiana** do vetor $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** (em $\mathbb{R}^n$) se, para todo $x \in D$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset D$.

Exemplos:

1. A reta real $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$;
2. Todo intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$;
3. O conjunto $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Propriedade:

Os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^n$:

1. O próprio $\mathbb{R}^n$ e o conjunto vazio ϕ;
2. Toda bola aberta $B(x, \delta)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$;
3. A união **arbitrária** de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$;
4. A intersecção **finita** de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$.

Em várias situações práticas, a aplicação f que determina a equação de estado $dx(t)/dt = f(x, u, t)$ não pode ser definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $f(x, u, t) = t^2 u + 1/x \in \mathbb{R}$

($n = 1$), então f só está definida para $x \neq 0$. Logo, o domínio de f é $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ é aberto. Note que D é de fato aberto, pois $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (união de dois abertos).

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos supor que, no modelo de estado, f e h não dependem do tempo t:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u), \\ y(t) &= h(x(t), u), \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, f: $D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e h: $D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Exemplo (Motor CC): Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u, \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assim, $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado e

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u) = (x_2(t), -x_2(t) + u), \\ y(t) &= h(x(t), u) = x_1(t). \end{aligned}$$

O motor CC pode ser controlado tanto em malha-aberta quanto em malha-fechada. Por exemplo, podemos escolher:

- Malha-aberta: $u = \alpha(t) \triangleq \sin(t)$;
- Malha-fechada (realimentação): $u = \alpha(x, t) \triangleq \overbrace{k(r(t) - x_1)}^{controlador\ P}$, onde $r(t) = t$ (rampa) e $k > 0$ é um ganho a ser ajustado.

Substituindo os controles acima no modelo do motor, obtemos:

- Malha-aberta:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = \big(x_2(t), -x_2(t) + \sin(t)\big) \triangleq \overline{f}(x(t), t), \\ y(t) &= h(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = x_1(t) \triangleq \overline{h}(x(t), t). \end{aligned}$$

- Malha-fechada:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = \big(x_2(t), -x_2(t) + kt - kx_1(t)\big) \triangleq \widehat{f}(x(t), t), \\ y(t) &= h(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = x_1(t) \triangleq \widehat{h}(x(t), t). \end{aligned}$$

Note que, em ambos os casos (malha-aberta e malha-fechada), o modelo de estado resultante é da forma:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= \widetilde{f}(x(t),t), \\ y(t) &= \widetilde{h}(x(t),t). \end{aligned}$$

Considere o seguinte modelo de estado

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,u), \\ y &= h(x,u), \end{aligned}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $f\colon D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $h\colon D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(x,t)$, onde $\alpha\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação (vetorial). Assim, o sistema resultante é da forma:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,\alpha(x,t)) \triangleq \widehat{f}(x,t), \\ y &= h(x,\alpha(x,t)) \triangleq \widehat{h}(x,t), \end{aligned}$$

com $\widehat{f}\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $\widehat{h}\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^p$. Note que:

- Quando $u = \alpha(t)$, então temos controle em malha-aberta (por exemplo, $u = 0$ ou $u = \sin(t)$);
- Quando $u = \alpha(x,t)$, então temos controle por realimentação de estado (malha-fechada).

Desse modo, podemos restringir o nosso estudo a equações de estado dadas por (voltaremos a considerar a equação de saída mais adiante)

$$dx/dt = f(x,t),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. Tal equação de estado é denominada de **não-forçada**, e o sistema é chamado **não-autônomo**. Ressaltamos que esta equação de estado pode corresponder tanto a sistemas em malha-aberta ($u = \alpha(t)$) quanto a sistemas em malha-fechada ($u = \alpha(x,t)$).

Quando

$$dx/dt = f(x),$$

ou seja, a aplicação $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ não depende do tempo t, dizemos que o sistema é **autônomo**.

Vamos agora analisar sistemas descritos por EDO's da forma (equação de estado)

$$dx/dt = f(x,t),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. Denominamos f de **campo de vetores** dependente do tempo (fixado $t \geq 0$, para cada vetor $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ a aplicação f associa o vetor $f(x,t) \in \mathbb{R}^n$).

Estamos considerando que a equação de estado acima modela um sistema dinâmico real em que foi fixada uma entrada $u = \alpha(x,t)$, $x \in D$, $t \geq 0$. Em um sistema dinâmico real, temos que, para cada condição inicial $x(t_0) \in D$ no instante inicial $t_0 \geq 0$, existe uma única solução $x(t)$, para $t \geq t_0$. Concluímos assim que o modelo acima deve preservar esta propriedade. Portanto, temos que determinar condições que o campo de vetores f do modelo deve satisfazer de modo a preservar a existência e unicidade de soluções do sistema real.

Considere a EDO

$$dx/dt = f(x,t), \qquad (\star)$$

onde $f\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**.

Definição: Seja $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$. Dizemos que uma curva diferenciável $x\colon J \to D$ é uma **solução** de $(\star)$ com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ no instante inicial $t_0 \geq 0$, se $J \subset [0,\infty)$ é um intervalo contendo t_0 e $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$, para todo $t \in J$. Dizemos que tal solução $x\colon J \to D$ (com $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0) é **maximal** se, para qualquer outra solução $\bar{x}\colon \bar{J} \to D$ de $(\star)$ com condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0, temos que $\bar{J} \subset J$ e $\bar{x}(t) = x(t)$, para todo $t \in \bar{J}$.

Obs: Note que, **caso** uma solução **maximal exista**, então ela é **única** no seguinte sentido: se $x\colon J \to D$ e $\bar{x}\colon \bar{J} \to D$ são soluções maximais de $(\star)$ com as mesmas condições iniciais $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$ em t_0, então $J = \bar{J}$ e $x(t) = \bar{x}(t)$, para $t \in J = \bar{J}$.

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções: Suponha que $f\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) são contínuas na EDO $(\star)$ acima. Então, dados $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, **existe** uma **única** solução maximal $x\colon J \subset [0,\infty) \to D$ com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0, que por sua vez só depende da restrição do domínio de f ao subconjunto $D \times J \subset D \subset [0,\infty)$.

Em particular, se $\bar{x}\colon \bar{J} \subset [0,\infty) \to D$ é uma solução de $(\star)$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0, então tal solução é **única** no seguinte sentido: se $\tilde{x}\colon \tilde{J} \subset [0,\infty) \to D$ é uma outra solução de $(\star)$ com a mesma condição inicial $\tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0, então $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t)$, para $t \in \bar{J} \cap \tilde{J}$. Por este motivo, dizemos que $\bar{x}\colon \bar{J} \subset [0,\infty) \to D$ é **a solução** de $(\star)$ **no intervalo** $\bar{J}$ para a condição inicial $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$ em t_0.

Obs 1: Relembre que (aqui, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto):

- Uma aplicação (vetorial) $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é contínua **se e somente se** cada função coordenada $f_j\colon D \times \mathbb{R}^m \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é contínua, $j = 1, \ldots, n$;

- A soma, diferença, produto, divisão (com quociente não-nulo) e composição de funções contínuas é uma função contínua;

- Dada uma aplicação f: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$, temos que $\partial f/\partial x$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) é contínua **se e somente se** as derivadas parciais $\partial f_j/\partial x_k$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ existem e são contínuas, para $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n$;

- Uma aplicação f: $D\to\mathbb{R}^n$ é denominada de **classe C^1** quando $\partial f/\partial x$: $D\to\mathbb{R}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$ (matriz jacobiana) é contínua, ou seja, quando as derivadas parciais $\partial f_j/\partial x_k$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ existem e são contínuas, para $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n$.

Obs 2: Suponha que na EDO ($\star$) acima, o campo de vetores f não depende do tempo t, ou seja, $dx/dt=f(x)$, onde f: $D\to\mathbb{R}^n$ é de classe C^1. Então, as hipóteses do teorema anterior são atendidas, pois f: $D\to\mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x$: $D\to\mathbb{R}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$ são contínuas. Neste caso, pode-se verificar que: dados $x_0\in D$, $t_0\geq 0$ e $T\in\mathbb{R}$ tal que $t_0+T\geq 0$, se x: $J=[t_0,b)\to D$ é a solução de $dx/dt=f(x)$ no intervalo $J=[t_0,b)$ para a condição inicial $x(t_0)=x_0$ no instante inicial $t=0$, então $\overline{x}$: $\overline{J}=[t_0+T,b+T)\to D$ definida por $\overline{x}(t)=x(t-t_0)$, para $t\in\overline{J}$, é a solução de $dx/dt=f(x)$ no intervalo $\overline{J}=[t_0+T,b+T)$ para a condição inicial $\overline{x}(t_0+T)=x(t_0)=x_0$ em t_0+T, onde $t_0<b\leq\infty$. Por este motivo, dizemos que um sistema **autônomo** modelado por $dx/dt=f(x)$ é **invariante no tempo**, e **sempre podemos considerar que** $t_0=0$.

Obs 3: Considere a equação de estado

$$dx/dt=f(x,u),$$

onde $x\in D$ é o vetor de estado, $D\subset\mathbb{R}^n$ é aberto, $u\in\mathbb{R}^m$ é vetor de controle e f: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é de classe C^1, ou seja, $\partial f/\partial x$: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial u$: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ são aplicações contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u=\alpha(x,t)$, onde α: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ e $\partial\alpha/\partial x$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ são aplicações contínuas. Então, o sistema resultante é dado por

$$dx/dt=\overline{f}(x,t)\triangleq f(x,\alpha(x,t)),$$

com $\overline{f}$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ e $\partial\overline{f}/\partial x$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ contínuas pela regra da cadeia. Logo, o sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior.

Obs 4: Considere o modelo de estado

$$dx/dt=f(x,u),\qquad y=h(x,u),$$

onde $x\in D$ é o vetor de estado, $D\subset\mathbb{R}^n$ é aberto, $u\in\mathbb{R}^m$ é vetor de controle, $y\in\mathbb{R}^p$ é o vetor de saída e h: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$. Assuma que as aplicações f: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x$: $D\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ são contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma $u=\alpha(t)$, onde α: $[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ é contínua. Então, a equação de estado do sistema resultante é dada por

$$dx/dt=\widetilde{f}(x,t)\triangleq f(x,u(t)),$$

com $\widetilde{f}$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ e $\partial\widetilde{f}/\partial x$: $D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$ contínuas. Logo, a equação de estado do sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Portanto, dados $x_{t_0}\in D$ e

$t_0 \geq 0$, existe uma **única** solução x: $J = [t_0, b) \to D$ no intervalo $J = [t_0, b)$ para a condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0, que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$, onde $t_0 < b \leq \infty$.

Em particular, escolhida uma entrada contínua $u(t) = \alpha(t)$, $t \geq 0$, para o modelo de estado anterior

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,u), \\ y &= h(x,u), \end{aligned}$$

e dada uma condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ em $t_0 \geq 0$, existe uma **única** saída $y(t) = h(x(t), u(t))$, $t \in J = [t_0, b)$, que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$. Logo, tal modelo de estado está de acordo com a definição de **vetor de estado de um sistema dinâmico** vista no Lab 1:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \in D, \\ u(t) = \alpha(t),\ t \in J = [t_0, b) \end{array}\right\} \longrightarrow y(t),\ t \in J = [t_0, b).$$

Ainda no modelo de estado anterior

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,u), \\ y &= h(x,u), \end{aligned}$$

suponha que escolhemos uma entrada da forma $u = \alpha(t)$, onde α: $[0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ é contínua. Então, o modelo de estado do sistema resultante é dado por

$$dx/dt = \widetilde{f}(x,t) \triangleq f(x, u(t)), \quad y = h(x, u(t)),$$

com $\widetilde{f}$: $D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ e $\partial \widetilde{f}/\partial x$: $D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ contínuas. Sejam $x_0 \in D$, $t_0 \geq 0$ e $T \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + T \geq 0$. Defina $\overline{u}(t) = u(t - T) = \alpha(t - T)$, para $t \geq t_0 + T$. Considere o modelo de estado

$$dx/dt = \overline{f}(x,t) \triangleq f(x, \overline{u}(t)), \quad \overline{y} = h(x, \overline{u}(t)),$$

onde $\overline{f}$: $D \times [t_0 + T, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

Pode-se verificar que, se x: $J = [t_0, b) \to D$ é a solução de $dx/dt = \widetilde{f}(x,t) = f(x, u(t))$ no intervalo $J = [t_0, b)$ para a condição inicial $x(t_0) = x_0$ em t_0, onde $t_0 < b \leq \infty$, então:

1. $\overline{x}$: $\overline{J} = [t_0 + T, b + T) \to D$ definida por $\overline{x}(t) = x(t - t_0)$, para $t \in \overline{J}$, é a solução de $dx/dt = \overline{f}(x,t) \triangleq f(x, \overline{u}(t))$ no intervalo $\overline{J} = [t_0 + T, b + T)$ para a condição inicial $\overline{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$ em $t_0 + T$;

2. Para o sistema resultante, existe uma **única** saída $y(t) = h(x(t), u(t))$, $t \in J = [t_0, b)$, que por sua vez só depende da entrada $u(t) = \alpha(t)$, para $t \in J = [t_0, b)$. E, além disto, a saída $\overline{y}(t) = h(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ é **única**, satisfaz $\overline{y}(t) = y(t - T)$ e só depende da entrada $\overline{u}(t) = u(t - T)$, para $t \in \overline{J}$.

Portanto, mostramos que o modelo de estado considerado

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,u), \\ y &= h(x,u), \end{aligned}$$

corresponde a um sistema **invariante no tempo** no sentido da definição vista no Lab 1:

Se

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0, \\ u(t) = \alpha(t),\ t \in J = [t_0, b), \end{array}\right\} \longrightarrow y(t),\ t \in J = [t_0, b),$$

então,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x}(t_0+T) = x_0, \\ \overline{u}(t) = u(t-T),\ t \in \overline{J} = [t_0+T, b+T), \end{array}\right\} \longrightarrow \overline{y}(t) = y(t-T),\ t \in \overline{J}.$$

Desse modo, em tais modelos de estado **sempre podemos considerar** que $t_0 = 0$.

Obs 5: Os resultados das **Obs 3 e 4** acima permanecem válidos quando a entrada $u(t) = \alpha(t)$, $t \geq 0$, é **contínua por partes**.

Exemplo 1 (não-unicidade de soluções): Considere a EDO

$$\dot{x} = 3x^{2/3} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $t_0 = 0$ o instante inicial. Note que $x(t) = 0$, $t \geq 0$, é uma solução desta EDO com condição inicial $x(0) = 0$ em $t_0 = 0$. E, dado $c > 0$, observe que $x_c(t)$, $t \geq 0$, definida por

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq c, \\ (t-c)^3, & \text{se } t > c, \end{cases}$$

também é solução desta EDO com condição inicial $x(0) = 0$. Logo, existem infinitas soluções da EDO acima quando a condição inicial é nula em $t_0 = 0$ (e não existe solução maximal com $x(0) = 0$!).

Portanto, um modelo descrito por esta EDO não permite determinar (prever) a solução do sistema real quando a condição inicial é nula. Isto ocorre, por exemplo, se aplicamos a realimentação $u = 3x^{2/3}/(\cos(x)+2)$ em um sistema modelado por $\dot{x} = \overline{f}(x,u) = \big(\cos(x)+2\big)u$.

Note que, apesar da função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da EDO acima ser contínua, f não é diferenciável em $x = 0$ e, portanto, não satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções.

Exemplo 2 (tempo de escape finito): Considere a EDO

$$\dot{x} = 1 + x^2 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note que $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável e, assim, as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções são satisfeitas para f. Seja $t_0 = 0$. Note que $x(t) = \tan(t)$, para $0 \leq t < \pi/2$, é uma solução desta EDO para a condição inicial $x(0) = 0$ em

$t_0 = 0$ (e, assim, é **a** solução no intervalo $J = [0, \pi/2)$ para $x(0) = 0$ em $t_0 = 0$). Observe que

$$\lim_{t \to \pi/2} x(t) = +\infty \quad \text{(tempo de escape finito em } t_e = \pi/2\text{)}.$$

Desse modo, **a** solução maximal com condição inicial nula em $t_0 = 0$ não pode estar definida no instante $t_e = \pi/2$ e, portanto, concluímos que $x(t) = \tan(t)$, para $t \in J = [0, \pi/2)$, é **a** solução maximal quando a condição inicial é nula em $t_0 = 0$.

Definição: Suponha que f: $D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ e $\partial f/\partial x$: $D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ são aplicações contínuas. Dizemos que o campo de vetores f da EDO $dx/dt = f(x,t)$ é **completo** se, para quaisquer $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, temos que **a** solução maximal correspondente x: $J \to D$ (com $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0) é tal que $J = [0, \infty)$, ou seja, cada solução maximal está definida para todo $t \in [0, \infty)$.

Teorema: Considere que o campo de vetores f: $D \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ da EDO $dx/dt = f(x,t)$ é completo. Denote por ϕ: $[0, \infty) \times D \times [0, \infty) \to D$ o **fluxo** associado ao campo de vetores f, ou seja, dados $x_{t_0} \in D$ e $t_0 \geq 0$, $\phi(\cdot; x_{t_0}, t_0)$: $[0, \infty) \to D$ é igual à solução maximal da EDO com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0}$ em t_0. Então, dados $x_{t_0} \in D$, $t_2, t_1, t_0 \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} &\phi(t_0; x_{t_0}, t_0) = x_{t_0}, \\ &\phi\big(t_2; \phi(t_1; x_{t_0}, t_0), t_1\big) = \phi(t_2; x_{t_0}, t_0). \end{aligned}$$

Em particular, temos que duas **soluções distintas** da EDO $dx/dt = f(x,t)$ **nunca podem se cruzar no mesmo instante de tempo**.

Prova (do resultado de cruzamento acima): Considere duas soluções distintas: x: $[0, \infty) \to D$ com condição inicial $x(t_0) = x_{t_0} \in D$ em $t_0 \geq 0$, e $\bar{x}$: $[0, \infty) \to D$ com condição inicial $\bar{x}(\bar{t}_0) = \bar{x}_{\bar{t}_0} \in D$ em $\bar{t}_0 \geq 0$. A demonstração é por contradição. Assim, suponha que existe $t_1 \geq 0$ tal que $\phi(t_1; x(t_0), t_0) = \phi(t_1; \bar{x}(t_0), \bar{t}_0)$, ou seja, as soluções se cruzam no instante de tempo t_1. Então, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) = \phi(t; x(t_0), t_0) &= \phi\big(t; \underbrace{\phi(t_1; x(t_0), t_0)}_{= \phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0)}, t_1\big), \\ &= \phi\big(t; \phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0), t_1\big) = \phi(t; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0) = \bar{x}(t), \end{aligned}$$

ou seja, as duas soluções são idênticas, o que contradiz a hipótese de que elas são distintas.

Obs: Considere um sistema autônomo da forma $dx/dt = f(x)$, onde f: $D \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1. Suponha que o campo de vetores f é completo. A partir do teorema acima e da **Obs 2** apresentada anteriormente, pode-se mostrar que as **órbitas desse sistema (autônomo!) nunca podem se cruzar no retrato de fase** (e cada órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo).

4 Lab 3 – Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Objetivos

Vamos introduzir o conceito de ponto de equilíbrio, rever certos resultados de Álgebra Linear, e classificar o comportamento qualitativo das soluções de sistemas lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz que determina a dinâmica do sistema.

4.1 Ponto de Equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em equilíbrio quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente esta noção.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f/\partial x\colon D \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Dizemos que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema acima **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

Demonstração: Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Então, a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ é a curva constante $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Logo, $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x^e)$, $t \geq 0$, ou seja, $f(x^e) = 0$. Agora, suponha que $x^e \in D$ é tal que $f(x^e) = 0$. Considere a curva constante $x\colon [0,\infty) \to D$ definida por $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Assim, $\dot{x}(t) = 0 = f(x^e) = f(x(t))$, $t \geq 0$, ou seja, mostramos que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é uma solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é **a** solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Teorema: Considere novamente o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ apresentado acima. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x} \in D$, então $\overline{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\overline{x}) = 0$.

4.1.1 Pontos de Equilíbrio do Pêndulo Simples

Exemplo 1: Considere o pêndulo simples do Lab 1 com $u = 0$ (sem controle)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 = f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado.

Para encontramos todos os pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in \mathbb{R}^2$ do pêndulo simples, resolvemos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^e, x_2^e) = x_2^e \ \Rightarrow \ x_2^e = 0, \\ 0 &= f_2(x_1^e, x_2^e) = -\frac{g}{l}\sin(x_1^e) - \frac{k}{m}x_2^e \ \Rightarrow \ \sin(x_1^e) = 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos de equilíbrio são $x_e = (x_1^e, x_2^e) = (\ell\pi, 0)$, com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Mas, como $x_1 = \theta$ (ângulo que o pêndulo forma com o eixo vertical), concluímos que o pêndulo simples apresenta apenas 2 pontos de equilíbrio: $(0,0)$ (pêndulo parado em baixo) e $(\pi, 0)$ (pêndulo parado em cima).

4.1.2 Pontos de Equilíbrio de Sistemas Lineares no Plano

Exemplo 2: Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Note que $f(x) = Ax$ é de classe C^1, pois $\partial f / \partial x = A$ é constante. Para encontrarmos os pontos de equilíbrio do sistema, devemos resolver $Ax^e = 0$. É evidente que $x_e = 0$ sempre é um ponto de equilíbrio. Relembre de Álgebra Linear que o conjunto $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ (**núcleo** de A) é um subespaço vetorial, e que $N(A) = \{0\}$ **se e somente se** $\det(A) \neq 0$. Logo:

- Se $\det(A) \neq 0$, então $x^e = (0,0)$ é o único ponto de equilíbrio;

- Suponha que $\det(A) = 0$ com $A \neq 0$. Então, o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio, pois o conjunto $N(A) \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão maior ou igual a 1. Em particular, se $n = 2$ (sistema de segunda ordem), então $N(A)$ é um subespaço vetorial de dimensão 1, ou seja, uma reta passando pela origem do plano x_1-x_2.

4.2 Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada não-nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Relembre que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Note que, como $v \neq 0$,

$$Av = \lambda v \;\Leftrightarrow\; (A-\lambda I)v = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in N(A-\lambda I) \;\Leftrightarrow\; \det(A-\lambda I) = 0,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz identidade. Denominamos $\det(A-\lambda I)$ de **polinômio característico** de A. Logo, os autovalores de A são as raízes reais do seu polinômio característico. No entanto, é possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Em tal caso, dizemos que A possui **autovalores complexos**.

Relembre, ainda, que toda matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determina o seguinte operador no $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$$

e que toda matriz quadrada invertível $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determina a seguinte mudança linear de coordenadas (mudança de base)

$$z = Tx$$

onde $x = (x_1,\dots,x_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas originais do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$, e $z = (z_1,\dots,z_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as novas coordenadas do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à nova base.

Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Temos então que A é a **representação** do operador no $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \widetilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n,$$

em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$, ou seja, $x = (x_1,\dots,x_n)'$ e $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas dos vetores x e $\widetilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha que $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível. Podemos então encontrar a matriz $\overline{A}$ que representa operador acima nas novas coordenadas $z = Tx$. Note que

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto x = T^{-1}z \mapsto \widetilde{x} = Ax = AT^{-1}z \mapsto \widetilde{z} = T\widetilde{x} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\overline{A}}z = \overline{A}z \in \mathbb{R}^n,$$

onde $z = Tx$ e $\widetilde{z} = T\widetilde{x} = TAx$ são as novas coordenadas dos vetores x e $\widetilde{x} = Ax$ em relação à nova base, respectivamente. Relembre que A e $\overline{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

4.3 Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Motivação: Considere a seguinte EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} = ax, \qquad x \in \mathbb{R},$$

onde a é um parâmetro real constante. Relembre que

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

com

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}, \quad e^{a \cdot 0} = 1.$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 = 0$, a solução desta EDO é dada por

$$x(t) = e^{at}x_0, \quad t \geq 0,$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 = ax(t), \quad t \geq 0.$$

Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Temos que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}.$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em $t_0 = 0$, a solução deste sistema é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0,$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t), \quad t \geq 0.$$

Relembre que $x^e = 0$ é sempre ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = Ax.$$

Portanto, se a condição inicial é $x_0 = x^e = 0$ em $t_0 = 0$, então a solução correspondente é $x(t) = x^e = 0$, $t \geq 0$.

De agora em diante, vamos considerar apenas sistemas de segunda ordem ($n = 2$), ou seja, sistemas em que a dinâmica evolui no plano. Nosso objetivo é analisar de maneira **qualitativa** o comportamento do sistema quando $x_0 \neq 0$. Por exemplo, caso $x_0 \neq 0$, queremos saber:

- Se as soluções convergem (retornam) assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ e, em tal caso, se isto se dá de maneira oscilatória ou não;

- Se as soluções oscilam de maneira periódica, sem convergirem ao ponto de equilíbrio $x^e = 0$;

- As soluções se afastam (divergem) do ponto de equilíbrio $x^e = 0$.

Ao invés de determinarmos as soluções de maneira **quantitativa** (analítica), tal análise **qualitativa** será realizada pelo esboço do **retrato de fase** do sistema (definido a seguir), o qual será determinado a partir dos autovalores da matriz A.

Dada uma condição inicial x_0, a **trajetória (ou órbita)** da solução corresponde $x(t)$, $t \geq 0$, é a curva no plano (parametrizada pelo tempo $t \geq 0$)

$$O_{x_0} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), \text{ para algum } t \geq 0\}.$$

Assim, as trajetórias do sistema exibem apenas o comportamento **qualitativo** do sistema. Por exemplo, uma trajetória O_{x_0} que é uma curva fechada no plano corresponde à uma solução oscilatória periódica. O **retrato de fase** do sistema é a união de todas as suas trajetórias (órbitas).

Para um sistema linear autônomo no plano ($n = 2$)

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $A \in \mathbb{R}^2$ é uma matriz quadrada não-nula, pode-se demonstrar que sempre existe $T \in \mathbb{R}^2$ invertível em que a matriz $\overline{A} = TAT^{-1}$ apresenta uma das seguintes formas (**forma canônica de Jordan** – veja o livro do Chen):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

No primeiro caso, λ_1, λ_2 os autovalores reais de A. No segundo caso e no terceiro, os autovalores reais de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. No último caso, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ são os autovalores complexos de A. Relembre que A e $\overline{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

Para determinarmos um esboço do retrato de fase do sistema, a ideia é:

1. Fazemos a mudança de coordenadas $z = Tx$, denominada de **coordenadas modais**;

2. Esboçamos o retrato de fase do sistema nas **coordenadas modais** $z = Tx$;

3. Voltamos às coordenadas originais por $x = T^{-1}z$, e esboçamos o retrato de fase na base canônica.

Seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema (nas coordenadas canônicas originais) para uma dada condição inicial x_0 em $t_0 = 0$. Defina $z(t) = Tx(t)$, $t \geq 0$ (solução nas coordenadas modais). Assim,

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\overline{A}} z(t).$$

Portanto, a solução do sistema nas coordenadas modais é dada por

$$z(t) = e^{\overline{A}t} z_0, \quad t \geq 0, \text{ com } z_0 = Tx_0$$

e, nas coordenadas originais é $x(t) = T^{-1}z(t)$, $t \geq 0$.

4.3.1 Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Neste caso,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\overline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\overline{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Desse modo:

1. Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó estável**;

2. Se $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, então $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó instável**;

3. Se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \infty$ e $\lim_{t\to\infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **sela**.

4.3.2 Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

Neste caso,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\overline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\overline{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\alpha t}\cos\beta t + z_{20} e^{\alpha t}\sin\beta t, \\ z_2(t) &= -z_{10} e^{\alpha t}\sin\beta t + z_{20} e^{\alpha t}\cos\beta t, \end{aligned}$$

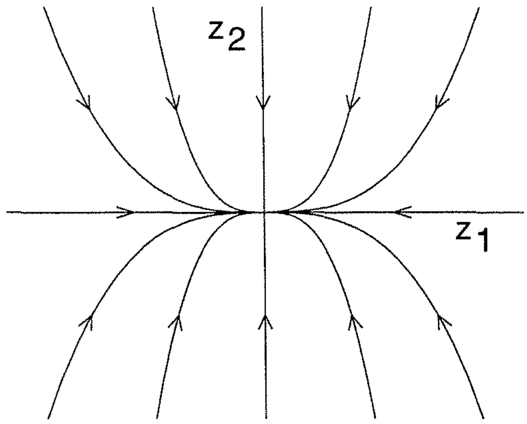


Figura 1 – Retrato de fase de um **nó estável** nas **coordenadas modais**.

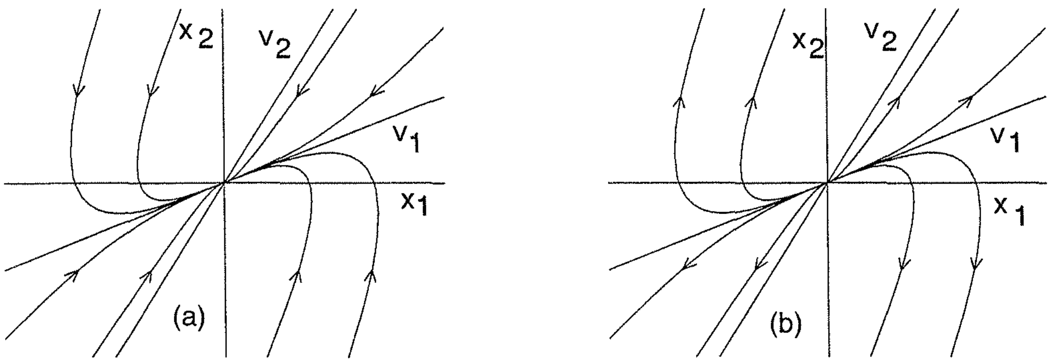


Figura 2 – Retrato de fase de um (a) **nó estável** e (b) **nó instável** nas **coordenadas originais**.

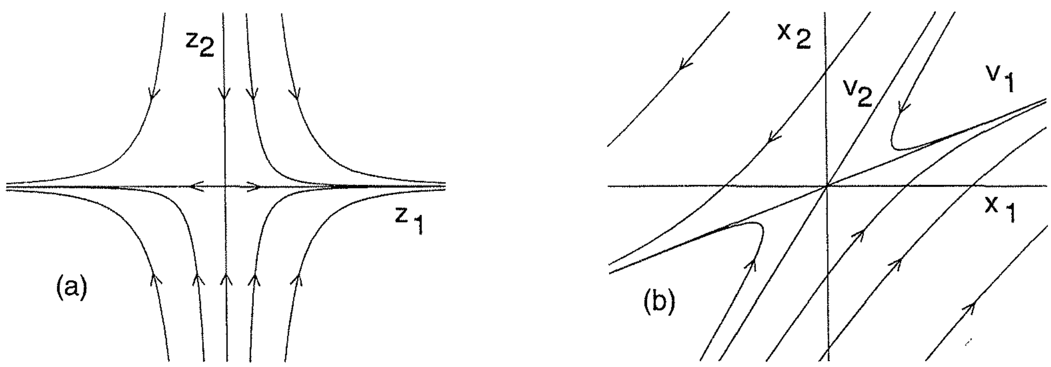


Figura 3 – Retrato de fase de uma **sela** (a) nas **coordenadas modais** e (b) nas **coordenadas originais**.

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Passando para coordenadas polares

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(z_2/z_1),$$

obtemos que

$$r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)} = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \tan^{-1}\left(z_2(t)/z_1(t)\right) = \theta_0 + \beta t,$$

onde $r_0 = \sqrt{z_{10}^2 + z_{20}^2}$ e $\theta_0 = \tan^{-1}(z_{20}/z_{10})$.

Desse modo:

1. Se $\alpha < 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ converge assintoticamente em espiral para a origem do plano z_1-z_2, com frequência (angular) de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **foco estável**;

2. Se $\alpha > 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ se afasta (diverge) em espiral da origem do plano z_1-z_2, com frequência de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **foco instável**;

3. Se $\alpha = 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ oscila periodicamente com frequência $\beta > 0$, sendo que a amplitude é determinada pelas condições iniciais z_{10}, z_{20}. Neste caso, as trajetórias das soluções $z(t)$ são círculos centrado na origem do plano z_1-z_2, e denominamos $x^e = 0$ de **centro**.

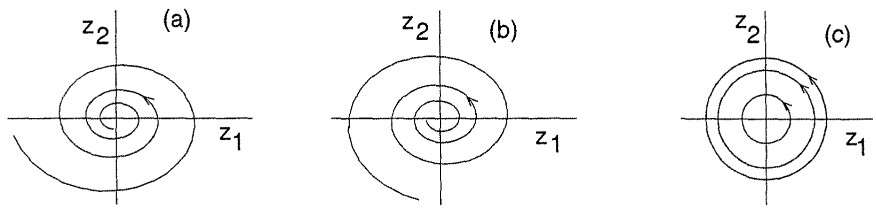


Figura 4 – Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas modais**.

4.3.3 Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Neste caso, temos duas situações:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Na primeira situação,

$$e^{\overline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

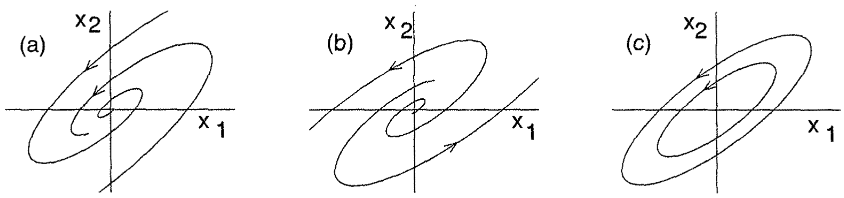


Figura 5 – Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas originais**.

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t},$$
$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t},$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Desse modo:

1. Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \to \infty} z_1(t) = \lim_{t \to \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) estável**;

2. Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \to \infty} z_1(t) = \lim_{t \to \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) instável**.

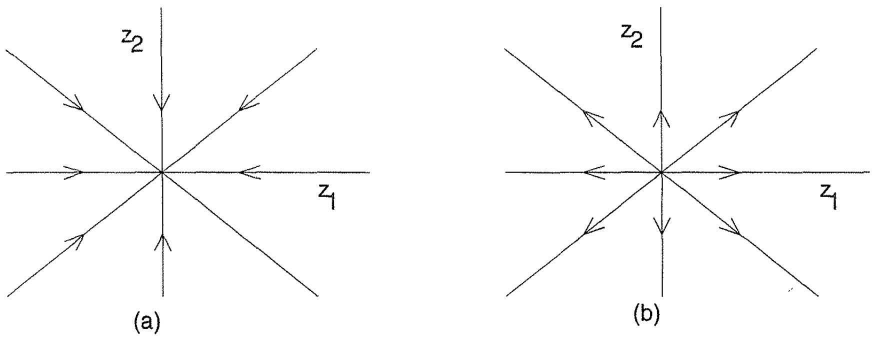


Figura 6 – Retrato de fase de um (a) **nó (ou estrela) estável** e (b) **nó (ou estrela) instável** nas **coordenadas modais**.

Por fim, na segunda situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t},$$
$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t},$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Desse modo:

1. Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (impróprio) estável**;

2. Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (impróprio) instável**.

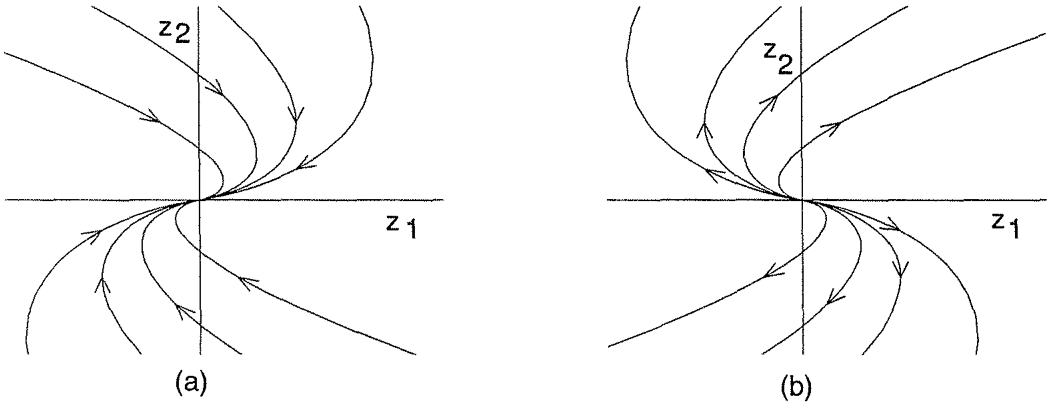


Figura 7 – Retrato de fase de um (a) **nó (impróprio) estável** e (b) **nó (impróprio) instável** nas **coordenadas modais**.

4.4 Resumo

Considere um sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax.$$

Com base nos autovalores λ_1, λ_2 da matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, obtemos a seguinte classificação do ponto de equilíbrio $x^e = 0$:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), nó instável ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$), sela ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$);

2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \neq 0$: foco estável ($\alpha < 0$), foco instável ($\alpha > 0$), centro ($\alpha = 0$);

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda < 0$), nó instável ($\lambda > 0$).

Importante: como em todos os casos acima a matriz A não possui autovalores nulos, concluímos que $\det(A) \neq 0$, ou seja, $x^e = 0$ é o **único** ponto de equilíbrio do sistema.

4.5 Procedimentos

1. Comprove por simulação que $x^e = (0,0)$ e $x^e = (\pi,0)$ são realmente pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Verifique também que o pêndulo simples é não-linear. Dica: simule o pêndulo para a condição inicial $x(0) = (\pi/2,0)$.

2. Considere o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax.$$

Para cada um dos casos abaixo, classifique o ponto de equilíbrio $x^e = 0$, esboce a retrato de fase com base nos autovalores de A, e determine o retrato de fase por simulação para diversas condições iniciais. Dica: utilize o pacote **pplane** do Matlab.

1. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix};$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix};$$

3. $$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

5. $$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

6. $$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

5 Lab 4 – Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano

Objetivos

Vamos introduzir o conceito de estabilidade estrutural e classificar o comportamento qualitativo local do retrato de fase de sistemas não-lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz do sistema linearizado.

5.1 Estabilidade Estrutural

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz quadrada. Definimos a **norma euclidiana** de A por $\|A\| = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n} a_{ij}^2}$. Temos o seguinte resultado da Teoria de Perturbação de Matrizes:

Proposição (Continuidade dos Autovalores): Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz quadrada. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz constante) satisfaz $\|\Delta A\| < \delta$, então a distância entre autovalores das matrizes $A+\Delta A$ e A é menor que ε, ou seja, $|\lambda(A+\Delta A) - \lambda(A)| < \varepsilon$.

Considere o sistema linear autônomo no plano (**sistema nominal**)

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ é o vetor (coluna) de estado e os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ são **distintos e não-nulos**, e o **sistema perturbado**

$$\dot{x} = (A+\Delta A)x,$$

onde $\Delta A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz **constante**.

Concluímos assim da proposição acima que, para **pequenas perturbações ΔA, a estabilidade e o tipo do ponto de equilíbrio $x^e = 0$ são preservados**. Mais precisamente, se o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema nominal** $\dot{x} = Ax$ é do tipo **nó estável** (os autovalores de A são reais e negativos), **nó instável** (reais e positivos), **sela** (A possui um autovalor negativo e outro positivo), **foco estável** (os autovalores de A são complexos conjugados com parte real negativa), **foco instável** (complexos conjugados com parte real positiva), então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema perturbado** $\dot{x} = (A+\Delta A)x$ será do tipo **nó estável**, **nó instável**, **sela**, **foco estável** ou **foco instável**, respectivamente.

Dizemos que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Assim, sistemas lineares no plano da forma

$\dot{x} = Ax$ são estruturalmente estáveis quando $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo nó (com autovalores distintos), sela ou foco.

Importante: Não há estabilidade estrutural quando o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema nominal $\dot{x} = Ax$ é do tipo centro (i.e. a matriz A possui autovalores complexos conjugados com parte real nula). Por exemplo, considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda_{1,2} = \pm j).$$

Assim, para

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

temos que os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ são $\lambda_{1,2} = \mu \pm j$. Portanto, se $\mu > 0$, então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema perturbado será do tipo foco instável e, se $\mu < 0$, será do tipo foco estável. Desse modo, o comportamento qualitativo do retrato de fase do sistema nominal não é preservado sob pequenas perturbações no campo de vetores $f(x) = Ax$.

5.2 Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Considere um sistema não-linear da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e f: $D \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (i.e. $\partial f / \partial x$: $D \to \mathbb{R}^{n \times n}$ é contínua). Suponha que $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e) = 0$.

A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio x^e é dada por

$$f(x) = \underbrace{f(x^e)}_{=0} + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS},$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x) \cong \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} \underbrace{(x - x^e)}_{=\Delta x}, \quad \text{para } \Delta x = x - x^e \cong 0.$$

Agora, seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$ em $t_0 = 0$, e considere o **desvio** $y(t) = x(t) - x^e$ da solução $x(t)$ em relação ao ponto de equilíbrio x^e. Assim, para $y(t) = x(t) - x^e \cong 0$ (pequenos desvios), temos

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) \cong \underbrace{\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e}}_{\triangleq A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{(x(t) - x^e)}_{=y(t)} = Ay(t).$$

Denominamos

$$\dot{y} = Ay = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \bigg|_{x=x^e} \right] y,$$

de **sistema linearizado** associado ao sistema $\dot{x} = f(x)$ no ponto de equilíbrio x^e.

Relembre que a solução do sistema linear autônomo $\dot{y} = Ay$ para a condição inicial $y(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $y(t) = e^{At}y(0)$, $t \geq 0$. Portanto, é razoável esperarmos que

$$x(t) = x^e + y(t) \cong x^e + e^{At}y(0) = x^e + e^{At}(x(0) - x^e), \quad t \geq 0,$$

desde que $y(t) = x(t) - x^e \cong 0$, ou seja, $x(t) \cong x^e$. Em particular, é razoável esperarmos que o **retrato de fase** do **sistema não-linear** $\dot{x} = f(x)$ apresente, nas **proximidades** do ponto do equilíbrio x^e, um **comportamento qualitativo semelhante** ao do retrato de fase do sistema linear $\dot{y} = Ay = [\partial f(x^e)/\partial x]y$ (após uma **translação** por x^e). Isto é de fato verdade, conforme o teorema apresentado a seguir.

Teorema de Hartman-Grobman: Considere um sistema não-linear autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1. Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, e considere o sistema linearizado associado

$$\dot{y} = Ay = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \bigg|_{x=x^e} \right] y.$$

Assuma que os autovalores de A possuem **parte real não-nula**. Então, o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e, um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado associado.

Em particular, quando $n = 2$ (**sistema no plano**) e os 2 autovalores da matriz A são **distintos e com parte real não-nula**, se $y^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e, um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, respectivamente.

Devido ao Teorema de Hartman-Grobman acima, dizemos que o sistema linearizado permite analisar **localmente** o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ **em torno** do ponto de equilíbrio x^e.

Obs: Quando $n = 2$ e $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica (por exemplo, cada componente de f é a soma, diferença, produto ou quociente de funções polinomiais ou trigonométricas), então o resultado do Teorema de Hartman-Grobman permanece válido mesmo quando a matriz A possui 2 autovalores **repetidos fora do eixo imaginário**, ou seja, se $y^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável ou nó instável com autovalores iguais, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e, um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável ou nó instável, respectivamente.

5.2.1 Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

Considere o circuito *tunnel-diode* abaixo:

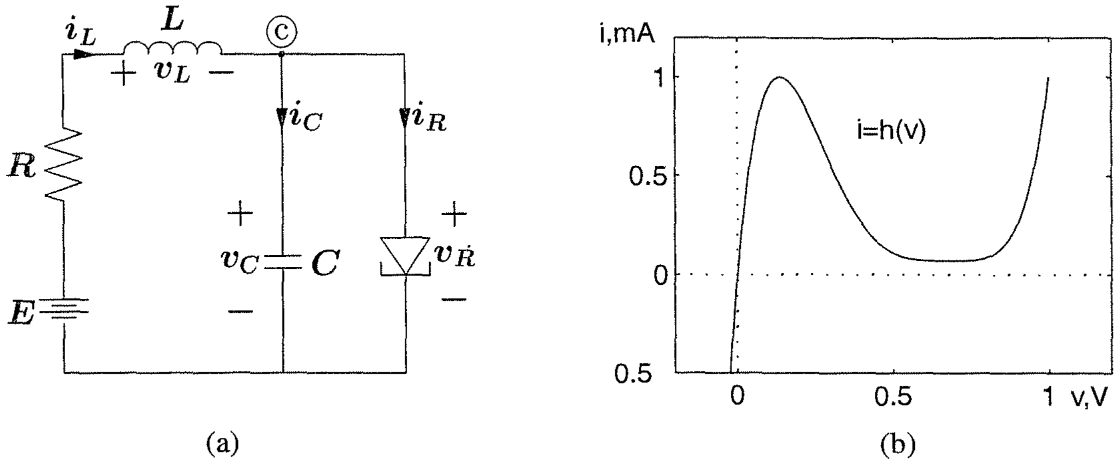


Figura 8 – (a) Circuito *tunnel-diode*, e (b) característica v_r–i_r do diodo.

Considerando que $u = E$ (controle), $x_1 = v_c$ e $x_2 = i_L$, temos que o modelo de estado do circuito é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}\big(-h(x_1)+x_2\big),\\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}\big(-x_1 - Rx_2 + u\big).\end{aligned}$$

Para $u = 1.2$V, $R = 1.5\text{k}\Omega$, $C = 2\text{pF} = 2\times 10^{-12}$F, $L = 5\mu$H, e considerando que o tempo é medido em nanosegundos e as correntes em mA, temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1,x_2) = 0.5\big(-h(x_1)+x_2\big),\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) = 0.2\big(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2\big).\end{aligned}$$

Suponha que

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5.$$

Fazendo $f(x_1^e,x_2^e) = \big(f_1(x_1^e,x_2^e), f_2(x_1^e,x_2^e)\big) = (0,0)$, obtemos 3 pontos de equilíbrio:

$$Q_1 = (0.063, 0.758), \quad Q_2 = (0.285, 0.61), \quad Q_3 = (0.884, 0.21).$$

Temos que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} dh(x_1)/dx_1 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

com

$$dh(x_1)/dx_1 = 17.76 - 207.58x_1 + 668.86x_1^2 - 905.25x_1^3 + 418.6x_1^4.$$

Assim:

$$A_1 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=Q_1} = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -3.57, \lambda_2 = -0.33,$$

$$A_2 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=Q_2} = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.77, \lambda_2 = -0.25,$$

$$A_3 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=Q_3} = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1.33, \lambda_2 = -0.4,$$

Portanto: Q_1 é um nó estável, Q_2 é do tipo sela, e Q_3 é um nó estável. O retrato de fase abaixo comprova nossa análise **local** pelo sistema linearizado. Observe a presença das sepatrizes (uma **separatriz** é uma curva que divide o retrato de fase em regiões com comportamentos qualitativos distintos). Assim, um circuito *tunnel-diode* **real** funciona como um circuito biestável: os 2 estados são Q_1 e Q_3 (na prática, pequenos ruídos externos forçarão a órbita a sair das separatrizes).

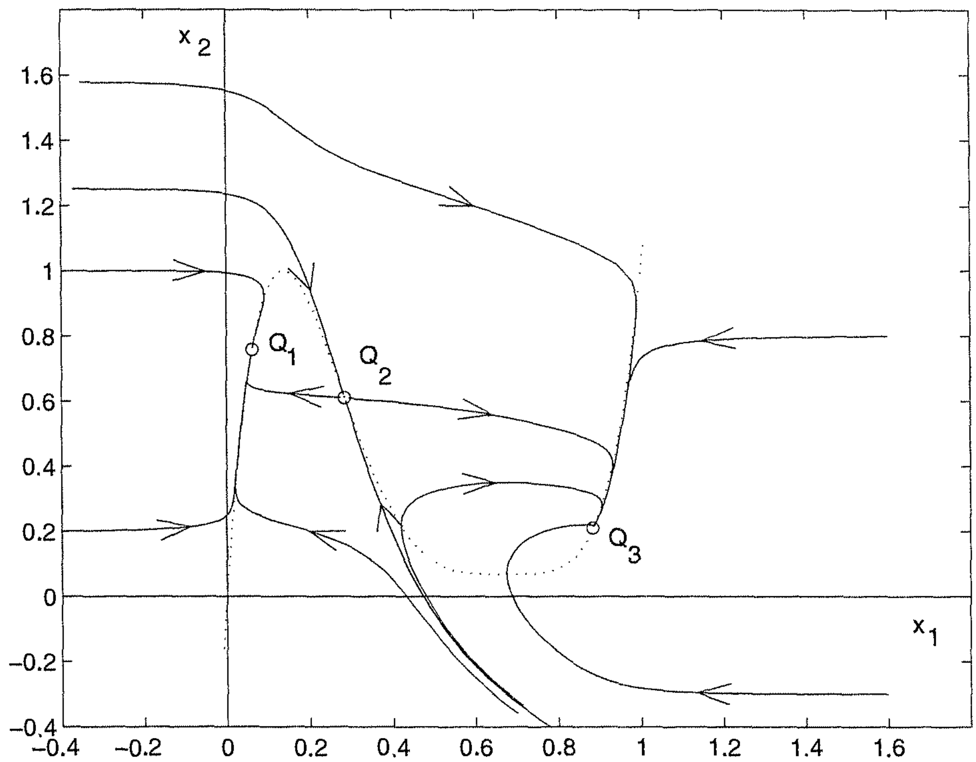


Figura 9 – Retrato de fase do circuito *tunnel-diode*.

5.3 Procedimentos

1. Para o circuito *tunnel-diode* do exemplo anterior, utilize o pacote simbólico do Matlab para calcular os pontos de equilíbrio e o sistema linearizado associado. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase utilizando o pacote **pplane**. Interprete o retrato de fase, concluindo que um circuito *tunnel-diode* **real** opera como um circuito biestável. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento das separatrizes (fenômeno **global**).

2. Classifique os pontos de equilíbrio do pêndulo simples e esboce o retrato de fase. Relembre que o modelo de estado do pêndulo simples com $u = 0$ (sem controle) é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2,\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $m = \ell = 1$, $g = 9.8$ e $k = 0.1$.

3. Considere a equação de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\varepsilon = 0.2$ é um parâmetro. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase. Note a presença de um **ciclo limite** (estudaremos ciclos limite no próximo Lab). Assim, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a amplitude de oscilação independe da condição inicial. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo limite (fenômeno **global**).

6 Lab 5 – Osciladores, Ciclos-Limite e Caos

Objetivos

Vamos inicialmente analisar osciladores lineares e suas limitações práticas. Na sequência, vamos estudar osciladores não-lineares através de ciclos-limite. Por fim, verificaremos o comportamento caótico em um pêndulo duplo.

6.1 Osciladores Lineares

Um **oscilador** é um sistema que exibe comportamento oscilatório. Quando tal comportamento $y(t)$ é periódico e dado por

$$y(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

denominamos o sistema de **oscilador harmônico (simples)**. Veremos agora que todo sistema descrito por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{com } \omega > 0,$$

é um **oscilador harmônico linear**. Escolhendo como variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \end{aligned}$$

e definindo vetor (coluna) de estado $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$, obtemos o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x = Ax.$$

Note que os autovalores da matriz A são

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega.$$

Logo, o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é do tipo **centro**. Desse modo, as soluções $x(t) = (x_1(t), x_2(t))' = (y(t), \dot{y}(t))' \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, oscilam periodicamente com frequência ω e a amplitude de oscilação depende da condição inicial.

É fácil verificar que a solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))' \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, para a condição inicial $x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}) = (y(0), \dot{y}(0))' \in \mathbb{R}^2$ em $t_0 = 0$, é dada por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C\cos(\omega t + \phi), \\ x_2(t) &= -\omega C\sin(\omega t + \phi), \end{aligned}$$

onde

$$C = \sqrt{(x_{10})^2 + \left(\frac{x_{20}}{\omega}\right)^2}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{x_{20}}{x_{10}\omega}\right).$$

Note que a amplitude C e a fase ϕ dependem de $x_0 = (x_{10}, x_{20})'$.

Como

$$y(t) = x_1(t) = C\cos(\omega t + \phi), \quad t \geq 0,$$

concluímos que todo sistema modelado por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{com } \omega > 0,$$

corresponde de fato a um **oscilador harmônico linear**.

Exemplo 1 (Sistema Massa-Mola): Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo onde m é a massa do bloco e y é o deslocamento horizontal do bloco em relação

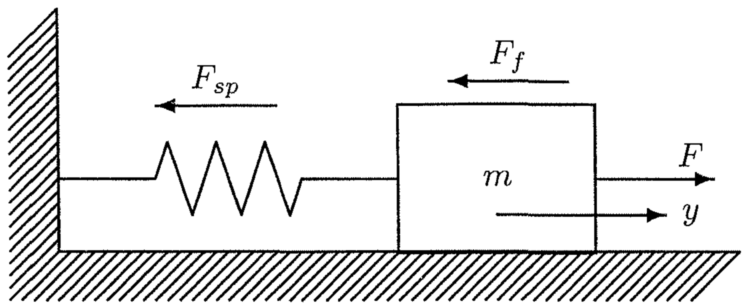


Figura 10 – Sistema massa-mola.

a uma posição de referência. Considerando que $F_{sp} = ky$ (força restauradora da mola (*spring*)), $F = 0$ (força externa nula) e $F_f = 0$ (força de atrito (*friction*) nula), obtemos pela 2^a Lei de Newton:

$$m\ddot{y} + F_{sp} = m\ddot{y} + ky = 0,$$

ou seja,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{com } \omega = \sqrt{k/m}.$$

Portanto, o sistema massa-mola sem atrito é um oscilador harmônico linear. Ressaltamos que a frequência de oscilação é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$.

Exemplo 2 (Circuito LC): Considere o circuito LC ilustrado abaixo Considere que $y = i_L$ (corrente no indutor). Como

$$\begin{aligned} v_L &= L\frac{di_L}{dt}, \\ i_C &= C\frac{dv_C}{dt}, \\ v_C &= v_L, \\ i_C &= -i_L, \end{aligned}$$

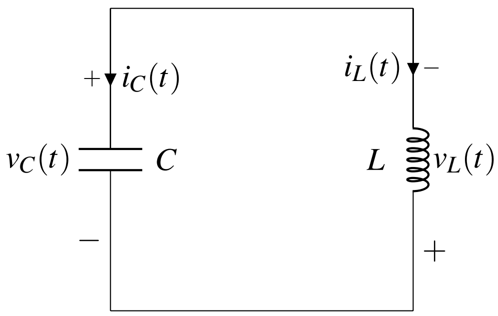


Figura 11 – Circuito LC.

obtemos que

$$\ddot{y} = \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{L}\dot{v}_L = \frac{1}{L}\dot{v}_C = \frac{1}{LC}\dot{i}_C = -\frac{1}{LC}\dot{i}_L = -\frac{1}{LC}y,$$

ou seja,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad \text{com } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Portanto, o circuito LC é um oscilador harmônico linear: existe uma troca periódica entre a energia armazenada no campo elétrico do capacitor e a energia armazenada no campo magnético do indutor. Ressaltamos que a frequência de oscilação é dada por $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Apesar de um oscilador harmônico linear descrito por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

apresentar um comportamento oscilatório periódico da forma $y(t) = C\cos(\omega t + \phi)$, o mesmo apresenta os seguintes problemas:

1. O sistema **não é** estruturalmente estável, pois vimos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo **centro** da equação de estado $\dot{x} = Ax$ associada. Portanto, pequenas perturbações ΔA no sistema nominal $\dot{x} = Ax$ irão destruir o comportamento periódico. Por exemplo, em um sistema massa-mola real, sempre teremos a presença de uma força de atrito $F_f \neq 0$, resultando numa dissipação de energia e na destruição da oscilação periódica. Do mesmo modo, em um circuito LC real, a resistência dos cabos elétricos dissipará a energia trocada entre o capacitor e o indutor;

2. Mesmo que fosse possível construir na prática um oscilador harmônico linear, vimos que a **amplitude de oscilação depende da condição inicial** $x_0 = (x_{10}, x_{20})' = (y(0), \dot{y}(0))'$.

Estes 2 problemas podem ser eliminados se considerarmos osciladores não-lineares. Isto será visto na sequência.

6.2 Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

Relembre que um oscilador é um sistema que exibe comportamento oscilatório. Assim, uma sistema autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, D é um conjunto aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, oscila periodicamente quando o mesmo possui uma solução periódica $x(t) \in D$, ou seja:

$$x(t) = x(t+T), \quad \text{para } t \geq 0,$$

onde $T > 0$ é o período de oscilação (soluções constantes, i.e. pontos de equilíbrio, não serão consideradas periódicas). Portanto, no retrato de fase do sistema, temos que toda órbita fechada (que não é um ponto de equilíbrio) corresponde a uma solução periódica, e vice-versa.

Quando $n = 2$ (sistema no plano), denominamos uma órbita fechada $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^2$ do sistema $\dot{x} = f(x)$ de **ciclo-limite (ou oscilação auto-sustentada)** quando γ é uma órbita fechada **isolada** do sistema, ou seja, quando existe um conjunto aberto V com $\gamma \subset V \subset D$ e tal que V não contém nenhuma outra órbita fechada diferente de γ. Desse modo, percebemos que **não existem ciclos-limite em sistemas lineares autônomos** no plano da forma $\dot{x} = Ax$, pois o sistema só terá órbitas fechadas (soluções periódicas) caso $x^e = 0$ seja um ponto de equilíbrio do tipo centro (autovalores $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$), e é evidente que tais órbitas fechadas (um continuum de elipses concêntricas centradas em $x^e = 0$) não são isoladas. Concluímos, portanto, que **ciclos-limite só podem ocorrer em sistemas não-lineares autônomos** (no plano).

Pode-se mostrar que só existem três tipos de ciclos-limite (γ):

1. **Estável**: quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ e tal que, para toda condição inicial $x(0) \in W$ em $t_0 = 0$, a solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, **tende em espiral** ao ciclo-limite quando $t \to \infty$;

2. **Instável**: quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ tal que, para toda condição inicial $x(0) \in W$, a solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, **se afasta em espiral** do ciclo-limite quando $t \to \infty$;

3. **Semi-estável**: quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ tal que: (a) se a condição inicial $x(0) \in W$ está no interior (respectivamente, exterior) do ciclo-limite, então $x(t)$ **tende em espiral** ao ciclo-limite quando $t \to \infty$; e (b) se a condição inicial $x(0) \in W$ está no exterior (respectivamente, interior) do ciclo-limite, então $x(t)$ **se afasta em espiral** do ciclo-limite quando $t \to \infty$.

Além disso, pode-se mostrar que **sempre haverá um ponto de equilíbrio no interior de um ciclo-limite**.

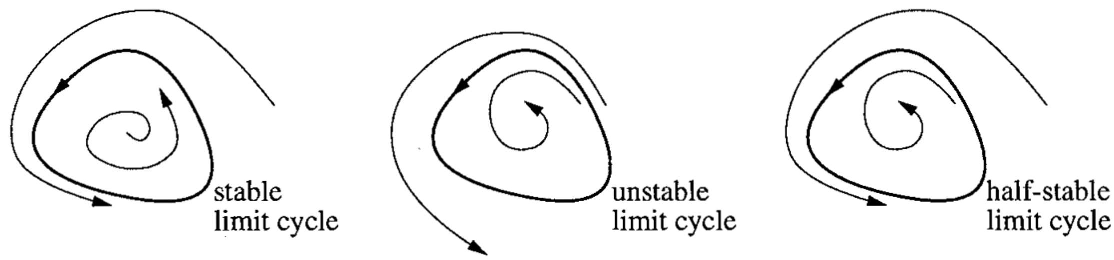


Figura 12 – Tipos de ciclos-limite: (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável.

Seja γ um ciclo-limite **estável**. Portanto, todas as soluções do sistema que começam suficientemente próximas de γ tendem em espiral para a órbita fechada γ quando $t \to \infty$, ou seja, para $t \geq 0$ suficientemente grande, temos que as soluções correspondentes $x(t)$ oscilam periodicamente com mesma frequência e a mesma amplitude da solução periódica associada a γ (mas não estarão necessariamente em fase!). Neste sentido, concluímos que a **amplitude de oscilação independe da condição inicial!**

A determinação dos possíveis ciclos-limite de um sistema não-linear não é uma tarefa fácil. O resultado abaixo é um critério para se prever a não-existência de ciclos-limite.
Critério de Bendixson: Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix} = f(x),$$

onde $x = (x_1,x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D é aberto e $f = (f_1,f_2)'$: $D \subset \mathbb{R}^2$ é de classe C^1. Seja $W \subset D$ um conjunto aberto simplesmente conexo (i.e. W não apresenta "buracos"). Se $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 \neq 0$ **em todos os pontos** de W, então o sistema **não** apresenta órbitas fechadas em W.

Exemplo: Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bx_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3, \end{aligned}$$

onde $x = (x_1,x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $a,b \in \mathbb{R}$ são parâmetros constantes. Tome $W = \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = b - x_1^2.$$

Portanto, quando $b < 0$, temos que $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 < 0$ em todos os pontos de $W = \mathbb{R}^2$. Logo, não há nenhuma órbita fechada no plano $\mathbb{R}^2$ se $b < 0$ (no entanto, se $b \geq 0$, então teremos pontos de $\mathbb{R}^2$ em que $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 0$, e nada podemos afirmar sobre a existência ou não de órbitas fechadas no plano!).

6.3 Caos

Não há uma definição universalmente aceita de **caos** na literatura de sistemas dinâmicos. No entanto, a seguinte definição é suficiente para os propósitos do nosso curso:

Definição: **Caos** é um comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema dinâmico (determinístico) que exibe sensibilidade às condições iniciais.

Aqui, **comportamento aperiódico de longo prazo** significa que existem soluções que não convergem para pontos de equilíbrio, soluções periódicas ou soluções quasi-periódicas quando $t \to \infty$. O termo **determinístico** significa que o sistema não possui entradas, ruídos ou parâmetros que variam de maneira randômica. E, **sensibilidade às condições iniciais**, significa que soluções com condições iniciais próximas se separam com rapidez exponencial. Portanto, uma pequena mudança, perturbação ou incerteza na condição inicial leva a uma solução com comportamento futuro significativamente diferente.

Citando Edward Lorenz (meteorologista e um dos pioneiros no estudo do caos): "**Caos: Quando o presente determina o futuro, mas o presente aproximado não determina o futuro de maneira aproximada.**"

Sensibilidade às condições iniciais é popularmente conhecido como **efeito borboleta** (termo decorrente de um artigo de Lorenz de 1972 entitulado *"Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?"*): o bater das asas da borboleta representa uma pequena mudança nas condições iniciais do sistema, causando assim uma cadeia de eventos que leva a um comportamento futuro significativamente diferente. Caso a borboleta não tivesse batido suas asas, a solução do sistema poderia ter sido bem diferente.

Diversos sistemas reais apresentam comportamento caótico: circuitos eletrônicos, sistemas mecânicos, sistemas meteorológicos, sistemas ecológicos, sistemas químicos, etc.

Pode-se mostrar que apenas sistemas não-lineares autônomos de ordem $n \geq 3$ podem apresentar comportamento caótico. Assim, não há caos em sistemas lineares autônomos de qualquer ordem nem em sistemas não-lineares autônomos no plano!

Para maiores detalhes sobre a Teoria do Caos, veja: `https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory`.

6.4 Procedimentos

1. Considere um circuito LC com $L = C = 1$. Simule o sistema para diversas condições iniciais, comprovando pelo retrato de fase e pelas soluções no domínio do tempo que a amplitude de oscilação depende da condição inicial (elipses concêntricas centradas em $x^e = 0$ no retrato de fase).

2. Considere o circuito oscilador abaixo:

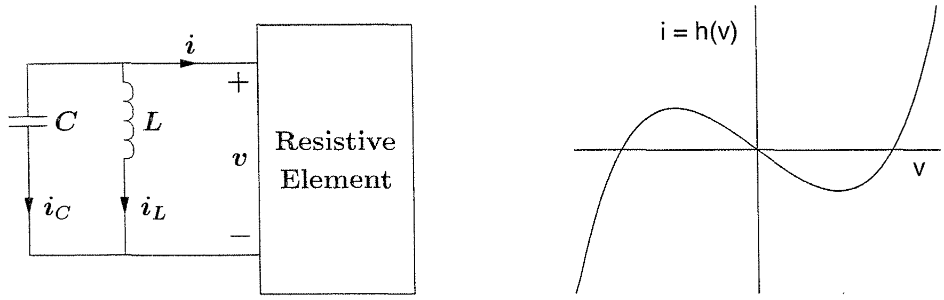


Figura 13 – (a) Circuito oscilador e (b) característica v-i do elemento resistivo (resistência negativa)

A resistência negativa por ser implementada pelo seguinte circuito:

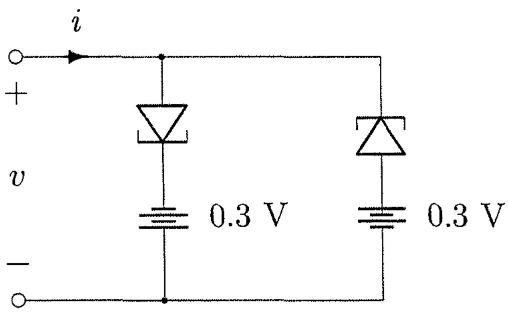


Figura 14 – Elemento de resistência negativa com um par de *tunnel-diodes*.

A partir das Leis de Kirchhoff, pode-se mostrar que o circuito oscilador é modelado por

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + v = 0,$$

onde $\varepsilon = \sqrt{L/C}$ e $h'(v) = dh(v)/dv$. Suponha que $h(v) = -v + v^3/3$ (característica v-i do elemento resistivo). Com isso, obtemos a famosa **equação de Van der Pol**:

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0.$$

A equação de Van der Pol foi utilizada para modelar um oscilador eletrônico empregado nos primeiros aparelhos de rádio.

Escolhendo $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$, chegamos à equação de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2,
\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado. Considere que $\varepsilon = 0.2$. Note que $x^e = 0$ é o único ponto de equilíbrio, e verifique que $x^e = 0$ é do tipo foco instável. Esboce o retrato de fase através do **pplane** e note a presença de um **ciclo-limite estável**. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo-limite (fenômeno **global**). Simule o sistema para diversas condições iniciais, comprovando pelo retrato de fase e pelo domínio do tempo que as soluções tendem em espiral para o ciclo-limite quando $t \to \infty$, oscilando periodicamente com mesma frequência e a mesma amplitude da solução periódica associada ao ciclo-limite (mas sem estar necessariamente em fase!). Neste sentido, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a **amplitude de oscilação independe da condição inicial!**

3. Considere o seguinte sistema ecológico (presa-predador):

$$\dot{x}_1 = x_1\left(1 - \frac{x_1}{\gamma}\right) - \frac{x_1 x_2}{\dfrac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1},$$
$$\dot{x}_2 = \frac{\beta \delta x_1 x_2}{\dfrac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2,$$

onde x_1 é o número de presas, x_2 é o número de predadores, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\alpha = 5.2$, $\beta = 2.0$, $\gamma = 3.5$, $\delta = 2.5$ são parâmetros constantes. Verifique pelo **pplane** que o sistema apresenta 3 pontos de equilíbrio: $(0;0)$ (sela), $(3.5;0)$ (sela) e outro próximo de $(1.4;1.75)$ (foco instável). Observe a presença de um **ciclo-limite estável** e interprete o retrato de fase em termos do equilíbrio ecológico.

Obs: Da mesma maneira como um **ponto de equilíbrio** pode ser visto como um **equilíbrio estático**, um **ciclo-limite estável** pode ser visto como um **equilíbrio dinâmico** (fenômeno **não-linear**!).

4. Considere o pêndulo duplo. Verifique a característica caótica do sistema: pequenas incertezas nas condições iniciais levam a comportamentos futuros de longo prazo significativamente diferentes (sensibilidade às condições iniciais). Para isto, acesse:

1. `https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum`

2. `http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/dpend_html`

7 Lab 6 – Bifurcações em Sistemas Não-Lineares no Plano

Objetivos

Vamos introduzir o conceito de bifurcação e ver como esboçar o diagrama de bifurcação correspondente. Em seguida, classificaremos as bifurcações locais de sistemas não-lineares no plano. Por fim, analisaremos sistemas que ilustram os diversos tipos de bifurcação e veremos os efeitos qualitativos no retrato de fase.

7.1 Bifurcação

Vimos nos Labs 4 e 5 que o **comportamento qualitativo** de um sistema não-linear no plano ($n = 2$) é determinado pelos padrões exibidos em seu retrato de fase, que por sua vez depende dos tipos de seus pontos de equilíbrio e ciclos-limite.

Relembre do Lab 4 que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Vamos agora analisar situações em que o sistema perde a propriedade de ser estruturalmente estável. Iremos nos concentrar na situação em que pequenas perturbações num parâmetro do sistema causam mudanças abruptas no comportamento qualitativo do retrato de fase. Tais mudanças são denominadas de **bifurcações**.

Mais precisamente, considere um sistema não-linear autônomo no plano da forma

$$\dot{x} = f_\mu(x)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, D é um conjunto aberto, $\mu \in \mathbb{R}$ é um parâmetro que pode ser variado, e $f_\mu \colon D \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 para cada $\mu \in \mathbb{R}$. Aqui, $\mu \in \mathbb{R}$ pode representar tanto um parâmetro físico do sistema (o valor de uma resistência R em um circuito elétrico, por exemplo) quanto um parâmetro de controle (a amplitude de um controle constante $u(t) = \mu$ em malha-aberta ou o ganho de um controlador em malha-fechada, por exemplo). Uma **bifurcação** é uma mudança abrupta nos tipos de pontos de equilíbrio e/ou ciclos-limite à medida que o parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$ sofre variações. Denominamos μ de **parâmetro de bifurcação**, e os valores $\mu = \mu^*$ nos quais tais mudanças abruptas ocorrem são denominados de **pontos de bifurcação**.

7.2 Classificação de Bifurcações

Uma bifurcação é comumente representada graficamente pelo **diagrama de bifurcação** no plano. Tal diagrama esboça uma medida da amplitude dos pontos de equilíbrios e/ou ciclos-limite em função do parâmetro de bifurcação $\mu \in \mathbb{R}$, e indica também o tipo dos pontos de equilíbrios e/ou ciclos-limite: **linhas cheias** representam **pontos de equilíbrio estáveis** (i.e. nó estável ou foco estável) e **ciclos-limite estáveis**; e **linhas tracejadas** representam **pontos de equilíbrio instáveis** (i.e. nó instável, foco instável ou sela) e **ciclos-limite instáveis**.

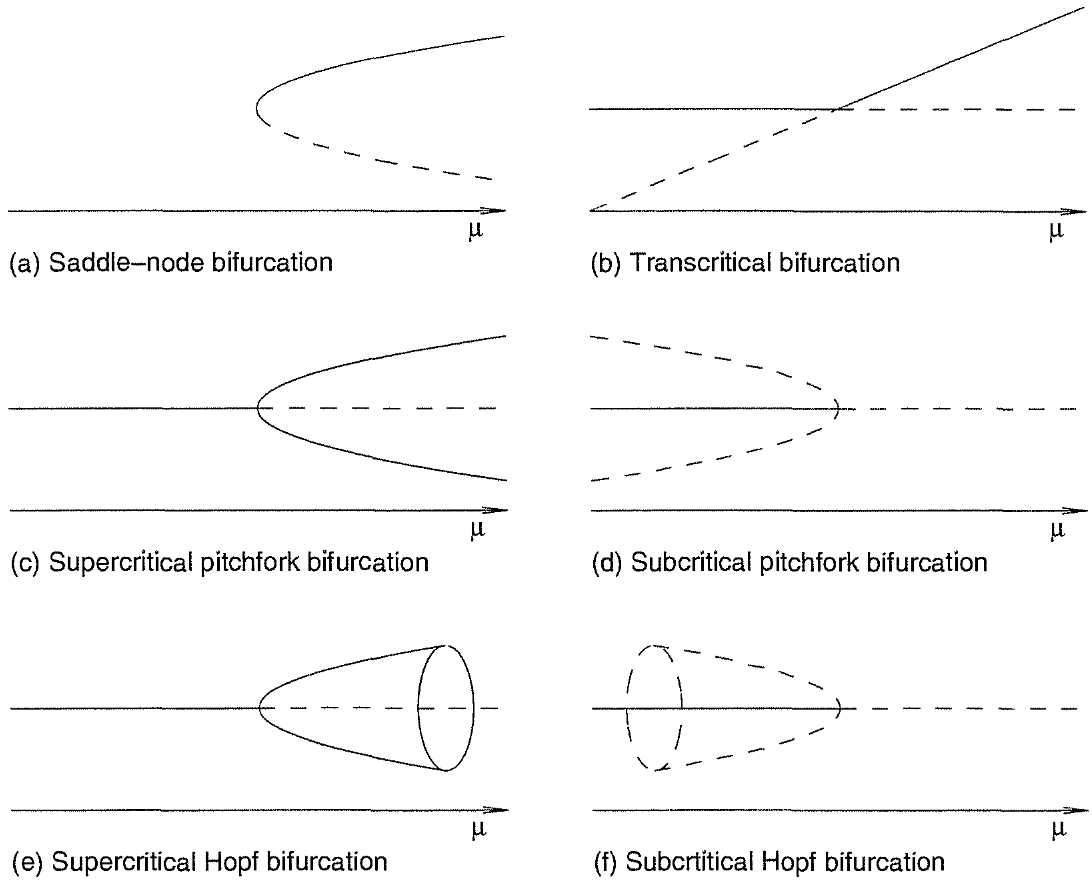


Figura 15 – Diagramas de bifurcação com ponto de bifurcação $\mu = \mu^*$ (o ciclo-limite estável da bifurcação de Hopf subcrítica não é mostrado por simplicidade).

Temos a seguinte classificação de bifurcações (locais):

(a) **Bifurcação sela-nó**: para $\mu > \mu^*$ há um ponto de equilíbrio do tipo sela e outro do tipo nó estável; para $\mu = \mu^*$ **a sela e o nó colidem** em um ponto de equilíbrio; e para $\mu < \mu^*$ a sela e o nó desaparecem;

(b) **Bifurcação transcrítica**: há um ponto de equilíbrio estável e outro instável sempre que $\mu \neq \mu^*$, mas em $\mu = \mu^*$ estes **2 pontos de equilíbrio trocam de estabilidade** e ambos colidem em um ponto de equilíbrio;

(c) **Bifurcação de forquilha (*pitchfork*) supercrítica**: para $\mu < \mu^*$ há um ponto de equilíbrio estável; para $\mu > \mu^*$ há 3 pontos de equilíbrios, sendo 2 estáveis e 1 instável; e para $\mu = \mu^*$ estes 3 pontos de equilíbrio colidem em um ponto de equilíbrio;

(d) **Bifurcação de forquilha (*pitchfork*) subcrítica**: para $\mu < \mu^*$ há 3 pontos de equilíbrios, sendo 2 instáveis e 1 estável; para $\mu > \mu^*$ há um ponto de equilíbrio instável; e para $\mu = \mu^*$ os 3 pontos de equilíbrio colidem em um ponto de equilíbrio;

(e) **Bifurcação de Hopf supercrítica**: para $\mu < \mu^*$ há um foco estável; para $\mu > \mu^*$ este foco estável se torna instável e há o surgimento de um ciclo-limite estável;

(f) **Bifurcação de Hopf subcrítica**: para $\mu < \mu^*$ há um foco estável e 2 ciclos-limite, sendo um estável e outro instável; para $\mu > \mu^*$ o foco estável se funde com o ciclo-limite instável, resultando em um foco instável (mas um ciclo-limite estável continua existindo).

7.3 Exemplos

Nos exemplos abaixo, assumimos que $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$.

7.3.1 Exemplo 1 (Bifurcação Sela-Nó)

Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = \mu - x_1^2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ e $x^{e2} = (-\sqrt{\mu}, 0)$, para $\mu \geq 0$, pois:

$$\mu - (x_1^e)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1^e = \pm\sqrt{\mu},$$
$$-x_2^e = 0 \;\Rightarrow\; x_2^e = 0.$$

Ressaltamos que não há pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_e^2) \in \mathbb{R}^2$ quando $\mu < 0$. A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e2}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ é um nó estável e $x^{e2} = (-\sqrt{\mu}, 0)$ é do tipo sela. Portanto, ocorre uma bifurcação sela-nó no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

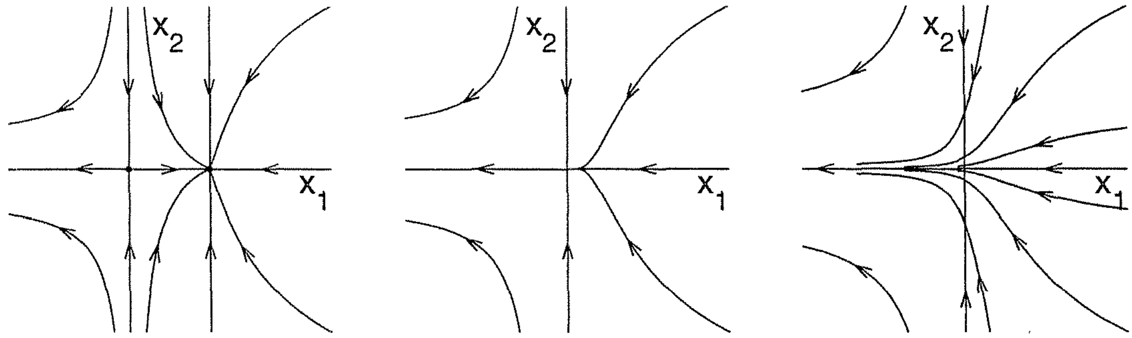


Figura 16 – Retrato de fase do Exemplo 1 (bifurcação sela-nó) para $\mu > 0$ (esquerda), $\mu = \mu^* = 0$ (meio) e $\mu < 0$ (direita). Note que: (a) se $\mu > 0$, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ sempre que a condição inicial $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $x_{01} > -\sqrt{\mu}$; e (b) se $\mu < 0$, então não há pontos de equilíbrio e $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$ para qualquer x_0.

7.3.2 Exemplo 2 (Bifurcação Transcrítica)

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0,0)$ e $x^{e2} = (\mu, 0)$, para $\mu \in \mathbb{R}$, pois:

$$\begin{aligned} \mu x_1^e - (x_1^e)^2 = x_1^e(\mu - x_1^e) = 0 \ &\Rightarrow\ x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \mu, \\ -x_2^e = 0 \ &\Rightarrow\ x_2^e = 0. \end{aligned}$$

A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu - 2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e2}} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo: (a) quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é do tipo sela (instável) e $x^{e2} = (\mu, 0)$ é um nó estável; e (b) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é um nó estável e $x^{e2} = (\mu, 0)$ é do tipo sela (instável). Portanto, estes 2 pontos de equilíbrio trocam de estabilidade em $\mu = 0$. Desse modo, ocorre uma bifurcação transcrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

7.3.3 Exemplo 3 (Bifurcação de Forquilha Supercrítica)

Considere

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0,0)$, $x^{e2} = (\sqrt{\mu},0)$ e $x^{e3} = (-\sqrt{\mu},0)$, para $\mu > 0$, pois:

$$\mu x_1^e - (x_1^e)^3 = x_1^e(\mu - (x_1^e)^2) = 0 \Rightarrow x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \pm\sqrt{\mu},$$
$$-x_2^e = 0 \Rightarrow x_2^e = 0.$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \leq 0$ é $x^e = (0,0)$.

A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu - 3x_1^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e2,3}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo: (a) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é um nó estável, sendo o único ponto de equilíbrio; e (b) quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é do tipo sela (instável) e $x^{e2,3} = (\pm\sqrt{\mu},0)$ são nós estáveis. Portanto, ocorre uma bifurcação de forquilha supercrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

7.3.4 Exemplo 4 (Bifurcação de Forquilha Subcrítica)

Considere

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0,0)$, $x^{e2} = (\sqrt{-\mu},0)$ e $x^{e3} = (-\sqrt{-\mu},0)$, para $\mu < 0$, pois:

$$\mu x_1^e + (x_1^e)^3 = x_1^e(\mu + (x_1^e)^2) = 0 \Rightarrow x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \pm\sqrt{-\mu},$$
$$-x_2^e = 0 \Rightarrow x_2^e = 0.$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \geq 0$ é $x^e = (0,0)$.

A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu + 3x_1^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^{e2,3}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo: (a) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é um nó estável e $x^{e2,3} = (\pm\sqrt{-\mu},0)$ são do tipo sela (instáveis); e (b) para $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0,0)$ é do tipo sela (instável), sendo o único ponto de equilíbrio. Portanto, ocorre uma bifurcação de forquilha subcrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

7.3.5 Revisão de Cálculo

Antes de apresentarmos exemplos da bifurcação de Hopf, relembramos os seguintes resultados de Cálculo:

Proposição: Seja g: $J \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que $dg(t)/dt \leq 0$ e $g(t) \geq c$, para todo $t \in J$, onde $c \in \mathbb{R}$ (finito!). Então,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \overline{g} \geq c,$$

onde $\overline{g} \in \mathbb{R}$ (finito!).

Proposição: Seja g: $J \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que $dg(t)/dt \geq 0$ e $g(t) \leq c$, para todo $t \in J$, onde $c \in \mathbb{R}$ (finito!). Então,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \overline{g} \leq c,$$

onde $\overline{g} \in \mathbb{R}$ (finito!).

7.3.6 Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

Considere

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1. \end{aligned}$$

Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma dada condição inicial $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$. Passando para coordenadas polares

$$r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \geq 0, \quad \theta(t) = \tan^{-1}\big(-x_2(t)/x_1(t)\big) \in [0, 2\pi).$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{1}{2}\big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2\big)^{-1/2}\big[2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t)\big], \\ &= \big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2\big)^{-1/2}\big[x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t)\big], \\ &= \mu r(t) - r^3(t), \\ \dot{\theta}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, concluímos que $\big(r(t),\theta(t)\big)$, $t \geq 0$, é **a** solução de

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3,\\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

para a condição inicial $r(0) = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$, $\theta(0) = \tan^{-1}(\frac{-x_{02}}{x_{01}})$. Desse modo, podemos reduzir nossa análise à seguinte EDO

$$\dot{r} = p(r) = \mu r - r^3, \quad r \geq 0$$

Note que os pontos de equilíbrio são $r^{e1} = 0$ (origem) e $r^{e2} = \sqrt{\mu} > 0$ (ciclo-limite), para $\mu > 0$, pois:

$$\mu r^e - (r^e)^3 = r^e(\mu - (r^e)^2) = 0 \Rightarrow r^e = 0 \text{ ou } r^e = \sqrt{\mu} > 0.$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \leq 0$ é $r^e = 0$.

Suponha que $\mu < 0$. Então, dado $r(0) > 0$, temos que $r(t) > 0$ (pois $r(t)$ não pode cruzar o ponto de equilíbrio $r^e = 0$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) < 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela primeira proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \bar{r} \geq 0.$$

Mas, $\bar{r} \geq 0$ é necessariamente um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$ (veja o Teorema da Seção 3.1 do Lab 3). Assim, mostramos que, dado $r(0) > 0$, temos

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \bar{r} = r^e = 0,$$

ou seja, a origem $x^e = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema do tipo foco estável.

Agora, suponha que $\mu > 0$. Seja $0 < r(0) < \sqrt{\mu}$. Então, $0 < r(t) < \sqrt{\mu}$ (pois $r(t)$ não pode cruzar nem o ponto de equilíbrio $r^{e1} = 0$ nem o ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) = r(t)\big(\mu - r^2(t)\big) > 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela segunda proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \widetilde{r} \leq \sqrt{\mu}.$$

No entanto, $\widetilde{r} \leq \sqrt{\mu}$ tem que ser um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$. Note que $\widetilde{r} \neq r^{e1} = 0$, pois $r(t)$, $t \geq 0$, é uma função crescente pelo fato de $\dot{r}(t) > 0$. Desse modo, provamos que, dado $0 < r(0) < \sqrt{\mu}$, temos

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \widetilde{r} = r^{e2} = \sqrt{\mu},$$

ou seja, a origem $x^e = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema do tipo foco instável, e toda condição inicial não-nula no interior do ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$ tende ao mesmo em espiral.

Por fim, considere que $r(0) > \sqrt{\mu}$. Então, $r(t) > \sqrt{\mu}$ (pois $r(t)$ não pode cruzar o ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) = r(t)\big(\mu - r^2(t)\big) < 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela primeira proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \widehat{r} \geq \sqrt{\mu} > 0.$$

Mas, $\widehat{r} \geq \sqrt{\mu} > 0$ tem que ser um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$. Assim, mostramos que, dado $r(0) > \sqrt{\mu}$, temos

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \widehat{r} = r^{e2} = \sqrt{\mu},$$

ou seja, o ciclo limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$ é estável. Portanto, concluímos que ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

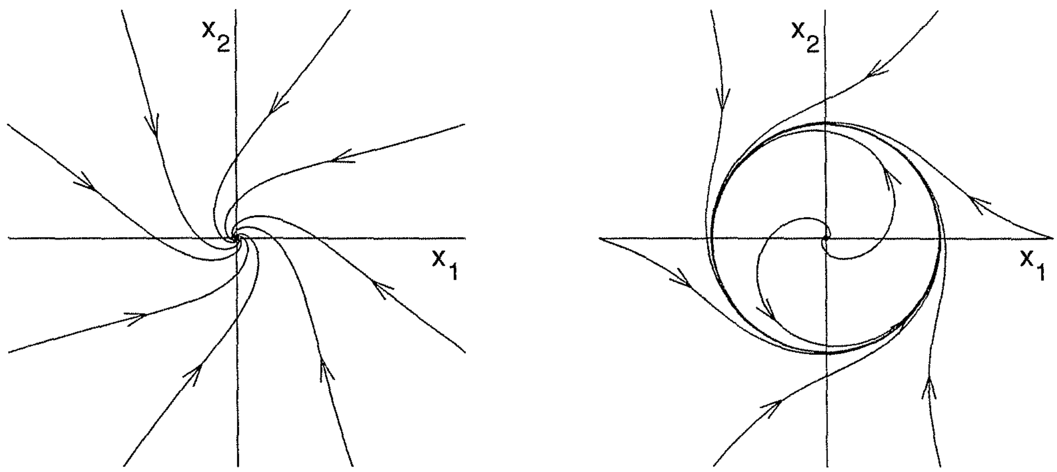


Figura 17 – Retrato de fase do Exemplo 5 (bifurcação de Hopf supercrítica) para $\mu < 0$ (esquerda) e $\mu > 0$ (direita).

7.4 Procedimentos

1. Para cada um dos 5 exemplos acima, utilize o **pplane** para verificar o efeito qualitativo das bifurcações no retrato de fase do sistema. Esboce o diagrama de bifurcação correspondente. Considerando que $|\mu - \mu^*| \cong 0$, quais destas bifurcações pode sem consideradas **seguras** e quais podem ser consideradas **perigosas** em termos do comportamento em regime permanente ($t \to \infty$) do sistema?

2. Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_1\left[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2\right] - x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_2\left[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2\right] + x_1.$$

Utilizando o **pplane**, verifique que este sistema apresenta uma bifurcação de Hopf subcrítica no ponto bifurcação $\mu^* = 0$. Esboce o diagrama de bifurcação correspondente.

8 Sistemas Lineares

Neste capítulo, vamos estudar **sistemas lineares invariantes no tempo** (**LTI** – Linear Time-Invariant) modelados por

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (matriz $n \times m$), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ (matriz $p \times n$) e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ (matriz $p \times m$) são **matrizes constantes**. Salvo menção contrária, de agora em diante iremos assumir que a entrada $u(t)$, $t \geq 0$, é **contínua por partes**. Como

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x,u), \quad y = Cx + Du = h(x,u),$$

com $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 ($\partial f/\partial x = A$, $\partial f/\partial u = B$, $\partial h/\partial x = C$, $\partial h/\partial u = D$), concluímos pelas **Obs 4 e 5** acima que o sistema é de fato **invariante no tempo** e, assim, sempre podemos (**e iremos**) considerar que $t_0 = 0$.

Mostraremos na sequência que um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

é de fato linear, ou seja, o princípio da superposição é satisfeito. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Temos que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}, \quad e^{A\cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}\ , \quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}.$$

Relembre que se

$$\alpha(t) = \int_0^t \beta(\tau)\,d\tau \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad t \geq 0,$$

onde $\beta(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $t \geq 0$, é uma aplicação contínua, então

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \beta(t), \quad t \geq 0.$$

Dada uma condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ (em $t_0 = 0$), temos que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

é uma solução do sistema no intervalo $J = [0, \infty)$ para a condição inicial x_0, pois $x(0) = e^{A \cdot 0} x_0 = I x_0 = x_0$ e, para $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau, \\
\dot{x}(t) &= A e^{At} x_0 + A e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau + \overbrace{e^{At} e^{-At}}^{=I} B u(t), \\
&= A \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \right] + B u(t), \\
&= A x(t) + B u(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que

$$
\boxed{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0}
$$

é **a** solução do sistema no intervalo $J = [0, \infty)$ para a condição inicial $x(0) = x_0$. Assim, a saída $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C x(t) + D u(t), \\
&= \underbrace{C e^{At} x_0}_{=y_0(t)} + \underbrace{\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t)}_{=y_{esn}(t)},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\boxed{\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}}
$$

Propriedade de Decomposição.

Logo, o **princípio da superposição** é satisfeito:

Se

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_a(0), \\
u_a(t),\ t \geq 0,
\end{array}
\right\} \longrightarrow y_a(t),\ t \geq 0, \qquad
\left.
\begin{array}{l}
x_b(0), \\
u_b(t),\ t \geq 0,
\end{array}
\right\} \longrightarrow y_b(t),\ t \geq 0,
$$

então $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_c(0) = k_1 x_a(0) + k_2 x_b(0), \\
u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t),\ t \geq 0,
\end{array}
\right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq 0.
$$

Concluímos assim que todo sistema modelado por

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A x + B u, \\
y &= C x + D u,
\end{aligned}
$$

é de fato um **sistema linear invariante no tempo (LTI)**.

Importante: Como as soluções do modelo acima estão definidas em todo o interval $J = [0, \infty)$, **não há tempo de escape finito**!

8.1 Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Considere o sistema LTI

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu, \\
y &= Cx + Du.
\end{aligned}
$$

Relembre que, fixada a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e escolhida uma entrada $u(t)$, $t \geq 0$, contínua por partes, a saída $y(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$
\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t), \\
&= \underbrace{Ce^{At}x_0}_{=\,y_0(t)} + \underbrace{\int_{0^-}^t \overbrace{\left[Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D\right]}^{\mathscr{G}(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau}_{=\,y_{esn}(t)\,=\,\mathscr{G}(t)*u(t)\ \text{(convolução!)}},
\end{aligned}
$$

onde $\delta(t)$ é o impulso unitário centrado em $t=0$. Denominamos $\mathscr{G}(t) = Ce^{At}B + \delta(t)D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $t \geq 0$, de **matriz resposta ao impulso** do sistema.

Ao aplicarmos a transformada de Laplace $\mathscr{L}$ em ambos os lados de

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t),
\end{aligned}
$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s), \\
Y(s) &= CX(s) + DU(s),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
X(s) &= (X_1(s),\ldots,X_n(s))' = \mathscr{L}\{x(t)\} = (\mathscr{L}\{x_1(t)\},\ldots,\mathscr{L}\{x_n(t)\})', \\
U(s) &= (U_1(s),\ldots,U_m(s))' = \mathscr{L}\{u(t)\} = (\mathscr{L}\{u_1(t)\},\ldots,\mathscr{L}\{u_m(t)\})', \\
Y(s) &= (Y_1(s),\ldots,Y_p(s))' = \mathscr{L}\{y(t)\} = (\mathscr{L}\{y_1(t)\},\ldots,\mathscr{L}\{y_p(t)\})'.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s),
$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
X(s) &= (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s), \\
Y(s) &= C(sI-A)^{-1}x(0) + \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s).
\end{aligned}
$$

Mas, para $t \geq 0$,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau,$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{=\,y_0(t)} + \underbrace{\int_{0^-}^t \overbrace{\left[Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D\right]}^{\mathscr{G}(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau}_{=\,y_{esn}(t)\,=\,\mathscr{G}(t)*u(t)\ \text{(convolução!)}}.$$

Concluímos então que (relembre que $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$):

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = e^{At},\ t \geq 0,$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{=Y_0(s)} + \underbrace{\overbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]}^{=\,G(s)\,=\,\mathscr{L}\{\mathscr{G}(t)\}} U(s)}_{=\,Y_{esn}(s)\,=\,G(s)U(s)},$$

onde

$$\boxed{G(s) = \mathscr{L}\{\mathscr{G}(t)\} \in \mathbb{R}^{p\times m} = C(sI-A)^{-1}B + D}$$

é denominada de **matriz de transferência** do sistema. Logo, para $x_0 = 0$ (condições iniciais nulas), temos

$$\boxed{Y(s) = Y_{esn}(s) = G(s)U(s)}$$

ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix}}_{=Y(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \ldots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \ldots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}}_{=\,G(s)\,=\,(G_{ij}(s))\,=\,\mathscr{L}\{\mathscr{G}(t)\}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}}_{=U(s)}$$

com

$$\mathscr{G}(t) = (g_{ij}(t)) = Ce^{At}B + \delta(t)D = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & \ldots & g_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{p1}(t) & \ldots & g_{pm}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Portanto,

$$\frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = G_{ij}(s) = \mathscr{L}\{g_{ij}(t)\}$$

é a **função de transferência** entre a j-ésima entrada $u_j(t)$ e a i-ésima saída $y_i(t)$ do sistema quando as demais entradas $u_k(t)$ são identicamente nulas ($k \neq j$), e $g_{ij}(t)$ é a **resposta ao impulso** correspondente.

Obs: Relembre de Álgebra Linear que, dada uma matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\det(M) \neq 0$, então a matriz inversa $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe e é determinada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\mathrm{Adj}(M),$$

onde $\text{Adj}(M) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz adjunta de M: $\text{Adj}(M) = C'$, com $C = (c_{ij})$ e $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$, onde $M_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ é a submatriz obtida de M ao se eliminar a linha i e a coluna j.

Em particular, quando $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ com $\det(M) \neq 0$, então

$$M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}.$$

Relembre que a matriz de transferência é dada por

$$G(s) = (G_{ij}(s)) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)} C\text{Adj}(sI - A)B + D.$$

Temos que cada elemento da matriz $\text{Adj}(sI - A)$ é um polinômio em s de grau menor ou igual a $n-1$, e o polinômio $\det(sI - A)$ tem grau n. Portanto, cada elemento $G_{ij}(s)$ de $G(s)$ é uma função de transferência racional da forma $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$, onde $p_{ij}(s)$ e $q_{ij}(s)$ são polinômios em s com $\text{grau}(p_{ij}(s)) \leq \text{grau}(q_{ij}(s)) \leq n$.

Note que:

1. Não há cancelamentos polo-zero num certo elemento $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ da matriz de transferência $G(s)$ **se e somente se** $q_{ij}(s) = \det(sI - A)$ (com $\text{grau}(q_{ij}(s)) = n$);

2. Se $D = 0$, então $\text{grau}(p_{ij}(s)) < \text{grau}(q_{ij}(s))$ (sem transferência direta) em **cada** elemento $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ de $G(s)$.

Dizemos que $p \in \mathbb{C}$ é um **polo** da matriz da transferência $G(s)$ quando p é um polo de **algum** elemento de $G(s)$. Assim, cada polo de cada elemento de $G(s)$ é um polo da matriz de transferência $G(s)$. Como os autovalores da matriz A são as raízes de $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$, concluímos que **todo polo** da matriz de transferência $G(s)$ é um **autovalor** da matriz A. No entanto, nem todo autovalor de A é um polo de $G(s)$ devido a possíveis cancelamentos polo-zero nos elementos de $G(s)$.

Além disso, como $x(t) = e^{At}x_0$, $t \geq 0$, é a solução da equação de estado $\dot{x} = Ax$ $(u = 0)$ para a condição inicial $x(0) = x_0$, onde $\mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A)\} = e^{At}$, $t \geq 0$, decorre que todo polo de $X(s)$ (para $u = 0$) é um autovalor da matriz A. Assim, por simplicidade, de agora em diante denominaremos os autovalores da matriz A de **polos**.

A noção de **zeros** de uma matriz de transferência $G(s)$ é mais difícil de ser colocada, e não será vista no nosso curso. Isto será abordado na disciplina *Controle Multivariável*. Para maiores detalhes, veja o livro do Chen.

Exemplo 1: Considere o sistema ($n = 2$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = x,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução $x(t)$, $t \geq 0$, para a condição inicial $x_0 = [1 \ \ 0]'$ considerando entrada nula ($u = 0$). Encontre também a matriz de transferância $G(s)$ e determine seus polos.

Solução: Note que

$$C = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que $x(t) = e^{At}x_0$, $t \geq 0$, com

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}, \, t \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} &= \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2s + 1}}_{=(s+1)^2 = det(sI - A)} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)^2} & \dfrac{-1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At}, \quad t \geq 0.$$

Logo,

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Por fim,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Os polos de $G(s)$ são $p_1 = p_2 = -1$, coincidindo com os polos da matriz A. Note que não tivemos cancelamentos polo-zero em $G_{11}(s)$ e em $G_{21}(s)$.

Exemplo 2: Para o sistema ($n = 3$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2.25 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} x,$$

temos que

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cancel{(s+3)^2}}{(s+2)\cancel{(s+3)^2}} \\ \dfrac{5\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} \\ \dfrac{5}{(s+3)^2} \end{bmatrix}.$$

Os polos de A são $p_1 = -2, p_{2,3} = -3$, coincidindo com os polos de $G(s)$. No entanto, observe que houve um cancelamento polo-zero em $G_{11}(s)$ e em $G_{21}(s)$.

Exemplo 3: Para o sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x,$$

temos que

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}.$$

Os polos de A são $p_1 = -2, p_2 = -3$, mas a função de transferência $G(s)$ possui somente um polo em $p = -3$ devido a um cancelamento polo-zero.

8.2 Estabilidade

Considere um sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du.$$

Definição (Estabilidade Interna): Assume que $u = 0$ (entrada nula). Dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **estável** do sistema quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \text{ para } t \geq 0.$$

Quando $x^e = 0$ não é estável, dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **instável**. Dizemos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema quando $x^e = 0$ é estável e, além disso, dada qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}x(0) = 0$.

Definição (Estabilidade Externa): Assuma que $x(0) = 0$ (condição inicial nula). Dizemos que o sistema acima é **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) estável** quando, para qualquer entrada limitada $u(t)$, $t \geq 0$, temos que a **resposta estado nulo** $y(t) = y_{esn}(t) = \mathscr{G}(t) * u(t)$, $t \geq 0$, é limitada. Quando o sistema não é BIBO estável, dizemos que o mesmo é **BIBO instável**. Isto significa que existe ao menos uma entrada limitada $u(t)$, $t \geq 0$, para a qual a resposta estado nulo $y(t) = y_{esn}(t) = \mathscr{G}(t) * u(t)$, $t \geq 0$, **não é limitada**.

Obs: Relembre que uma aplicação v: $[0,\infty) \to \mathbb{R}^q$ é **limitada** quando existe $0 < M_v < \infty$ tal que

$$\|v(t)\| \leq M_v, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Teorema: Considere um sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du.$$

Então:

1. O ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é instável caso a matriz A possua **algum** polo (autovalor) com parte real positiva (i.e. no SPD);

2. O ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** a matriz A possui **todos** os polos (autovalores) com parte real negativa (i.e. estão no SPE);

3. O sistema é BIBO estável **se e somente se** cada elemento $G_{ij}(s)$ da matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável, ou seja, todos os polos de $G(s)$ estão no SPE.

Obs 1: Relembre que todo polo de $G(s)$ é um polo (autovalor) da matriz A. Portanto: (a) se $G(s)$ possui algum polo no SPD, então o sistema é BIBO instável e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio instável; e (b) se todos os polos da matriz A estão no SPE, então o $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, além disso, o sistema é BIBO estável. No entanto, um sistema pode ser BIBO estável mas $x^e = 0$ não ser globalmente assintoticamente estável (devido a cancelamentos polo-zero nos elementos de $G(s)$).

Obs 2: Relembre que a solução de $\dot{x} = Ax$ para a condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0,$$

com

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI-A)/\det(sI-A)\} = e^{At}, \ t \geq 0.$$

Portanto, quanto mais afastados da origem estiverem os polos da matriz A no SPE, mais rápida será a convergência da solução $x(t)$ para $x^e = 0$.

Exemplo: Considere (novamente) o sistema ($n = 2$ estados, $m = 1$ entrada e $p = 2$ saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x \quad (i.e.\ C = I).$$

Temos que

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI-A) = s(s+2)+1 = (s+1)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -1 \in \text{SPE}$$

Logo, $x^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável e, portanto, o sistema é BIBO estável. A BIBO estabilidade também pode ser verificada diretamente (os polos de $G(s)$ são $p_{1,2} = -1 \in$ SPE):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

8.3 Controlabilidade e Observabilidade

Considere (novamente) um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du.$$

Definição: Dizemos que o sistema é **controlável** quando, cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada estado final $x_T \in \mathbb{R}^n$, existe uma entrada u: $[0,T] \to \mathbb{R}^m$ tal que a solução x: $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ do sistema para a condição inicial $x(0) = x_0$ satisfaz $x(T) = x_T$, para algum $T > 0$. Isto significa que sempre podemos levar o sistema de todo estado inicial para qualquer estado final desejado em tempo finito através de uma entrada adequada. Dizemos que o sistema é **não-controlável** quando ele não for controlável.

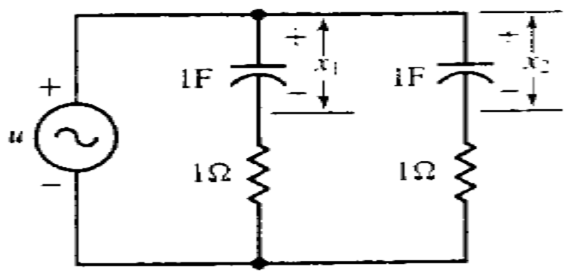


Figura 18 – Exemplo de um circuito elétrico **não-controlável**: a tensão de entrada $u(t)$ nunca é capaz de transferir as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para estados finais distintos $x_1(T) \neq x_2(T)$ a partir das condições iniciais $x_1(0) = x_2(0)$ (capacitores em paralelo).

Definição: Dizemos que o sistema é **observável** quando, para todo estado inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ desconhecido, existe $T > 0$ tal que o conhecimento da entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e da saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ no intervalo de tempo $[0,T]$ é suficiente para determinado de maneira única o estado inicial $x(0)$. Dizemos que o sistema é **não-observável** quando ele não for observável.

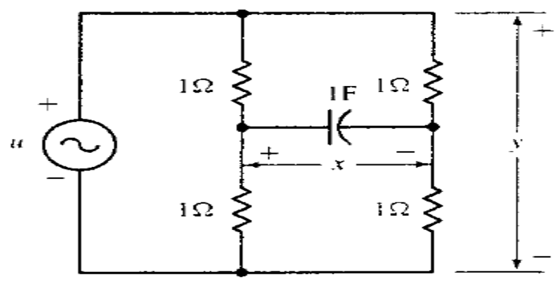


Figura 19 – Exemplo de um circuito elétrico **não-observável**: quando $u = 0$, temos que $y = 0$ devido à simetria do circuito. Assim, mesmo conhecendo $u(t) = y(t) = 0$, para $t \geq 0$, não temos como determinar de maneira única a tensão inicial $x(0)$ do capacitor.

Para um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

definimos a **matriz de controlabilidade** por

$$\mathscr{C} = [B \ AB \ A^2B \ \ldots \ A^{n-1}B]_{n\times nm}$$

e a **matriz de observabilidade** por

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{np\times n}.$$

Teorema: Considere um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

Então:

1. O sistema é controlável **se e somente se** posto$(\mathscr{C}) = n$ (posto completo de linha). Neste caso, dizemos simplesmente que o par (A,B) é controlável, pois a matriz de controlabilidade $\mathscr{C}$ só depende das matrizes A e B;

2. O sistema é observável **se e somente se** posto$(\mathscr{O}) = n$ (posto completo de coluna). Neste caso, dizemos simplesmente que o par (A,C) é observável, pois a matriz de observabilidade $\mathscr{O}$ só depende das matrizes A e C;

3. O par (A,C) é observável **se e somente se** o par (A',C') é controlável (**dualidade**);

4. Quando o sistema é SISO ($m = p = 1$), temos que o sistema é controlável **e** observável **se e somente se** não há cancelamentos polo-zero na função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Obs 1: Note que, quando $m = 1$ (uma única entrada), o sistema é controlável **se e somente se** $\det(\mathscr{C}) \neq 0$. E, quando $p = 1$ (uma única saída), o sistema é observável **se e somente se** $\det(\mathscr{O}) \neq 0$.

Obs 2: Temos os seguintes comandos no Matlab:

1. `sys = ss(A,B,C,D)` $\Rightarrow$ define o modelo de estado $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$;
2. `G = tf(sys)` $\Rightarrow$ calcula a matriz de transferência $G = C(sI - A)^{-1}B + D$;
3. `minreal(G)` $\Rightarrow$ realiza os possíveis cancelamentos polo-zero na matriz de transferência G;
4. `zpk(G)` $\Rightarrow$ coloca cada elemento de G na forma fatorada;
5. `MC = ctrb(A,B)` $\Rightarrow$ calcula a matriz de controlabilidade $\mathscr{C}$;
6. `MO = obsv(A,C)` $\Rightarrow$ calcula a matriz de observabilidade $\mathscr{O}$;
7. `svd(M)` $\Rightarrow$ calcula os valores singulares de uma matriz M. O número de valores singulares não-nulos é igual a posto(M). Utilizar o comando `svd` para calcular o posto de uma matriz M é numericamente mais robusto do que determinar o posto de M diretamente pelo comando `rank`(M).

Exemplo 1 (Sistema Plataforma – usado no estudo de sistemas de suspensão de automóveis):

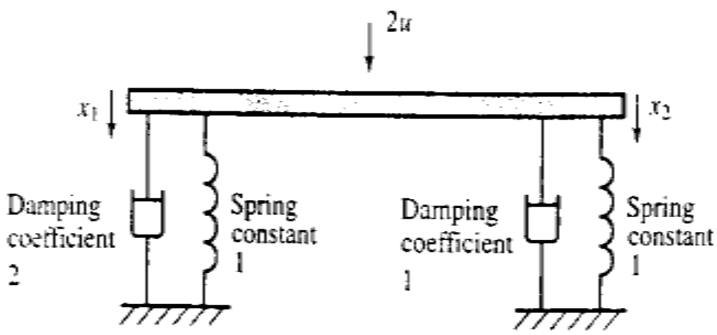


Figura 20 – Sistema plataforma.

A equação de estado deste sistema é dada por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u.$$

Como

$$\mathscr{C} = [B\ \ AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2\ (\det(\mathscr{C}) = -0.25),$$

concluímos que o sistema é controlável.

Exemplo 2: Considere um sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 4$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathscr{C} = [B\ \ AB\ \ A^2B\ \ A^3B]_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(\mathscr{C}) = 4}_{(det(\mathscr{C})=36)},$$

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(\mathscr{O}) = 4}_{(det(\mathscr{O})=1)}.$$

Assim, o sistema é controlável e observável.

Exemplo 3: Considere (novamente) o sistema SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathscr{C} = [B\ \ AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2\ (\det(\mathscr{C}) = 10),$$

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}) = 1\ (\det(\mathscr{O}) = 0).$$

Portanto, o sistema é controlável, mas não é observável. Ressaltamos que este sistema SISO não poderia ser controlável **e** observável, pois há um cancelamento polo-zero em sua função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}.$$

8.4 Estabilização por Realimentação de Estado

De agora em diante, vamos considerar sistemas LTI modelados por (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx,$$

ou seja, $D = 0$ (sem transmissão direta entre o vetor de entrada e o vetor de saída). Considere a **realimentação (linear) de estado**

$$u = r - Kx \quad (\text{ou seja, } u(t) = r(t) - Kx(t) \in \mathbb{R}^m, \text{ para } t \geq 0),$$

onde $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada (vetor de referência ou uma nova realimentação de estado) e $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz **constante**. Note que a i-ésima componente do controle $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ é dada por

$$u_i(t) = r_i(t) - \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j = r_i(t) - \big(k_{i1}x_1(t) + \cdots + k_{in}x_n(t)\big), \quad t \geq 0,$$

para $i = 1, \ldots, m$. Denominamos K de **matriz de ganho** ou, simplesmente, de **ganho de realimentação**.

Substituindo tal realimentação no modelo de estado acima, obtemos o sistema em **malha-fechada**

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br,$$
$$y = Cx.$$

Logo, a matriz de transferência em **malha-fechada** é dada por

$$G_{MF}(s) = C\big(sI - (A - BK)\big)^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G_{MF}(s)R(s).$$

Desse modo, todo polo de $G_{MF}(s)$ é um polo (autovalor) da matriz $A - BK$, ou seja, uma realimentação de estado $u = r - Kx$ desloca os polos da matriz de transferência em **malha-aberta** $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ para os polos de $G_{MF}(s)$. No entanto, pode-se demonstrar que uma **realimentação de estado** da forma $u = r - Kx$ **não afeta os zeros** de $G(s)$, ou seja, $G(s)$ e $G_{MF}(s)$ possuirão os **mesmos zeros** caso não ocorra nenhum cancelamento polo-zero em $G_{MF}(s)$.

Definição (Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos): Encontrar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que os todos pólos da matriz $(A - BK)$ do sistema em malha-fechada sejam posicionados arbitrariamente no plano complexo, onde $u = r - Kx$ é a realimentação de estado. Em particular, se todos os pólos de $(A - BK)$ forem posicionados no SPE, então asseguramos que $x^e = 0$ é um ponto

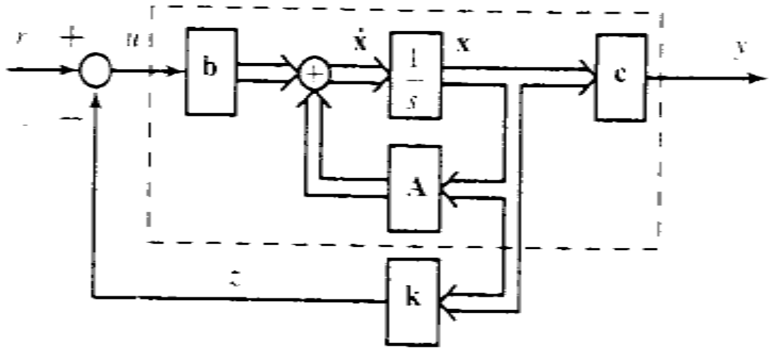


Figura 21 – Sistema em malha-fechada com a realimentação (linear) de estado $u = r - Kx$.

de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada e que a matriz de transferência $G_{MF}(s)$ é BIBO estável.

O próximo resultado garante que a controlabilidade é preservada por uma realimentação de estado da forma $u = r - Kx$:

Teorema 1: O par (A, B) é controlável **se e somente se** o par $(A - KB, B)$ é controlável, onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é qualquer matriz constante.

E resultado abaixo assegura que o **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos** sempre tem solução para sistemas controláveis:

Teorema 2: Os pólos da matriz $A - BK$ podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **se e somente se** o par (A, B) é controlável.

Obs: Veremos como determinar uma matriz K adequada na Seção 8.7.

Exemplo: Considere o sistema SISO $(m = p = 1)$ com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \;\; 2]}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathscr{C} = [B \;\; AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2 \; (\det(\mathscr{C}) = 2),$$

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}) = 2 \; (\det(\mathscr{O}) = -10).$$

Logo, o sistema é controlável e observável. Temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s}{(s - 3.449)(s + 1.449)}.$$

Agora, considere a realimentação de estado

$$u = r - \underbrace{[3 \;\; 1]}_{=K} x = r - 3x_1 - x_2.$$

Assim, o sistema em malha-fechada é dado por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A-BK} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} r, \quad y = \underbrace{[1 \;\; 2]}_{=C} x.$$

Temos que

$$\mathscr{C}_{MF} = [B \;\; (A-BK)B]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}_{MF}) = 2 \; (\det(\mathscr{C}_{MF}) = 2),$$

$$\mathscr{O}_{MF} = \begin{bmatrix} C \\ C(A-BK) \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}_{MF}) = 1 \; (\det(\mathscr{O}_{MF}) = 0).$$

Logo, o sistema em malha-fechada é controlável (como tinha que ser pelo Teorema 1 acima), mas não é observável.

Como o sistema é SISO, sabemos que terá que ocorrer um cancelamento polo-zero na função de transferência em malha-fechada (veja o Teorema da Seção 2.3). De fato, a função de transferência em malha-fechada é dada por

$$G_{MF}(s) = C(sI - (A-BK))^{-1}B = \frac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(s-1)} = \frac{2}{(s-1)}.$$

Concluímos assim que uma realimentação de estado da forma $u = r - Kx$ pode fazer com que um sistema observável se torne não-observável em malha-fechada.

8.5 Estimador de Estado

Definimos na seção anterior o conceito de realimentação de estado:

$$u = r - Kx.$$

Relembre que isto significa que

$$u(t) = r(t) - Kx(t), \quad t \geq 0.$$

Sempre que escolhemos uma dada realimentação de estado, fica implícito que estamos assumindo que todas as variáveis de estado $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ do vetor de estado $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^n$ podem ser realimentadas, ou seja, todas elas podem ser medidas por sensores. No entanto, isto nem sempre será possível, pois: (a) podemos não ter acesso direto a certas variáveis de estado (a corrente num certo indutor, por exemplo); (b) os sensores necessários podem não estar disponíveis para uso ou serem em número insuficiente (precisamos de dois tacogeradores, mas só temos um disponível, por exemplo); e/ou (c) os sensores que precisamos são muito caros.

Uma alternativa para tal problema é a seguinte: projetarmos um dispositivo que estime as variáveis de estado que não podem ser medidas diretamente. Tal sistema é denominado de **estimador de estado** ou **observador de estado**. Denotaremos por $\widehat{x}$ uma certa estimação do vetor de estado x.

Considere um sistema LTI (n estados, m entradas e p saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx.$$

Assuma que as matrizes A, B, C são conhecidas e que tanto a entrada $u(t)$ quanto a saída $y(t)$ podem ser medidas, para $t \geq 0$. No entanto, consideramos que o vetor de estado $x(t)$ não pode ser medido. O problema é então obtermos uma estimação adequada $\widehat{x}(t)$ do vetor estado $x(t)$, para $t \geq 0$.

Uma ideia bem simples é definirmos um **estimador de estado de malha-aberta** como uma réplica da equação de estado sistema original:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu.$$

Assim, se $\widehat{x}(0) = x(0)$, então, para qualquer entrada aplicada $u(t)$, $t \geq 0$, teremos que $\widehat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq 0$. Desse modo, o problema passa a ser determinarmos a condição inicial $x(0)$.

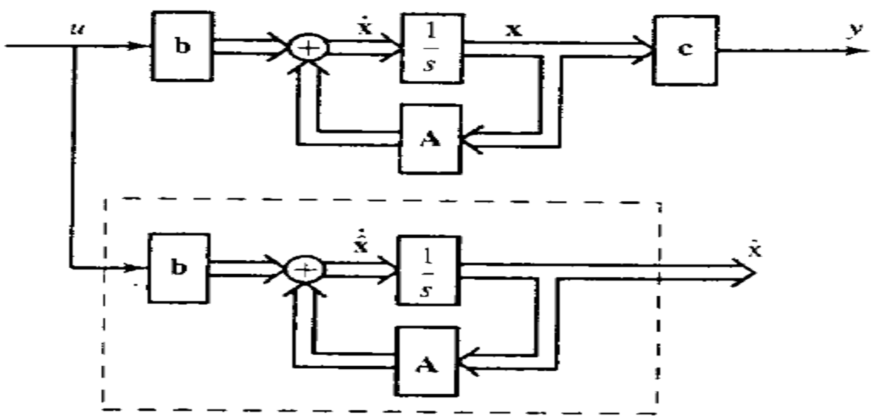


Figura 22 – Estimador de estado de malha-aberta, o qual pode ser implementado através de amp-ops, por exemplo.

Suponha que o sistema original é observável. Logo, podemos determinar $x(0)$ a partir de $u(t)$ e $y(t)$, para t pertencente a um certo intervalo, digamos $t \in [0, t_1]$. Assim, é possível calcularmos $x(t_2)$ a partir da expressão analítica explícita da solução $x(t)$ (veja a Seção 2.1), onde $t_2 \geq t_1$, e então escolhemos $\widehat{x}(t_2) = x(t_2)$. Com isso, $\widehat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq t_2$, ou seja, teremos uma estimação exata do vetor de estado $x(t)$. Concluímos então que se o sistema original for observável, então o estimador de estado de malha-aberta acima soluciona o problema de estimação.

No entanto, tal estimador de malha-aberta apresenta algumas limitações. Primeiramente, toda vez que formos utilizar o estimador, sua condição inicial terá que ser determinada a partir da propriedade de observabilidade do sistema original.

Além disso, ao consideramos o erro de estimação $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, temos que o mesmo é solução da seguinte equação de estado

$$\dot{e} = x - \widehat{x} = Ax + Bu - (A\widehat{x} + Bu) = A(x - \widehat{x}) = Ae.$$

Note que $e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Assim, se $e(t_2) = x(t_2) - \widehat{x}(t_2) = 0$ (i.e. $x(t_2) = \widehat{x}(t_2)$), então $e(t) = 0$, ou seja, $\widehat{x}(t) = x(t)$, para $t \geq t_2$. Mas, na prática, sempre teremos que $\widehat{x}(t_2) \neq x(t_2)$ devido a pequenas perturbações/ruídos externos. O problema então se agrava quando a matriz A possui algum polo com parte real positiva, de modo que $e = 0$ é um ponto de equilíbrio instável (relembre que $e(t) = \exp(At)e(t_2)$, $t \geq t_2$). Em tal caso, mesmo que tenhamos $\widehat{x}(t_2) \cong x(t_2)$, poderemos ter uma magnitude relativamente grande para o erro de estimação $e(t)$ no decorrer do tempo.

Estas restrições podem ser facilmente contornadas se injetarmos a saída $y(t)$ do sistema no estimador de estado de malha-aberta através do acréscimo de um termo de correção da forma $L(y - C\widehat{x})$, onde $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ é uma matriz **constante**:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x}).$$

Ressaltamos que, como $y = Cx$, podemos considerar que $\widehat{y} = C\widehat{x}$ é uma estimação da saída y. Assim, o termo de correção adicionado $L(y - C\widehat{x})$ corresponde a multiplicarmos o erro de estimação da saída $y - \widehat{y} = y - C\widehat{x}$ pela matriz (de ganho) L. Com tal modificação, temos que a dinâmica do erro de estimação do estado $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ é dada pela seguinte equação de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{e} = \dot{x} - \dot{\widehat{x}} &= Ax + Bu - \left[A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x})\right], \\
&= Ax + Bu - \left[A\widehat{x} + Bu + L(Cx - C\widehat{x})\right], \\
&= A(x - \widehat{x}) - LC(x - \widehat{x}), \\
&= (A - LC)e.
\end{aligned}$$

Desse modo, mostramos que estimador de estado definido por

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x}),$$

assegura que

$$\dot{e} = (A - LC)e,$$

onde $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ é o erro de estimação. Suponha que a matriz L foi escolhida de modo que todos os polos da matriz $A - LC$ estão no SPE. Assim, $e = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Em particular, dada qualquer condição inicial $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ para o erro de estimação, teremos que

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} [x(t) - \widehat{x}(t)] = 0,$$

ou seja, o erro de estimação $e(t)$ converge assintoticamente para zero quando $t \to \infty$.

Portanto, mesmo que em um certa situação prática seja possível determinarmos uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, sempre teremos que $\widehat{x}(0) \neq x(0)$ devido a pequenas perturbações/ruídos externos. No entanto, isto não será problema, pois o estimador de estado acima garante que $\widehat{x}(t) \cong x(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande. Além disso, em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial $x(0)$ do sistema, sempre poderemos escolher $\widehat{x}(0) = 0$, pois teremos $\widehat{x}(t) \cong x(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande.

Considere uma planta (sistema LTI) modelada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \qquad (\star) \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Assuma que as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são conhecidas e que tanto a entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ quanto a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ podem ser medidas, para $t \geq 0$.

Denominamos o sistema

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + L(y - C\widehat{x}) = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly,$$

de **estimador de estado assintótico** (ou **observador de estado assintótico** ou, simplesmente, **observador**) da planta $(\star)$ acima quando, para qualquer erro de estimação inicial $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, temos que $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$. A matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é denominada de **matriz de ganho do observador**. De acordo com a exposição anterior, este sistema corresponderá a um observador caso todos os polos da matriz $A - LC$ estejam no SPE, pois $\dot{e} = (A - LC)e$. O próximo resultado estabelece que isto será atingido sempre que a planta $(\star)$ for observável.

Teorema: Todos os polos da matriz $A - LC$ podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ **se e somente** o par (A, C) é observável.

Obs: Veremos como determinar uma matriz L adequada na Seção 8.7.

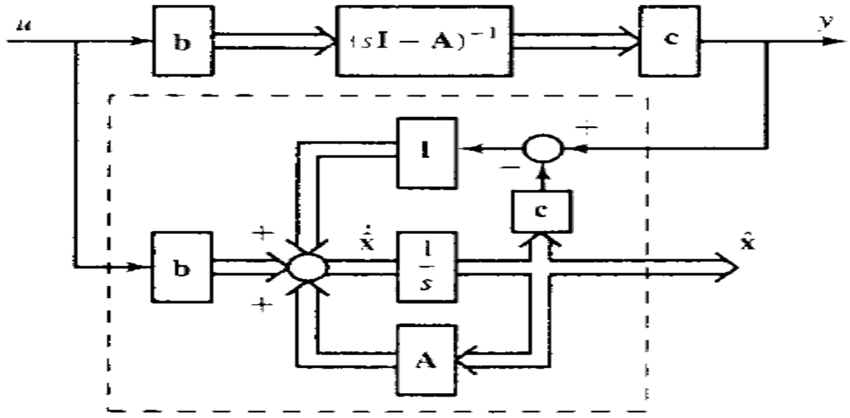


Figura 23 – Planta (acima) com seu observador (abaixo).

8.6 Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas e p saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu,\\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Relembre da Seção 2.5. que, fixada uma realimentação de estado $u = r - Kx$, temos que o sistema em malha-fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(r - Kx) = (A - BK) + Br,\\ y &= Cx,\end{aligned}$$

e que todos os polos da matriz $A - BK$ podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par (A, B) for controlável.

Relembre também da Seção 2.6. que, caso o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ da planta não puder ser realimentado (medido), podemos utilizar o observador (assintótico)

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly,$$

para obtermos uma estimação $\widehat{x}(t)$ de $x(t)$, sendo que todos os polos de $A - LC$ ($\dot{e} = (A - LC)e$, com $e = x - \widehat{x}$) podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par (A, C) for observável.

Surge então a seguinte pergunta: Na situação em que o vetor de estado $x(t)$ da planta não pode ser realimentado (medido), o que acontece se realimentarmos o estado estimado $\widehat{x}(t)$ no lugar de $x(t)$, ou seja, se aplicarmos na planta

$$u = r - K\widehat{x}. \quad ?$$

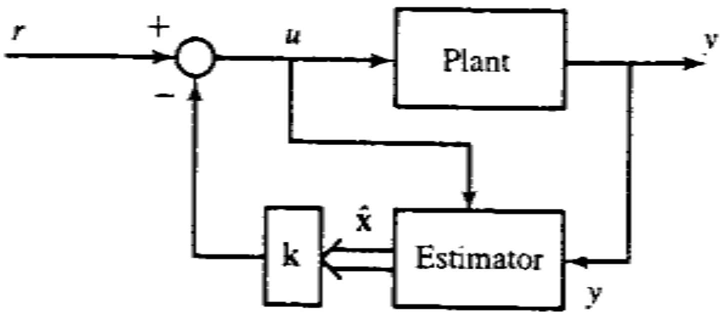


Figura 24 – Configuração controlador-observador.

Isto é ilustrado na Figura abaixo. Tal estrutura de controle é denominada de **configuração controlador-observador**. Note que o vetor de estado deste sistema é $\widetilde{x} = (x, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Vamos responder na sequência a pergunta que acabamos de levantar.

Temos a planta

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx,$$

e o observador

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly.$$

Substituindo $y = Cx$ no observador, substituindo

$$u = r - K\widehat{x},$$

em ambos, e definindo o vetor de estado $\widetilde{x} = (x, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$, obtemos assim o modelo de estado da configuração controlador-observador:

$$\dot{\widetilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widehat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\widetilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \widehat{x} \end{bmatrix}}_{=\widetilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{=\widetilde{B}} r,$$

$$y = \underbrace{[C \quad 0]}_{=\widetilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \widehat{x} \end{bmatrix}}_{=\widetilde{x}}.$$

Vamos agora representar o sistema controlador-observador em novas coordenadas $z = T\widetilde{x}$, onde $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é invertível. Isto permitirá responder nossa pergunta de maneira fácil e direta.

Considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \widehat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \widehat{x} \end{bmatrix}}_{=\widetilde{x}}.$$

Note que $T^{-1} = T$. Nas novas coordenadas $z = T\widetilde{x}$, o modelo de estado do sistema controlador-observador é dado por:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\widetilde{x}} = T\left(\widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}r\right) = T\widetilde{A}\underbrace{\widetilde{x}}_{=T^{-1}z} + T\widetilde{B}r = T\widetilde{A}T^{-1}z + T\widetilde{B}r, \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}}_{=T\widetilde{A}T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=T\widetilde{B}} r, \\
y &= \widetilde{C}\widetilde{x} = \widetilde{C}T^{-1}z, \\
&= \underbrace{[C \;\; 0]}_{=\widetilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z}.
\end{aligned}
$$

Relembre de Álgebra Linear que como a matriz $T\widetilde{A}T^{-1}$ é bloco triangular, temos que o conjunto dos autovalores de $T\widetilde{A}T^{-1}$ é igual à união (com repetição) do conjunto dos autovalores de $A - BK$ com o conjunto dos autovalores de $A - LC$.

Relembre também que os autovalores das matrizes $\widetilde{A}$ e $T\widetilde{A}T^{-1}$ coincidem, pois

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - T\widetilde{A}T^{-1}) &= \det(\lambda \underbrace{TT^{-1}}_{=I} - T\widetilde{A}T^{-1}) = \det(T(\lambda I - A)T^{-1}), \\
&= \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) = \det((\lambda I - A)\underbrace{T^{-1}T}_{=I}), \\
&= \det(\lambda I - A).
\end{aligned}
$$

Mostramos assim que os autovalores da matriz $\widetilde{A}$ do sistema controlador-compensador são a união (com repetição) dos autovalores das matrizes $A - BK$ e $A - LC$.

Suponha que a planta é controlável e observável. Concluímos então que (agora chegamos na resposta da pergunta levantada):

(a) Os autovalores da matriz $\widetilde{A}$ do sistema controlador-compensador podem ser arbitrariamente posicionados SPE por uma escolha **independente** das matrizes de ganho K e L: K corresponde ao controlador $u = r - K\widehat{x}$ (realimentação baseada no estado estimado para os autovalores de $A - BK$) e L corresponde ao observador $\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly$ (para os autovalores de $A - LC$). Isto assegurará que $\widetilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e, assim, $\lim_{t\to\infty} \widetilde{x}(t) = \lim_{t\to\infty}(x(t), \widehat{x}(t)) = 0$ para qualquer $\widetilde{x}(0) = (x(0), \widehat{x}(0))$ (com $r = 0$). Em particular, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ (com $r = 0$);

(b) O projeto das matrizes de ganho K e L para o posicionamento dos polos da matriz $\widetilde{A}$ no SPE é realizado **como se** o vetor de estado $x(t)$ da planta pudesse ser efetivamente medido e utilizássemos o controlador $u = r - Kx$ na planta (o sistema em malha-fechada seria $\dot{x} = (A - BK)x + Br$, $y = Cx$), e **como se** o observador

$\dot{\widehat{x}} = (A-LC)\widehat{x} + Bu + Ly$ para a planta fosse independente de tal realimentação de estado! Tal propriedade é denominada de **princípio da separação**;

(c) Para o sistema controlador-observador, relembre que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad y = [C \;\; 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

Assim, percebemos que a dinâmica do erro de estimação $e = x - \widehat{x}$ é dada por $\dot{e} = (A-LC)e$, ou seja, a mesma independe do vetor de estado $x(t)$ e do ganho K. Suponha que os polos de $A-LC$ são rápidos, ou seja, estão relativamente longe da origem (no SPE!). Assim, para $t \geq 0$ suficientemente grande, tudo se passa como se $e(t) = 0$, ou seja, $\widehat{x}(t) = x(t)$ (estimação exata). Consequentemente, para $t \geq 0$ grande, percebemos que tudo se passa como se

$$\dot{x} = (A-BK) + Br, \quad y = Cx,$$

o que coincide com o modelo em malha-fechada da planta com a realimentação de estado $u = r - Kx$! **Uma prática comum é escolhermos os pólos de $A-LC$ em torno de cinco vezes mais rápidos que os polos de $A-BK$ (SPE!)**;

(d) Pode-se demonstrar que a matriz de transferência do sistema controlador-observador é dada por

$$G(s) = C\big(sI - (A-BK)\big)^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G(s)R(s),$$

o que coincide a matriz de transferência da planta em malha-fechada com a realimentação de estado $u = r - Kx$ (veja a Seção 2.4.)! Justificativa: a matriz de transferência pressupõe que a condição inicial do sistema controlador-observador é nula, ou seja, $\widehat{x}(0) = x(0) = 0$. Logo, $e(0) = 0$ e, assim, $e(t) = 0$, $t \geq 0$. Desse modo, a relação entre $R(s)$ e $Y(s)$ é determinada por (veja o Item (c) acima)

$$\dot{x} = (A-BK) + Br, \quad y = Cx.$$

Exemplo: Considere a planta SISO ($m = p = 1$) com $n = 2$ estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \;\; 0]}_{=C} x = x_1.$$

Os autovalores de A são: $\pm\sqrt{20}$. Logo, a origem $x = 0$ é instável ($u = 0$). Devemos então projetar um controlador que estabilize o sistema em malha-fechada. Temos que

$$\mathscr{C} = [B \;\; AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2 \; (\det(\mathscr{C}) = -1),$$

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}) = 2 \; (\det(\mathscr{O}) = 1).$$

Logo, o sistema é controlável e observável, e assim, podemos posicionar arbitrariamente os polos de $A-BK$ e $A-LC$ no SPE para uma escolha adequada de K e L.

Note que $y = x_1$. Suponha que a variável de estado x_2 não pode ser medida. Pelo propriedade da separação, podemos projetar as matrizes de ganho K (da realimentação do estado estimado) e L (do observador) de maneira independente e como se pudéssemos aplicar a realimentação de estado $u = r - Kx$ na planta. Considere que:

- Os polos desejados referentes à realimentação, i.e. para a matriz $A-BK$ do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado $u = r - Kx$, são: $-1.8 \pm j2.4$;
- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz $A-LC$ de $\dot{\widehat{x}} = (A-LC-BK)\widehat{x} + Ly$, são: -8, -8.

Uma escolha adequada é (mostraremos na Seção 2.7 os cálculos realizados na determinação de K e L):

$$K = [29.6 \quad 3.6], \qquad L = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}.$$

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A-BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4,$$
$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A-LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8.$$

Como o estado x_2 não pode ser realimentado (medido), devemos utilizar a configuração controlador-observador com:

- Controlador: $u = r - K\widehat{x} = r - 29.6\widehat{x}_1 - 3.6\widehat{x}_2$ (realimentação do estado estimado);
- Observador: $\dot{\widehat{x}} = (A - LC - BK)\widehat{x} + Ly$.

Logo, os polos da configuração controlador-observador são: $-1.8 \pm j2.4, -8, -8 \in$ SPE. Assim, $\widetilde{x} = (x, \widehat{x}) = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Simulações: veja o arquivo `ExemploControladorObservador.mdl` no Moodle

8.7 Determinação das Matrizes de Ganho K e L para Imposição de Polos

1. **Caso SISO ($m = p = 1$):**
   - **Determinação de $K = [k_1 \ \dots \ k_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}$:**

1. Verifique que par (A,B) é controlável ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$);

2. Seja $\det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ (polinômio característico de A);

3. Seja $v_n = B$ e calcule $v_{i-1} = Av_i + a_{i-1}B \in \mathbb{R}^n$, $i = n, \ldots, 2$ (vetores coluna);

4. Defina a matriz $T = [v_1 \;\; \ldots \;\; v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

5. Sejam $p_1, \ldots, p_n$ os polos desejados para $A-BK$. Assim, o polinômio característico de $A-BK$ é dado por $\det\big(sI-(A-BK)\big) = (s-p_1)\cdots(s-p_n) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0$;

6. Defina o vetor $\overline{K} = [d_0 - a_0 \;\; \ldots \;\; d_{n_1} - a_{n-1}]$;

7. Escolha $K = \overline{K}T^{-1} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Isto garante que os polos de $A-BK$ são $p_1, \ldots, p_n$.

- **Determinação de $L = [\ell_1 \;\; \ldots \;\; \ell_n]' \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (por dualidade):**

1. Verifique que par (A, C) é observável ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$);

2. Sejam $p_1, \ldots p_n$ os polos desejados para $A-LC$;

3. Seja $\widetilde{A} = A'$ e $\widetilde{B} = C'$. Assim, o par $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ é controlável;

4. Siga o procedimento acima de modo a determinar $\widetilde{K} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tal que os polos de $\widetilde{A} - \widetilde{B}\widetilde{K}$ sejam $p_1, \ldots, p_n$ (relembre que $\det(sI-A) = \det(sI-A')$);

5. Escolha $L = \widetilde{K}' \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Isto garante que os polos de $A-LC$ são $p_1, \ldots, p_n$, pois $(\widetilde{A} - \widetilde{B}\widetilde{K})' = (\widetilde{A})' - (\widetilde{K})'(\widetilde{B})' = A - LC$.

2. Caso MIMO:

- **Determinação de $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$:**

1. Verifique que par (A, B) é controlável ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$);

2. Sejam $p_1, \ldots, p_n$ os polos desejados para $A-BK$;

3. Escolha quaisquer $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $N \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (vetor coluna) de modo que o par $(A-BM, BN)$ seja controlável;

4. Sejam $A_1 = A - BM \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B_1 = BN \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Assim, o par (A_1, B_1) é controlável;

5. Siga o procedimento anterior do caso SISO de modo a determinar $K_1 \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tal que os polos de $A_1 - B_1 K_1$ sejam $p_1, \ldots, p_n$;

6. Escolha $K = M + NK_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Isto garante que os polos de $A-BK$ são $p_1, \ldots, p_n$.

Obs: No Passo 3 acima, o **probabilidade** de escolhermos M,N de modo que o par $(A-BM,BN)$ seja **não-controlável** é igual a **zero**, ou seja, a **probabilidade** do par $(A-BM,BN)$ ser **controlável** para um "chute aleatório" de M,N é igual a **um**. Existem métodos para se determinar a matriz de ganho K no caso MIMO que não envolvem "chutes aleatórios". No entanto, isto não será visto no nosso curso, mas sim na disciplina *Controle Multivariável*. O comando **place** do Matlab utiliza um algoritmo de otimização para determinar K, com a restrição de que a multiplicidade de cada polo não seja superior ao número m de entradas.

- **Determinação de $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (por dualidade):**

1. Verifique que par (A,C) é observável ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$);

2. Sejam $p_1,\ldots p_n$ os polos desejados para $A-LC$;

3. Seja $\widetilde{A} = A'$ e $\widetilde{B} = C' \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Assim, o par $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ é controlável;

4. Siga o procedimento anterior de modo a determinar $\widetilde{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que os polos de $\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{K}$ sejam $p_1,\ldots,p_n$;

5. Escolha $L = \widetilde{K}' \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Isto garante que os polos de $A-LC$ são $p_1,\ldots,p_n$.

Obs: Quando (A,B) é controlável e (A,C) é observável, sabemos que podemos posicionar arbitrariamente os polos de $A-BK$ (realimentação) e de $A-LC$ (observador) no SPE para uma escolha adequada das matrizes de ganho K e L, respectivamente. No entanto, uma dificuldade técnica é como escolher tais polos (de maneira geral temos vários polos a serem posicionados). Por exemplo, os polos de $A-BK$, referentes à realimentação $u=-Kx$, influenciam no regime transitório de $x(t)$ (oscilação e taxa de convergência) e também no esforço de controle (magnitude e energia de $u(t)=-Kx(t)$). O método denominado **Controle Ótimo** posiciona os polos de $A-BK$ e determina a matriz de ganho K de modo a minimizar uma certa função custo, a qual corresponde a uma ponderação entre a energia do vetor de estado $x(t)$ e a energia da realimentação $u(t)=-Kx(t)$. Por outro lado, os polos de $A-LC$, referentes ao observador, determinam o regime transitório do erro de estimação $e(t)=x(t)-\widehat{x}(t)$, mas também influenciam na atenuação/amplificação de ruídos externos. O **Filtro de Kalman** posiciona os polos de $A-LC$ e determina a matriz de ganho L do observador de modo a minimizar o efeito de tais ruídos no sistema. Tanto **Controle Ótimo** quanto o **Filtro de Kalman** não serão vistos no nosso curso, mas sim na disciplina *Controle Multivariável*.

Exemplo 1: Considere novamente a planta SISO do exemplo da Seção 8.6:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{=C} x = x_1.$$

Relembre que:

- Os polos desejados referentes ao controlador, i.e. para a matriz $A-BK$ do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado $u=r-Kx$, são: $-1.8 \pm j2.4$;

- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz $A-LC$ da dinâmica $\dot{e}=(A-LC)e$ do erro, são: -8, -8.

Vamos agora determinar K e L através dos procedimentos apresentados acima. Começaremos calculando K:

1. Já verificamos na Seção 8.6 que o sistema é controlável;

2. $\det(sI-A)=s^2-20.6=s^2+a_1s+a_0$ (polinômio característico de A);

3. Considere

$$v_2=B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1=Av_2+a_1B=AB=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

4. Considere $T=[v_1 \;\; v_2]=I$;

5. Os polos desejados para $A-BK$ são: $-1.8 \pm j2.5$. Assim, o polinômio característico de $A-BK$ é dado por $\det\big(sI-(A-BK)\big)=(s-(-1.8+j2.4))(s-(-1.8-j2.4))=s^2+3.6s+9=s^2+d_1s+d_0$;

6. Defina o vetor $\overline{K}=[d_0-a_0 \;\; d_1-a_1]=[29.6 \;\; 3.6]$;

7. Escolha $K=\overline{K}T^{-1}=\overline{K}=[29.6 \;\; 3.6]$.

Agora, calcularemos L:

1. Já verificamos na Seção 8.6 que o sistema é observável;

2. Sejam

$$\widetilde{A}=A'=\begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}=C'=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. $\det(sI-\widetilde{A})=\det(sI-A)=s^2-20.6=s^2+a_1s+a_0$;

4. Considere

$$v_2=\widetilde{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1=\widetilde{A}v_2+a_1\widetilde{B}=\widetilde{A}\widetilde{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

5. Considere $T=[v_1 \;\; v_2]=I$;

6. Os polos desejados para $A-LC$ são: -8, -8. Assim, o polinômio característico de $\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{K}$ é dado por $\det\big(sI-(\widetilde{A}-\widetilde{B}\widetilde{K})\big)=(s-(-8))(s-(-8))=s^2+16s+64=s^2+d_1s+d_0$;

7. Defina o vetor $\overline{K} = [d_0 - a_0 \;\; d_1 - a_1] = [84.6 \;\; 16]$;

8. Calcule $\widetilde{K} = \overline{K}T^{-1} = \overline{K} = [84.6 \;\; 16]$, e então escolha $L = \widetilde{K}' = [84.6 \;\; 16]'$.

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4,$$
$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8.$$

Exemplo 2: Considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 0].$$

Temos que

$$\mathscr{C} = [B \;\; AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2 \; (\det(\mathscr{C}) = 100),$$
$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}) = 2 \; (\det(\mathscr{O}) = -1).$$

Logo, (A, B) é controlável e (A, C) é observável. Considere que os polos desejados para $A - BK$ são $\{-4, -4\}$, e que os polos desejados para $A - LC$ são $\{-12, -12\}$.

Começaremos calculando K:

1. Já verificamos que (A, B) é controlável;

2. $\det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1 s + a_0$ (polinômio característico de A);

3. Considere

$$v_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad v_1 = Av_2 + a_1 B = AB + B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix};$$

4. Considere $T = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$;

5. Os polos desejados para $A - BK$ são: -4, -4. Assim, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por $\det\big(sI - (A - BK)\big) = (s+4)(s+4) = s^2 + 8s + 16 = s^2 + d_1 s + d_0$;

6. Defina o vetor $\overline{K} = [d_0 - a_0 \;\; d_1 - a_1] = [16 - 5\sqrt{2} \;\; 7]$;

7. Escolha $K = \overline{K}T^{-1} = [0.8929 \;\; 0.7]$.

Agora, calcularemos L:

1. Já verificamos que (A, C) é observável;

2. Sejam
$$\widetilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & -5\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. $\det(sI - \widetilde{A}) = \det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1 s + a_0$;

4. Considere
$$v_2 = \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \widetilde{A}v_2 + a_1\widetilde{B} = \widetilde{A}\widetilde{B} + \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

5. Considere
$$T = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

6. Os polos desejados para $A - LC$ são: -12, -12. Assim, o polinômio característico de $\widetilde{A} - \widetilde{B}\widetilde{K}$ é dado por $\det\big(sI - (\widetilde{A} - \widetilde{B}\widetilde{K})\big) = (s+12)(s+12) = s^2 + 24s + 144 = s^2 + d_1 s + d_0$;

7. Defina o vetor $\overline{K} = [d_0 - a_0 \;\; d_1 - a_1] = [144 - 5\sqrt{2} \;\; 23]$;

8. Calcule $\widetilde{K} = \overline{K}T^{-1} = [23 \;\; 113.9289]$, e então escolha $L = \widetilde{K}' = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}$.

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4,$$
$$A - LC = \begin{bmatrix} -23 & 1 \\ -121 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -12.$$

Exemplo 3:

8.8 Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação

Veja o Lab 7.

8.9 Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação com Observador de Estado

Veja o Lab 8.

9 Lab 7 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares

Objetivos

Trataremos do problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares. Para isso, primeiramente vamos introduzir o conceito de modelo interno. Em seguida, estudaremos uma estrutura de controle que permite resolver o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação através de uma realimentação de estado. Por fim, aplicaremos as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

9.1 Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw, \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída com $\boxed{m \geq p}$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{q\times p}$ são matrizes **constantes**. Assuma que $r(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, é um dado **vetor de referência** escolhido, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.$$

9.2 Modelo Interno

Vamos considerar que **cada componente** do vetor de referência $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ e do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, é solução de uma

mesma equação diferencial linear homogênea conhecida, ou seja,

$$\underbrace{\left(D^k+\alpha_{k-1}D^{k-1}+\cdots+\alpha_1 D+\alpha_0\right)}_{=\beta(D)} r_i(t)=0, \qquad i=1,\ldots,p,\ t\geq 0,$$

$$\underbrace{\left(D^k+\alpha_{k-1}D^{k-1}+\cdots+\alpha_1 D+\alpha_0\right)}_{=\beta(D)} w_j(t)=0, \qquad j=1,\ldots,q,\ t\geq 0,$$

para uma determinada condição inicial $r_i^{(k-1)}(0),\ldots,r_i^{(1)}(0),r_i^{(0)}(0)$ e $w_j^{(k-1)}(0),\ldots,w_j^{(1)}(0),w_j^{(0)}(0)$, respectivamente, onde $D=d/dt$ é o operador diferencial, $k\geq 0$ é a ordem da equação diferencial, e $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$ são constantes reais. Portanto, a EDO

$$\beta(D)g(t)=0,$$

modela a dinâmica do vetor de referência $r(t)$ e do vetor de perturbação $w(t)$.

Ressaltamos que apesar do vetor de perturbação $w(t)=(w_1(t),\ldots,w_q(t))\in\mathbb{R}^q$, $t\geq 0$, ser não-mensurável, estamos assumindo que conhecemos a equação diferencial $\beta(D)w_j(t)=0$ que cada componente $w_j(t)$, $t\geq 0$, satisfaz. No entanto, a princípio as condições iniciais $w_j^{(k-1)}(0),\ldots,w_j^{(1)}(0),w_j^{(0)}(0)$ são **desconhecidas**.

Obs: Podemos sempre escolher

$$\begin{aligned}\beta(s)&=\boxed{\text{produto dos denomiradores de } R_i(s) \text{ e } W_j(s)}\\ &=s^k+\alpha_{k-1}s^{k-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0,\end{aligned}$$

mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

Exemplo 1: Suponha que $p=q=1$ com $r(t)=A_1 t$ (rampa de coeficiente angular A_1) e $w(t)=B_1$ (degrau de amplitude B_1 desconhecida em princípio), $t\geq 0$. Então, $R(s)=A_1/s^2$, $W(s)=B_1/s$ e

$$\beta(s)=s^2,$$

(e não $\beta(s)=s^2\cdot s=s^3$!) pois

$$\begin{aligned}\beta(D)r(t)&=D^2 r(t)=0, && t\geq 0,\\ \beta(D)w(t)&=D^2 w(t)=0, && t\geq 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2: Suponha que $p=q=2$ com

$$r(t)=(r_1(t),r_2(t))=(\underbrace{A_1}_{degrau},\underbrace{A_2 t}_{rampa}),\ t\geq 0,$$

$$w(t)=(w_1(t),w_2(t))=(\underbrace{B_1}_{degrau}+\underbrace{B_2\sin(2t)}_{senoide},\underbrace{B_3}_{degrau}+\underbrace{B_4\sin(5t)}_{senoide}),\ t\geq 0,$$

onde A_1,A_2,B_1,B_2,B_3,B_4 são constantes com B_1,B_2,B_3,B_4 desconhecidas em princípio. Assim, $R_1(s)=A_1/s$, $R_2(s)=A_2/s^2$, $W_1(s)=B_1/s+2B_2/(s^2+4)$, $W_2(s)=B_3/s+5B_4/(s^2+25)$ e

$$\beta(s)=s^2(s^2+4)(s^2+25)=s^2(s^4+29s^2+100)=\boxed{s^6+29s^4+100s^2},$$

pois

$$\beta(D)g(t) = (D^6 + 29D^4 + 100D^2)g(t) = \left[D^2(D^2+4)(D^2+25)\right]g(t) = 0,\ t \geq 0,$$

para $g(t) = r_1(t), r_2(t), w_1(t), w_2(t)$, $t \geq 0$.

Seja $g(t) = r_1(t), \ldots, r_p(t), w_1(t), \ldots, w_q(t)$, $t \geq 0$. É fácil ver que $g(t)$, $t \geq 0$, é solução da EDO

$$\beta(D)g(t) = \left(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0\right)g(t) = 0,$$

se e somente se $\left(g^{(0)}(t), g^{(1)}(t), \ldots, g^{(k-1)}(t)\right)' \in \mathbb{R}^k$, $t \geq 0$, é solução do sistema autônomo

$$\begin{bmatrix} \dot{g}^{(0)} \\ \dot{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{g}^{(k-2)} \\ \dot{g}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}}_{= M \in \mathbb{R}^{k \times k}} \begin{bmatrix} g^{(0)} \\ g^{(1)} \\ \vdots \\ g^{(k-2)} \\ g^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Logo, este sistema é a representação em espaço de estado da EDO acima.

Defina o sistema (p cópias bloco diagonal do sistema anterior)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk}),$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de estado, $y_m = x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de saída, $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada deste sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1},$$

com $\beta(D) = D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0$.

Denominamos o sistema acima de **modelo interno** (da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$). Pode-se verificar que o modelo interno é controlável, e que sua matriz de transferência é dada pela matriz bloco diagonal

$$G_m(s) = \begin{bmatrix} 1/\beta(s) & & & \\ & 1/\beta(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\beta(s) \end{bmatrix},$$

com $Y_m(s) = X_m(s) = G_m(s)E(s)$.

Obs: Considere que $\beta(D) = D$, ou seja, $\beta(s) = s$. Então $M = 0$ e $N = 1$, ou seja, $\dot{x}_m = e$ (A_m é a matriz nula e $B_m = I$). Logo: $x_m(t) = \int_0^t e(\tau)\, d\tau + x_m(0)$.

9.3 Sistema Aumentado

Relembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu + Ew,\\
y &= Cx + Fw,
\end{aligned}
$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m e,$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m\big(r - Cx - Fw\big) = -B_m C x + A_m x_m - B_m F w + B_m r.$$

Considere o vetor de estado **aumentado** $x_a = (x, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Obtemos assim o **sistema aumentado**:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r,\\
y_a = y &= \underbrace{[C \;\; 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw.
\end{aligned}
$$

9.4 Estrutura de Controle

Considere a estrutura de controle em malha-fechada mostrada na sequencia.

O próximo resultado apresenta condições para que esta estrutura de controle resolva o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Veremos que se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 8.4 da Teoria).

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável, isto é, o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Então, a realimentação de estado

$$u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m,$$

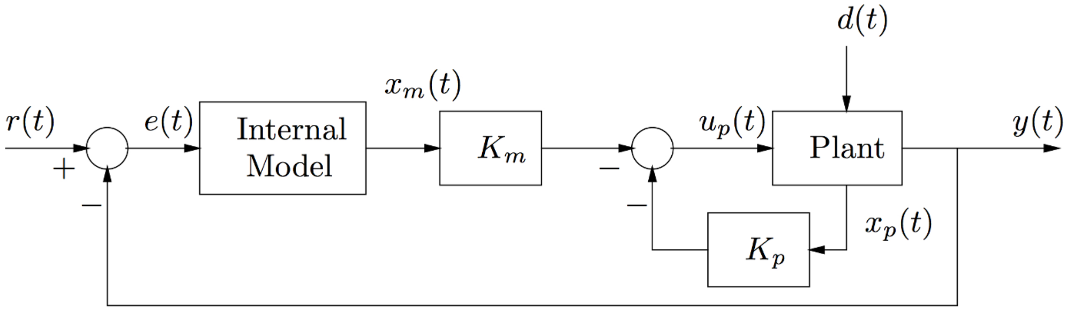


Figura 25 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m\times pk}$, soluciona o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0,$$

para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, quando $r = w = 0$, temos que $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada.

Prova: Com base na Figura acima, no sistema aumentado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{=B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e},$$

$$e = \underbrace{[-C \quad 0]}_{C_e = -C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{[-F \quad I]}_{=D_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e}.$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

Como o par (A_a, B_a) é controlável, podemos sempre encontrar uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Portanto, $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada ($u_e = (w, r) = (0, 0)$). Em particular, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \exp(A_e t) x_a(0) = 0$, para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$.

Relembre que (resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo):

$$E(s) = \underbrace{C_e(sI - A_e)^{-1}x_a(0)}_{=E_0(s)} + \underbrace{G_e(s)U_e(s)}_{=E_{esn}(s)},$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} e_0(t) = C_e \exp(A_e t)x_a(0) = 0,$$

para todo $x_a(0) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Assim, resta-nos mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} e_{esn}(t) = \mathscr{G}_e(t) * u_e(t) = 0.$$

Temos que

$$G_e(s) = (G_{e_{ij}}(s)) = C_e(sI - A_e)^{-1}B_e + D_e, \text{ com } E(s) = G_e(s)U_e(s).$$

Pode-se mostrar que a função de transferência entre a j-ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i-ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = G_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)},$$

onde $\eta_{ij}(s)$ é um polinônimo em s. Portanto,

$$E_i(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)}U_{e_j}(s).$$

Concluímos então que

$$\lim_{t\to\infty} e_{esn}(t) = \mathscr{G}_e(t) * u_e(t) = 0,$$

pois algum fator do polinômio $\beta(s)$ cancelará os polos de $U_{e_j}(s)$ (relembre que os polos da matriz $A_e = A_a - B_aK_a$ não coincidem com nenhuma raiz de $\beta(s)$, por hipótese). Isto termina a prova.

Obs 1: A estrutura de controle da Figura acima é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta) e $K_a = [K_m \quad K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_e = A_a - B_aK_a$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s)$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 4.1 do Lab 4), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, K_a.

Obs 2: Para determinarmos uma matriz de ganho $K_a = [K_m \quad K]$ que soluciona o problema de controle em questão, necessitamos apenas montar as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado e verificar se o par (A_a, B_a) é controlável. Caso o par (A_a, B_a) seja controlável, então basta determinarmos $K_a = [K_m \quad K]$ de maneira que os polos da matriz $A_a - B_aK_a$ estejam no SPE e não coincidam com as raízes de $\beta(s)$. Logo, o sistema aumentado é utilizado apenas para fins de cálculo de $K_a = [K_m \quad K]$! Para controlarmos o sistema em malha-fechada, basta implementarmos o modelo interno e aplicarmos a realimentação $u = -Kx - K_mx_m$ na planta.

9.4.1 Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação

1. A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denomiradores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

2. Considere o **modelo interno**:

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{=A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{=B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk}).$$

   onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1};$$

3. Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

   e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho $K_a = [K \ \ K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$, com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$;

4. Implemente o modelo interno e aplique a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início desta seção.

9.5 Exemplo

Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo o qual consiste de 2 blocos de massas m_1 e m_2 conectados por 3 molas com constantes de mola k_1, k_2, k_3. As variáveis de controle são as forças u_1, u_2 aplicadas em cada bloco, e as variáveis de saída são os deslocamentos

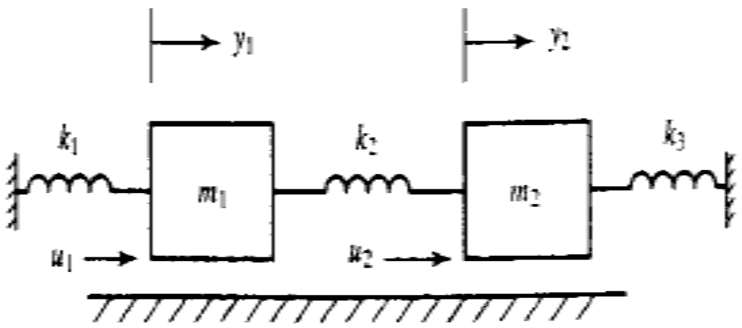


Figura 26 – Sistema massa-mola.

y_1 e y_2 de cada bloco. Por simplicidade, assumimos que não há atrito entre os blocos e a superfície.

Com base na 2^a Lei de Newton, temos que

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= u_1 - k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2), \\ m_2\ddot{y}_2 &= u_2 + k_2 y_1 - (k_1 + k_2) y_2. \end{aligned}$$

Vamos agora representar o sistema em modelo de estado. Definindo o vetor de controle $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, o vetor de saída $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, e o vetor de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$ com

$$x_1 = y_1,\ x_2 = \dot{y}_1,\ x_3 = y_2,\ x_4 = \dot{y}_2,$$

obtemos que

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{=u},$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x}.$$

Considere que há uma perturbação $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ na **entrada** do sistema, ou seja, $E = B$ com

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \underbrace{E}_{=B} w, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

e suponha que

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{degrau}, \underbrace{A_2 + A_3 \sin(5t)}_{senoide}), \; t \geq 0,$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{degrau}, \underbrace{B_2}_{degrau}), \; t \geq 0,$$

onde A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 são constantes com B_1, B_2 desconhecidas. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s + 5A_3/(s^2+25)$, $W_1(s) = B_1/s$, $W_2(s) = B_2/s$, e

$$\boxed{\beta(s) = s(s^2+25) = s^3 + 25s}, \quad (k = 3).$$

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e o modelo interno é dado por

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_m} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B_m} e,$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I).$$

Logo, as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado são, respectivamente,

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}_{10\times 10}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}_{10\times 2}.$$

9.6 Procedimentos

1. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 9.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, encontre uma matriz de ganho $K_a = [K_m \;\; K]$ de modo a posicionar os polos de malha-fechada em:

$$-2, -2, -10, -10, -11, -11, -12, -12, -13 \pm i$$

$(n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos).

2. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5\sin(5t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 20$ e $w_2(t) = 30$, incidindo a partir de $t \geq 6$. Implemente a realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ no sistema massa-mola em malha-fechada supondo que $x(0) = 0$, e verifique se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido. Analise os resultados de simulação obtidos (referência, perturbação, saída, erro, controle).

10 Lab 8 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares com Observador de Estado

Objetivos

Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares visto no Lab 7, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Para isso, utilizaremos um observador de estado. Aplicaremos então as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

10.1 Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 9.4 do Lab 7 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

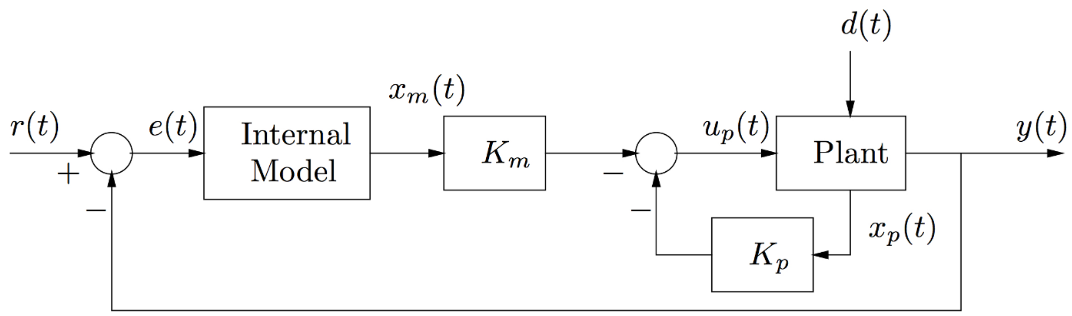


Figura 27 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas.

Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\widehat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\widehat{x} - K_m x_m$.

Primeiramente, relembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew,\\ y &= Cx + Fw,\end{aligned}$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m e,$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m\big(r - Cx - Fw\big) = -B_m C x + A_m x_m - B_m F w + B_m r.$$

Com isso, relembre que o **sistema aumentado** é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=Aa} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r,\\ y_a &= y = \underbrace{[C \quad 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw.\end{aligned}$$

Agora, considere o **observador de estado**:

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly$$

Seja $\xi = x - \widehat{x}$ o erro de estimação. Note que, na presença de uma perturbação $w \neq 0$ sobre a planta, não temos que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi$, mas sim que:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{x} - \dot{\widehat{x}} = Ax + Bu + Ew - \big((A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly\big),\\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\widehat{x} - Bu - L\underbrace{(Cx + Fw)}_{=y},\\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w.\end{aligned}$$

No entanto, isto não causa nenhuma dificuldade técnica adicional, pois o próximo resultado estabelece condições para que a realimentação (do estado estimado $\widehat{x}$ e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\widehat{x} - K_m x_m,$$

resolva o problema de controle através do projeto independente das matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação) e L (observador). Veremos que novamente se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável (i.e. o par (A_a, B_a) é controlável) e que a planta é observável (i.e. o par (A, C) é observável). Escolha as matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Então, o observador de estado

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly,$$

e a realimentação

$$u = -K\widehat{x} - K_m x_m,$$

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m\times pk}$, solucionam o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0,$$

para qualquer condição inicial $\widetilde{x}(0) = (x(0), x_m(0), \widehat{x}(0)) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, quando $r = w = 0$, temos que $\widetilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada.

Prova: Seja $\widetilde{x} = (x_a, \widehat{x}) = (x, x_m, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ o vetor de estado do sistema em malha-fechada com o observador. Com base no sistema aumentado, no observador de estado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\widehat{x} - K_m x_m$ é dado por

$$\dot{\widetilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\widehat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - LC - BK \end{bmatrix}}_{=\widetilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \widehat{x} \end{bmatrix}}_{=\widetilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\widetilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e},$$

$$e = \underbrace{[-C \quad 0 \quad 0]}_{\widetilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \widehat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{[-F \quad I]}_{=\widetilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}.$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

Agora, considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ x - \widehat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \widehat{x} \end{bmatrix}}_{=\widetilde{x}}.$$

Note que $T^{-1} = T$ e $\widetilde{x} = T^{-1}z = Tz$. Nas novas coordenadas $z = T\widetilde{x}$, o sistema em malha-fechada é dado por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_m} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\widetilde{x}} = T\left(\widetilde{A}_e\widetilde{x} + \widetilde{B}_e u_e\right) = T\widetilde{A}_e\widetilde{x} + T\widetilde{B}_e u_e = T\widetilde{A}_e T^{-1}z + T\widetilde{B}_e u_e, \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} A-BK & -BK_m & -BK \\ -B_mC & A_m & 0 \\ 0 & 0 & A-LC \end{bmatrix}}_{=T\widetilde{A}_e T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_mF & B_m \\ LF & 0 \end{bmatrix}}_{=T\widetilde{B}_e} u_e, \\
e &= \widetilde{C}_e\widetilde{x} + \widetilde{D}_e u_e = \widetilde{C}_e T^{-1}z + \widetilde{D}_e u_e = \widetilde{C}_e z + \widetilde{D}_e u_e,
\end{aligned}$$

com

$$A_a - B_aK_a = \begin{bmatrix} A-BK & -BK_m \\ -B_mC & A_m \end{bmatrix}, \quad K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}.$$

Concluímos então que os polos da matriz $\widetilde{A}_e$ é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_aK_a$ com os polos de $A-LC$ (**princípio da separação**).

Por hipótese, (A_a, B_a) é controlável e (A, C) é observável. Logo, podemos encontrar matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m\times(n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_a - B_aK_a$ e de $A-LC$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Portanto, $\widetilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada ($u_e = (w, r) = (0, 0)$), e o restante da prova é análogo ao Teorema da Seção 7.4 do Lab 7. Isto conclui a demonstração.

Obs: A estrutura de controle com o observador de estado é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta), L (observador) e $K_a = [K_m \quad K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_a - B_aK_a$ e de $A-LC$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s)$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 4.1 do Lab 4), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, L, K_a.

10.1.1 Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação com Observador de Estado

1. A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denomiradores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

2. Considere o **modelo interno**:

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e,$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk}),$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1};$$

3. Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável e o par (A, C) é observável. Em caso afirmativo, determine matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação), com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (observador) de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$.

4. Implemente o modelo interno e o observador de estado

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC)\widehat{x} + Bu + Ly,$$

e aplique a realimentação $u = -K\widehat{x} - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início da Seção 7.4 do Lab 7. Assim, substituindo-se $u = -K\widehat{x} - K_m x_m$ no observador acima, concluímos que o controlador resultante é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= (A - LC - BK)\widehat{x} + Ly - BK_m x_m, \\ u &= -K\widehat{x} - K_m x_m. \end{aligned}$$

Isto resolve o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Ressaltamos que os polos de malha-fechada será a união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, ou seja, as matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m]$ (realimentação) e L (observador) são projetadas independentemente (**princípio da separação**).

10.2 Procedimentos

1. Considere novamente o sistema massa-mola da Seção 9.5 do Lab 7. Refaça os procedimentos da Seção 9.6 do Lab 7, mas agora considerando um observador de estado. Determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da matriz $A-LC$) sejam posicionados em: $-10,-10,-12,-12$.

2. Modifique as referências $r_1(t)$ e $r_2(t)$ com o objetivo de se diminuir o sobressinal na saída e a amplitude dos sinais de controle em relação ao item anterior. **Dica**: escolha, por exemplo, $r_1(t)=3(1-e^{-t})$, $r_2(t)=2(1-e^{-t})+0.5\sin(5t)$, e reprojete o modelo interno e o controlador para que os polos referentes à realimentação (i.e. da matriz $A_a-B_aK_a$) sejam posicionados em: $-4,-4,-10,-10,-12,-12,-14,-14,-16\pm i,-18\pm i/2$.

11 Controle Linear de Sistemas Não-Lineares

Este capítulo trata de técnicas de controle linear para sistemas não-lineares. Veremos como os controladores vistos no Capítulo 2 podem ser utilizados em sistemas não-lineares.

11.1 Estabilidade de Lyapunov

No decorrer de toda esta seção, consideremos sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f/\partial x\colon D \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Relembre do Lab 3 que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Relembramos também os próximos 2 resultados do Lab 3:

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$ **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

Teorema: Considere o sistema $\dot{x} = f(x)$. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Definição (Estabilidade de Lyapunov): Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$. Então:

1. Dizemos que x^e é **estável** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
$$\|x(0) - x^e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0;$$
2. Dizemos que x^e é **instável** quando x^e não é estável;
3. Dizemos que x^e é **(localmente) assintoticamente estável** quando x^e é estável e, além disso, existe $\gamma > 0$ tal que
$$\|x(0) - x^e\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x^e;$$
4. Dizemos que x^e é **globalmente assintoticamente estável** quando: (a) $D = \mathbb{R}^n$, (b) x^e é estável, e (c) $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^e$ para qualquer $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Obs: Para sistemas lineares da forma $\dot{y} = Ay$, com $y \in \mathbb{R}^n$, temos que a origem $y^e = 0$ é (localmente) assintoticamente estável **se e somente se** $y^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável. Assim, para sistema lineares, só faz sentido em se falar de estabilidade assintótica global. Relembre do Capítulo 2 que: (a) $y^e = 0$ é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** todos os polos (autovalores) da matriz A estão no SPE; e (b) se a matriz A possui algum polo no SPD, então $y^e = 0$ é instável.

Definição: Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = f(x)$. A **região (ou domínio) de atração** de x^e é o conjunto $R_A(x^e)$ formado por todas as condições iniciais cujas soluções convergem assintoticamente para x^e, ou seja,

$$R_A(x^e) = \{x(0) \in D \mid \lim_{t\to\infty} x(t) = x^e\}.$$

Note que $x^e \in R_A(x^e)$. Pode-se mostrar que $R_A(x^e)$ é um conjunto aberto. Note também que, se x^e é globalmente assintoticamente estável, então $R_A(x^e) = \mathbb{R}^n$.

O próximo resultado estabelece condições que permitem concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio $x^e \in D$ de um sistema não-linear $\dot{x} = f(x)$ a partir da determinação da estabilidade da origem do sistema linearizado associado. Relembre do Lab 4 que o sistema linearizado associado é dado por

$$y = \underbrace{\left[\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} \right]}_{=A} y = Ay.$$

Teorema (Método Indireto de Lyapunov): Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$, e considere a matriz do sistema linearizado associado

$$A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e}.$$

Então:

1. Se todos os polos (autovalores) da matriz A estão no SPE, então x^e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = f(x)$;

2. Se ao menos um polo da matriz A está no SPD, então x^e é um ponto de equilíbrio instável.

Obs 1: Para sistemas lineares ou não-lineares no plano ($n = 2$), esse resultado estabelece que: (a) um ponto de equilíbrio x^e do tipo nó estável ou foco estável é de fato assintoticamente estável; e (b) um ponto de equilíbrio x^e do tipo nó instável, foco instável ou sela é de fato instável. Isto justifica a nomenclatura utilizada nos Labs 3 e 4.

Obs 2: Caso a matriz A do sistema linearizado possua algum polo em cima do eixo imaginário, então nada podemos concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio x^e pelo Método Indireto de Lyapunov.

Exemplo: Considere o sistema não-linear de 3^a ordem:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2x_3 + 1 = f_1(x_1,x_2,x_3), \\
\dot{x}_2 &= x_1x_3 - x_2 = f_2(x_1,x_2,x_3), \\
\dot{x}_3 &= x_3^2(1 - x_3) = f_3(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

O único ponto de equilíbrio é $x^e = (1,1,1)$, pois: (i) $f_3(x_1,x_2,x_3) = x_3^2(1-x_3) = 0$ implica que $x^3 = 0$ ou $x^3 = 1$; (ii) para termos $f_1(x_1,x_2,x_3) = -x_2x_3 + 1x_3) = 0$ é exigido que $x_3 = 1$ e, consequentemente $x_2 = 1$; (iii) $f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3 - x_2 = 0$ implica que $x_1 = 1$.

Agora, linearizando em $x^e = (1,1,1)$:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix} \right|_{x=x^e},$$

$$= \left. \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 2x_3 - 3x_3^2 \end{bmatrix} \right|_{x=(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A são: -1, $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$. Logo, $x^e = (1,1,1)$ é (localmente) assintoticamente estável. Ressaltamos que a linearização por si só não permite concluir se a estabilidade assintótica é local ou global, nem determinar (ou estimar) a região de atração.

11.2 Ponto de Equilíbrio

Ao longo do restante deste capítulo, vamos considerar equações de estado da forma

$$dx/dt = f(x,u),$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e f: $D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1. Dizemos que o par (x^e, u^e) é um **ponto de equilíbrio (ou ponto de operação)** do sistema se $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é a solução constante do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ e entrada constante $u(t) = u^e$, $t \geq 0$.

De maneira análoga ao caso autônomo, temos:

Proposição: O par $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x,u)$ **se e somente se** $f(x^e, u^e) = 0$.

Teorema: Considere o sistema $\dot{x} = f(x,u)$. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$) e considere que escolhemos uma entrada contínua $u(t)$, $t \geq 0$, tal que $\lim_{t\to\infty} u(t) = \overline{u} \in \mathbb{R}^m$. Se $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x} \in D$, então $(\overline{x}, \overline{u}) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x,u)$, ou seja, $f(\overline{x}, \overline{u}) = 0$.

Exemplo: Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2,u), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m\ell^2}u = f_2(x_1,x_2,u), \\ y &= x_1 = h(x_2,x_2), \end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída.

Para encontramos todos os pontos de equilíbrio $(x^e, u^e) = \big((x_1^e, x_2^e), u^e\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ deste sistema, resolvemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= f_1(x_1^e, x_2^e, u^e) = x_2^e \;\Rightarrow\; x_2^e = 0,\\
0 &= f_2(x_1^e, x_2^e, u^e) = -\frac{g}{\ell}\sin(x_1^e) - \frac{k}{m}x_2^e + \frac{1}{m\ell^2}u^e \;\Rightarrow\; u^e = mg\ell\sin(x_1^e).
\end{aligned}
$$

Logo, os pontos de equilíbrio são (x^e, u^e) com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell\sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**.

Isto significa que, se aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = mg\ell\sin(\delta)$, $t \geq 0$, e a condição inicial do pêndulo for $x(0) = x^e = (\delta, 0)$ (i.e. ângulo inicial δ e velocidade angular inicial nula), então o pêndulo permanecerá parado no ângulo $\delta \in [0, 2\pi)$, ou seja, $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\delta, 0)$, para todo $t \geq 0$.

11.3 Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u),\\
y &= h(x),
\end{aligned}
$$

onde $h\colon D \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^1. Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$. Definimos então a **saída de equilíbrio** $y^e = h(x^e) \in \mathbb{R}^p$.

A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio (x^e, u^e) é dada por

$$
f(x,u) = \underbrace{f(x^e, u^e)}_{=0} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=x^e, u=u^e} (x - x^e) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x^e, u=u^e} (u - u^e) + \text{TOS},
$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$
f(x,u) \cong \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta},
$$

para $x_\delta = x - x^e \cong 0$, $u_\delta = u - u^e \cong 0$.

Do mesmo modo, a expansão em série de Taylor de h em relação a x^e é dada por

$$
h(x) = \underbrace{h(x^e)}_{=y^e} + \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS},
$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$
h(x) - y^e \cong \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta},
$$

para $x_\delta = x - x^e \cong 0$.

Agora, fixe uma entrada contínua $u(t)$, $t \geq 0$, e seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução correspondente do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$. Considere: (a) o **desvio** $x_\delta(t) = x(t) - x^e$ do **estado** $x(t)$ em relação a x^e; (b) o **desvio** $u_\delta(t) = u(t) - u^e$ da **entrada** $u(t)$ em relação a u^e; e (c) o **desvio** $y_\delta(t) = y(t) - y^e$ da **saída** $y(t) = h(x(t))$ em relação a y^e.

Assim, quando $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$, $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$ (pequenos desvios no estado e na entrada), temos

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) &\cong \underbrace{\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e, u=u^e}}_{=A} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)} + \underbrace{\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\bigg|_{x=x^e, u=u^e}}_{=B} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta}, \\
&= Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t), \\
y_\delta(t) = h(x(t)) - y^e &\cong \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e}}_{=C} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)}, \\
&= Cx_\delta(t).
\end{aligned}
$$

Denominamos o sistema linear (estado $x_\delta \in \mathbb{R}^n$, entrada $u_\delta \in \mathbb{R}^m$ e saída $y_\delta \in \mathbb{R}^p$)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, \quad & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e),\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e), \\
y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e).
\end{aligned}
$$

de **sistema linearizado** associado ao ponto de equilíbrio (x^e, u^e).

11.4 Estabilização via Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e, u^e) = 0$. Vamos tratar nesta seção do **problema de estabilização por realimentação de estado**: encontrar uma realimentação de estado $u = \alpha(x)$, onde $\alpha \colon D \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 com $\alpha(x^e) = u^e$, tal que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do **sistema em malha-fechada**

$$\dot{x} = \widetilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, \alpha(x)).$$

Note que x^e é de fato um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada, pois $\widetilde{f}(x^e) = f(x^e, \alpha(x^e)) = f(x^e, u^e) = 0$.

O próximo resultado mostra como solucionar este problema de controle através da estabilização da origem $x_\delta = 0$ do sistema linearizado por uma realimentação linear de estado da forma $u_\delta = -Kx_\delta$. **A ideia principal é:** $u = \alpha(x) = -K(x-x^e)+u^e$ **assegura que a linearização do sistema não-linear em fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada**. Em particular, concluímos pelo Teorema de Hartman-Grobman do Lab 4 que, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e, o retrato de fase do sistema não-linear em malha-fechada terá um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado em malha-fechada.

Teorema: Seja $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x,u)$, e considere a equação de estado do sistema linearizado associado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e,u^e),\, B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e,u^e).$$

Suponha que o par (A,B) é controlável, e escolha uma matriz de ganho K de forma que todos os polos de $A-BK$ estejam no SPE. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = -K(x-x^e)+u^e \quad (\text{ou seja}, u_\delta = u-u^e = -K(x-x^e) = -Kx_\delta).$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \widetilde{f}(x) = f(x,u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x-x^e)+u^e).$$

Prova: Considere o sistema linearizado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \partial f/\partial x(x^e,u^e),\, B = \partial f/\partial u(x^e,u^e).$$

Por hipótese, o par (A,B) é controlável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho K na realimentação $u_\delta = -Kx_\delta$ para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de $A-BK$ estejam no SPE. Assim,

$$u-u^e = u_\delta = -Kx_\delta = -K(x-x^e),$$

e o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta - BKx_\delta = (A-BK)x_\delta.$$

Como os polos de $A-BK$ estão no SPE, temos que $x_\delta = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Mostraremos que a realimentação linear de estado

$$u = \alpha(x) = -K(x-x^e)+u^e = -Kx+Kx^e+u^e,$$

resolve de fato o problema de estabilização. Note que $\alpha(x^e) = u^e$.

Logo, x^e é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \widetilde{f}(x) = f(x,u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x-x^e)+u^e).$$

Vamos aplicar agora o Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 3.2 no sistema em malha-fechada acima. Temos que

$$\widetilde{A} = \left.\frac{\partial \widetilde{f}(x)}{\partial x}\right|_{x=x^e} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e,u^e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^e,u^e)\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x^e) = A - BK,$$

ou seja, **a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada**. Como todos os polos de $\widetilde{A} = A - BK$ estão no SPE (pela escolha da matriz de ganho K), concluímos pelo Método Indireto de Lyapunov que x^e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto encerra a demonstração.

Exemplo: Considere novamente o pêndulo simples controlado da seção anterior

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2,u),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m\ell^2}u = f_2(x_1,x_2,u).
\end{aligned}$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e,u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell\sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0,2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Supondo que $x_1^e = \delta = \pi/4$ $(=45°)$, nosso objetivo é encontrar uma realimentação de estado $u = \alpha(x)$ que estabilize o ponto de equilíbrio $x^e = (\delta,0)$ do pêndulo em malha-fechada. Ressaltamos que: (i) $(\delta,0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (ii) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta,0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta,0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12,0)$ não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio $x^e = (\delta,0)$).

Seja $f = (f_1, f_2)$. As matrizes A e B do sistema linearizado associado são:

$$\begin{aligned}
A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e,u^e) &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2,u) \end{bmatrix}\right|_{x=x^e,u=u^e},\\
&= \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}\right|_{x=x^e,u=u^e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\cos(\delta) & -1 \end{bmatrix},\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix},\\
B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e,u^e) &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1,x_2,u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_1,x_2,u) \end{bmatrix}\right|_{x=x^e,u=u^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathscr{C} = [B \ \ AB]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{C}) = 2 \ (\det(\mathscr{C}) = 100).$$

Logo, o par (A,B) é controlável. Suponha que os pólos desejados para $A-BK$ são: $-4,-4$ (nó estável, em que um pólo em $s=-4$ corresponde a uma constante de tempo de 0.25 segundo). Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 8.7):

$$K = [k_1 \;\; k_2] = [0.8929 \;\; 0.7].$$

Portanto, a realimentação linear de estado

$$\begin{aligned} u &= -K(x-x^e)+u^e = -k_1(x_1-x_1^e)-k_2(x_2-x_2^e)+u^e, \\ &= -k_1(x_1-\delta)-k_2x_2+\sin(\delta), \\ &= -0.9(x_1-\pi/4)-0.7x_2+\sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização.

Simulações: veja o arquivo `EstabilizacaoPenduloSimples.mdl` no Moodle

O Teorema anterior soluciona o problema de estabilização quando todos os estados podem ser realimentados (medidos). No entanto, isto não sempre será possível em muitas situações práticas. O próximo resultado apresenta condições para que o problema de estabilização seja solucionado através da realimentação do estado estimado.

Teorema: Seja $(x^e,u^e)\in D\times\mathbb{R}^m$ um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

e considere o sistema linearizado associado

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta+Bu_\delta, \quad & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e,u^e),\; B=\frac{\partial f}{\partial u}(x^e,u^e), \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e). \end{aligned}$$

Suponha que o par (A,B) é controlável e que o par (A,C) é controlável. Escolha matrizes de ganho K e L de forma que todos os polos de $A-BK$ e $A-LC$ estejam no SPE, respectivamente.

Então, o controlador

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= (A-LC-BK)\widehat{x}+L(y-h(x^e)), \\ u &= \alpha(\widehat{x}) = -K\widehat{x}+u^e \quad (\text{ou seja}, u_\delta = u-u^e = -K\widehat{x}), \end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja, $(x^e,0)\in D\times\mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com vetor de estado $\widetilde{x}=(x,\widehat{x})\in D\times\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u)|_{u=\alpha(\widehat{x})} = f(x,-K\widehat{x}+u^e), \\ \dot{\widehat{x}} &= (A-LC-BK)\widehat{x}+L(h(x)-h(x^e)), \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Prova: Considere o sistema linearizado

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, \quad & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e,u^e),\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e,u^e), \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e). \end{aligned}$$

Por hipótese, (A,B) é controlável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho K na realimentação $u_\delta = -Kx_\delta$ para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de $A-BK$ estejam no SPE. Como (A,C) é observável, podemos encontrar uma matriz de ganho L de modo que todos os polos de $A-LC$ estejam no SPE. Considere o seguinte **observador de estado** para o **sistema linearizado**

$$\dot{\widehat{x}} = (A-LC-BK)\widehat{x} + Bu_\delta + Ly_\delta.$$

Ao realimentarmos o estado estimado $\widehat{x}$ por $u_\delta = -K\widehat{x}$, temos o seguinte controlador-observador para o **sistema linearizado**:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= (A-LC)\widehat{x} + Bu_\delta + Ly_\delta = (A-LC-BK)\widehat{x} + LCx_\delta, \\ u_\delta &= -K\widehat{x}. \end{aligned}$$

Logo, o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\widehat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix}}_{=\widetilde{A}_\delta} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \widehat{x} \end{bmatrix}.$$

Relembre da Seção 8.6 que os polos da matriz $\widetilde{A}_\delta$ acima são a união (com repetição) dos polos de $A-BK$ com os polos de $A-LC$. Portanto, $(x_\delta,\widehat{x}) = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Temos que

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= (A-LC-BK)\widehat{x} + Ly_\delta = (A-LC-BK)\widehat{x} + L\big(\overbrace{y-h(x^e)}^{=y_\delta = y-y^e}\big), \\ u-u_e &= u_\delta = -K\widehat{x}. \end{aligned}$$

Com base no Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 11.2, vamos mostrar agora que o controlador

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}} &= (A-LC-BK)\widehat{x} + L(y-h(x^e)) = (A-LC-BK)\widehat{x} + L(h(x)-h(x^e)), \\ u &= \alpha(\widehat{x}) = -K\widehat{x} + u^e, \end{aligned}$$

resolve de fato o problema de estabilização. Note que $\alpha(0) = u^e$. Logo, $(x^e,0) \in D\times\mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \widetilde{f}(x,\widehat{x}) = f(x,u)|_{u=\alpha(\widehat{x})} = f(x,-K\widehat{x}+u^e), \\ \dot{\widehat{x}} &= \widehat{f}(x,\widehat{x}) = (A-LC-BK)\widehat{x} + L(h(x)-h(x^e)). \end{aligned}$$

Seja $\overline{f} = (\widetilde{f}, \widehat{f})\colon D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e considere o vetor de estado de malha-fechada $\overline{x} = (x, \widehat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$. Portanto, a equação de estado do sistema em malha-fechada é dada por

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}).$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\overline{A} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}(x^e, 0) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) & \dfrac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e)\dfrac{\partial \alpha}{\partial \widehat{x}}(0) \\ L\dfrac{\partial h}{\partial x}(x^e) & A - LC - BK \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} = \widetilde{A}_\delta,
\end{aligned}$$

ou seja, **a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada**. Desse modo, mostramos que todos os polos de $\overline{A} = \widetilde{A}_\delta$ estão no SPE. Pelo Método Indireto de Lyapunov, concluímos que $(x^e, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto conclui a demonstração.

Exemplo: Retomamos o pêndulo simples controlado do exemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m\ell^2}u = f_2(x_1, x_2, u), \\
y &= x_1 = h(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell\sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere novamente que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$, $x_1^e = \delta = \pi/4$ $(= 45°)$. Desse modo, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. No entanto, agora vamos assumir que o estado x_2 (velocidade angular) não pode ser medido (realimentado). Vamos então aplicar o teorema acima.

Utilizaremos $u = -K\widehat{x} + u^e$, com K como no exemplo anterior, e assim nos resta apenas determinar a matriz de ganho L do sistema:

$$\dot{\widehat{x}} = (A - LC - BK)\widehat{x} + L(y - h(x^e)).$$

Note que $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta$. A matriz C do sistema linearizado associado é dada por:

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e, u^e) = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}\right|_{x = x^e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathscr{O}) = 2 \; (\det(\mathscr{O}) = 1).$$

Logo, o par (A,C) é observável. Suponha que os pólos desejados para $A-LC$ são: $-12,-12$. Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 8.7):

$$L = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}$$

.

Portanto, o controlador (relembre que $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta$)

$$\begin{aligned}
\dot{\widehat{x}} &= (A - LC - BK)\widehat{x} + L(y-\delta), \\
u &= \alpha(\widehat{x}) = -K\widehat{x} + u^e = -0.9\widehat{x}_1 - 0.7\widehat{x}_2 + \sin(\delta),
\end{aligned}$$

assegura que $(x^e, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. No entanto, ressaltamos que $(x^e, 0)$ não é globalmente assintoticamente estável. Por exemplo, $\big(x(0), \widehat{x}(0)\big) = \big((3.12, 5), (0,0)\big)$ não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio $(x^e, 0)$, pois a solução correspondente $\big(x(t), \widehat{x}(t)\big)$, $t \geq 0$, converge para um outro ponto de equilíbrio (relembre o Teorema da Seção 11.2).

Simulações: veja o arquivo `EstabilizacaoPenduloSimples.mdl` no Moodle.

11.5 Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Veja o Lab 9.

12 Lab 9 – Controle Linear de Sistemas Não-Lineares: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Objetivos

Vamos abordar o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares. Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 7, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

12.1 Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, $p=m$ saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,w), \\ y &= h(x,w), \end{aligned}$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $\boxed{p=m}$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e f: $D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ e h: $D \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ são de classe C^1. Assuma que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \overline{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \overline{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) = \overline{r} - y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t) = \overline{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \overline{w}$, ou seja, $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

O rastreamento da referência $r(t) = \overline{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \overline{w}$ será atingido através da estabilização de um ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ do sistema em que a saída de equilíbrio $y^e = h(x^e, \overline{w})$ coincide com $\overline{r}$. Assim, o par $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ deve satisfazer:

$$0 = f(x^e, u^e, \overline{w}),$$
$$\overline{r} = y^e = h(x^e, \overline{w}).$$

Desse modo, percebemos que os pares $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ que satisfazem as equações acima dependem das amplitudes $\overline{r}$ e $\overline{w}$, ou seja, $x^e = x^e(\overline{r}, \overline{w}) \in D$ e $u^e = u^e(\overline{r}, \overline{w}) \in \mathbb{R}^m$ com

$$0 = f\big(x^e(\overline{r}, \overline{w}), u^e(\overline{r}, \overline{w}), \overline{w}\big),$$
$$0 = \overline{r} - h\big(x^e(\overline{r}, \overline{w}), \overline{w}\big).$$

12.2 Estrutura de Controle

Para resolvermos o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares, vamos considerar a mesma estrutura de controle em malha-fechada do Lab 7:

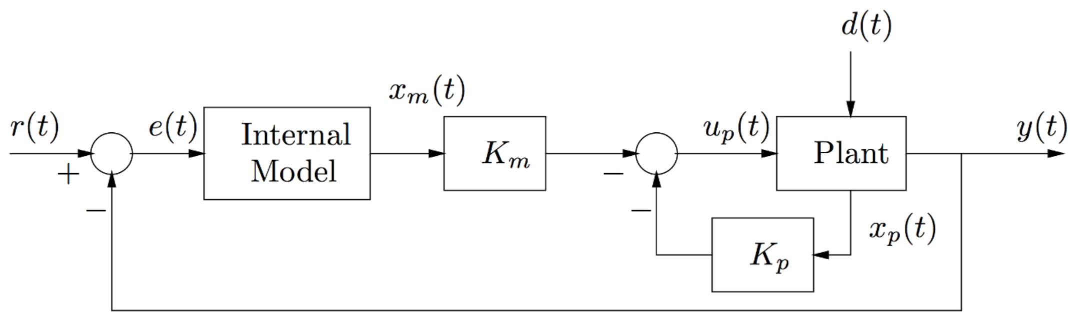


Figura 28 – Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

Como a referência $r(t)$ e o perturbação $w(t)$ são do tipo degrau, temos que $\beta(s) = s$. Assim, $A_m = 0$, $B_m = I$, e o modelo interno é dado por (veja o Lab 7):

$$\dot{x}_m = e,$$

ou seja, para $x_m(0) = 0$,

$$x_m(t) = \int_0^t e(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Fixe $\overline{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\overline{w} \in \mathbb{R}^q$, e suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \overline{w}),$$
$$0 = \overline{r} - h(x^e, \overline{w}).$$

Obs: Relembre que

$$0 = f(x^e, u^e, \overline{w}),$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \overline{w}$, $t \geq 0$, e que

$$0 = \overline{r} - h(x^e, \overline{w}),$$

significa que $y^e = h(x^e, \overline{w}) = \overline{r}$.

Agora, considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $x_a = (x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$ (relembre que $e = r - y$ e $y = h(x, w)$):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, \overline{w}), \\
\dot{x}_m &= \overline{r} - h(x, \overline{w}), \\
y &= h(x, \overline{w}).
\end{aligned}$$

Logo, $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema aumentado, para **qualquer** $x_m^e \in \mathbb{R}^m$.

Para resolvermos o problema de rastreamento da referência $r(t) = \overline{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \overline{w}$ do tipo degrau, basta encontrarmos uma realimentação de estado $u = \alpha(x, x_m)$ para o sistema aumentado, onde α: $D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 e $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é tal que $\alpha(x^e, x_m^e) = u^e$, de modo que $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ seja um um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do **sistema aumentado em malha-fechada**

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, \overline{w})|_{u=\alpha(x,x_m)} = f(x, \alpha(x, x_m), \overline{w}), \\
\dot{x}_m &= \overline{r} - h(x, \overline{w}), \\
y &= h(x, \overline{w}).
\end{aligned}$$

Note que $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é de fato um ponto de equilíbrio do sistema aumentado em malha-fechada, pois

$$\begin{aligned}
0 &= f(x^e, u^e, \overline{w}) = f(x^e, \alpha(x^e, x_m^e), \overline{w}), \\
0 &= \overline{r} - h(x^e, \overline{w}).
\end{aligned}$$

Além disso, perceba que se $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ for assintoticamente estável, então asseguramos que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} h(x(t), \overline{w}) = h(x^e, \overline{w}) = r,$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração do ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e), resolvendo assim **localmente** em torno de (x^e, x_m^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \overline{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \overline{w}$.

O sistema aumentado linearizado no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $x_{a_\delta} = (x_\delta, x_{m_\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado do Lab 7 com $A_m = 0$, $B_m = I$):

$$\dot{x}_{a_\delta} = \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m_\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a_\delta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta + \begin{bmatrix} E \\ -F \end{bmatrix} w_\delta,$$

$$y_{a_\delta} = \underbrace{[C \ \ 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m_\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a_\delta}} + F w_\delta,$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e, \overline{w}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e, \overline{w}), \quad E = \frac{\partial f}{\partial w}(x^e, u^e, \overline{w}),$$
$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e, \overline{w}), \qquad F = \frac{\partial h}{\partial w}(x^e, \overline{w}).$$

Obs: Perceba que o sistema linearizado da planta

$$\dot{x} = f(x,u,w),$$
$$y = h(x,w),$$

no ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é dado por

$$x_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta,$$
$$y_\delta = Cx_\delta.$$

considerando que $w(t) = \overline{w}$, $t \geq 0$. Assim, as matrizes A_a e B_a acima do sistema aumentado linearizado são determinadas a partir da linearização da planta.

O próximo resultado apresenta condições para que a estrutura de controle mostrada na Figura acima resolva o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau através da estabilização da origem $x_{a_\delta} = (x_\delta, x_{m_\delta}) = (0,0)$ do sistema aumentado linearizado por uma realimentação linear de estado da forma $u_\delta = -K_a x_{a_\delta} = -Kx_\delta - K_m x_{m_\delta}$. **A ideia central é:** $u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m$ **assegura que a linearização do sistema aumentado em malha-fechada coincide com o sistema aumentado linearizado em malha-fechada.**

Teorema: Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x,u,w),$$
$$y = h(x,w),$$

e sejam $\overline{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\overline{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente. Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \overline{w}),$$
$$0 = \overline{r} - h(x^e, \overline{w}).$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE.

Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m,$$

é tal que:

1. A matriz de ganho $K_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é invertível;

2. Seja $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ tal que $u^e = \alpha(x^e, x_m^e) = -Kx^e - K_m x_m^e$, i.e. $x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e)$. Então, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 > 0$ em que, para qualquer $(\widetilde{r}, \widetilde{w}) \in B_{\delta_3}(\overline{r}) \times B_{\delta_4}(\overline{w})$ (i.e. para pequenas variações da amplitude de $r(t) = \widetilde{r}$ e $w(t) = \widetilde{w}$ em relação aos valores nominais $\overline{r}$ e $\overline{w}$, respectivamente), existe um **único** ponto de equilíbrio $(\widetilde{x}^e, \widetilde{x}_m^e) \in B_{\delta_1}(x^e) \times B_{\delta_2}(x_m^e) \subset D \times \mathbb{R}^m$ assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \widetilde{w})|_{u=\alpha(x,x_m)} = f(x, -Kx - K_m x_m, \widetilde{w}) \\ y &= h(x, \widetilde{w}) \end{aligned}$$

e satisfazendo

$$y^e = h(\widetilde{x}^e, \widetilde{r}) = \widetilde{r},$$

quando $r(t) = \widetilde{r}$ e $w(t) = \widetilde{w}$, $t \geq 0$.

Em particular, para tal ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\widetilde{x}^e, \widetilde{x}_m^e) = \big(\widetilde{x}^e(\widetilde{r}, \widetilde{w}), \widetilde{x}_m^e(\widetilde{r}, \widetilde{w})\big)$ correspondente a $(\widetilde{r}, \widetilde{w}) \in B_{\delta_3}(\overline{r}) \times B_{\delta_4}(\overline{w})$ (pequenas variações da amplitude de $r(t) = \widetilde{r}$ e $w(t) = \widetilde{w}$ em relação aos valores nominais $\overline{r}$ e $\overline{w}$, respectivamente), temos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \widetilde{r},$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração de $(\widetilde{x}^e, \widetilde{x}_m^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\widetilde{x}^e, \widetilde{x}_m^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \widetilde{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \widetilde{w}$ do tipo degrau.

Obs: Note que

$$u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t) = -Kx - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau)\, d\tau}_{\textit{termo integral!}}, \quad t \geq 0.$$

Além disso, ressaltamos que tal controlador linear não assegura que a região de atração de $(\widetilde{x}^e, \widetilde{x}_m^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m$.

12.3 Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2,u),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m\ell^2}u = f_2(x_1,x_2,u),\\
y &= x_1 = h(x_2,x_2),
\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e,u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $x^e = (x_1^e,x_2^e) = (\delta,0)$ e $u^e = mg\ell\sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0,2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4$ $(= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta,0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta,0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta,0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12,0)$ não pertence à região de atração).

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2,u,w),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m\ell^2}u + \frac{1}{m\ell^2}w = f_2(x_1,x_2,u,w),\\
y &= x_1 = h(x_2,x_2,w).
\end{aligned}$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\overline{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\overline{r} = x_1^e = \delta$. Assim, $y^e = h(x_1^e,x_2^e,\overline{w}) = x_1^e = \delta$, e $(x_1^e,x_2^e,u^e) = \big(\delta,0,\sin(\delta)\big)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
0 &= f_1(x_1^e,x_2^e,u^e,\overline{w}),\\
0 &= f_2(x_1^e,x_2^e,u^e,\overline{w}),\\
0 &= \overline{r} - h(x_1^e,x_2^e,\overline{w}).
\end{aligned}$$

Determine as matrizes de ganho $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$ de modo que a realimentação linear de estado

$$u = \alpha(x,x_m) = -Kx - K_m x_m$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \widetilde{r}$ com rejeição de perturbações $w(t) = \widetilde{w}$ do tipo degrau, ao menos quando $\widetilde{r} \cong \overline{r} = 0$ e $\widetilde{w} \cong \overline{w} = 0$ (pequenas amplitudes da referência e da perturbação em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), considerando: (a) diferentes conjuntos de polos para $A_a - B_aK_a$ (polos rápidos e lentos); (b) grandes e pequenas amplitudes de $r(t)$ e $w(t)$; e (c) diversas condições iniciais.

13 Controle Não-Linear

Este capítulo trata de técnicas de controle não-linear. Primeiramente, vamos abordar o problema de desacoplamento. Em seguida, trataremos do problema de rastreamento de saída. Para resolvermos este problema, a ideia central é encontramos uma realimentação de estado não-linear de modo que a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada seja dada por uma EDO linear homogênea.

Na sequência, apresentaremos a noção de platitude (*flatness*) e sua relação com controlabilidade não-linear e com o problema de rastreamento de saída. Por fim, estudaremos brevemente o problema de linearização exata via mudança de coordenadas e realimentação de estado. Veremos que, para uma certa classe de sistemas não-lineares, existe uma realimentação de estado não-linear que permite o cancelamento exato das não-linearidades do sistema. Neste caso, o sistema em malha-fechada torna-se linear, pelo menos quando ele for descrito em um sistema de coordenadas adequado.

13.1 Motivação

Neste momento, vamos retomar o problema de rastreamento de saída para um motor CC visto no Lab 2, e abordaremos também uma questão filosófica. Esta questão reside no fato de que os sinais de referência do tipo degrau são adequados como sinais de teste de desempenho, mas são em geral inadequados para o controle de sistemas. De certo modo, isto contraria os paradigmas de controle clássico, que estabelece o degrau como um bom candidato a sinal de referência.

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + u, \\
y &= x_1,
\end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). Suponha que o motor está em repouso em $t_0 = 0$, ou seja, $x_1(0) = \theta(0)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(0) = 0$. Em controle clássico, geralmente se aborda o seguinte problema de controle: encontrar uma realimentação u de forma que o eixo do motor atinja um dado ângulo desejado de referência θ_r em regime permanente, ou seja,

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \theta_r.$$

A maneira clássica de se resolver este problema é encontrando um controlador linear de forma que a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ rastreie assintoticamente uma referência $r(t) = \theta_r$ do tipo degrau de amplitude θ_r, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \theta_r.$$

No entanto, suponha que, além dos posicionamentos inicial $\theta(0)$ e final desejado θ_r, desejamos também controlar a saída $y(t)$ entre $\theta(0)$ e θ_r. Em outras palavras, dada uma **saída de referência** $\overline{y}(t)$, $t \geq 0$, gostaríamos que a saída real $y(t) = \theta(t)$ **rastreasse assintoticamente** $\overline{y}(t)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} [y(t) - \overline{y}(t)] = 0,$$

onde $e(t) = y(t) - \overline{y}(t)$ é o erro de rastreamento.

Desse modo, nosso objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a rastrear assintoticamente uma saída de referência $\overline{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} [y(t) - \overline{y}(t)] = 0,$$

onde $\overline{y}$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua) e **limitada**.

Considere a **realimentação de estado**

$$u = \alpha(x_1, x_2) + v \triangleq x_2 + v,$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada. Assim, em malha-fechada temos que

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v.$$

Ao escolhermos a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$v = \gamma(x_1, x_2, t) = \ddot{\overline{y}}(t) - k_1[x_1 - \overline{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\overline{y}}(t)],$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem ajustados, concluímos que em malha-fechada temos

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = v(t) &= \ddot{\overline{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \overline{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\overline{y}}(t)], \\ &= \ddot{\overline{y}}(t) - k_1[y(t) - \overline{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\overline{y}}(t)], \\ &= \ddot{\overline{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\textit{termo PD!}}, \end{aligned}$$

ou seja, a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada é dada pela seguinte EDO linear homogênea:

$$\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e = 0.$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \overline{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2 s + k_1 = 0.$$

Agora, suponha que os pólos de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (SPE!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2 s + k_1 = (s - p_1)(s - p2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2,}_{\text{polinômio caract. de MF}}$$

ou seja, escolhemos $\boxed{k_2 = -(p_1 + p_2),\ k_1 = p_1 p_2}$.

Concluímos então que a realimentação

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + \gamma(x_1, x_2, t), \\ &= x_2 + \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)], \end{aligned}$$

com $k_2 = -(p_1 + p_2)$ e $k_1 = p_1 p_2$, garante que

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(0), x_2(0)$, resolvendo assim o **problema de rastreamento de saída** através de uma **realimentação de estado** adequada.

Ressaltamos que a ideia principal utilizada foi:

1. Escolher uma realimentação $u = \alpha(x_1, x_2) + v$ de modo que $\ddot{y} = v$, onde v é a nova entrada;

2. Escolher $v = \gamma(x_1, x_2, t)$ de modo que $\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0$;

Neste capítulo, veremos como generalizar essa ideia para sistemas não-lineares MIMO.

13.2 Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Nesta seção, veremos a conexão entre o problema de desacoplamento e o problema de rastreamento de saída. Vamos considerar sistemas da forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t), \tag{13.1}$$

$$y = h(x), \tag{13.2}$$

onde $x \in V$ é o vetor de estado, $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada (controle), $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $f : V \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ (infinitamente diferenciável), e $g(x)$ é uma matriz $n \times m$.

$$g(x) = (g_{ij}(x)) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{m2}(x) & \cdots & g_{nm}(x) \end{bmatrix},$$

onde todas as funções $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, são de classe C^∞. Do mesmo modo, $h = (h_1, \ldots, h_m) : V \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞.

Observe que o número de componentes da saída $y = (y_1, \ldots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ é igual ao número de componentes da entrada $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, ou seja, $m = p$, e que o sistema está definido em $V \subset \mathbb{R}^n$. Denotando por $g_j(x)$ a coluna j de $g(x)$, podemos considerar g_j como uma aplicação $g_j : V \to \mathbb{R}^n$ e rescrever (13.1)–(13.2) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x), \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Ao longo de todo este capítulo, consideraremos leis de controle denominadas de **realimentação de estado estática localmente regular** (em um aberto $U \subset V$ de $\mathbb{R}^n$) e dadas por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{13.3}$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada, $\alpha : U \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ e

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \cdots & \beta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times m$ em que todas as funções $\beta_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, são de classe C^∞. Aqui, o termo **localmente regular** significa que a matriz β é invertível em U, ou seja, $\det\big(\beta(x)\big) \neq 0$, para todo $x \in U$.

Assim, o **sistema em malha-fechada**, o qual está definido em $U \subset V$, é dado por

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v, \tag{13.4}$$

$$y = h(x), \tag{13.5}$$

onde $x \in U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $v \in \mathbb{R}^m$ é vetor de controle, e

$$\tilde{f} = f + g\alpha, \qquad \tilde{g} = g\beta.$$

13.2.1 O Problema de Desacoplamento

Considere um sistema da forma (13.1)–(13.2), o qual está definido em um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com entrada $u = (u_1, \ldots, u_m)$ e saída $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Dizemos que o sistema é **desacoplado** quando **cada** componente $u_j(t)$ de **qualquer** entrada escolhida $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, $t \geq 0$, atua de fato na componente $y_j(t) = h_j(x(t))$ da saída

$$y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \ldots, h_m(x(t))),$$

mas não influencia a componente $y_i(t) = h_i(x(t))$ quando $i \neq j$. O problema de desacoplamento consiste na construção de uma realimentação regular (13.3) de modo que o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) seja desacoplado. Relembre que a entrada do sistema em malha-fechada é $v = (v_1, \ldots, v_m)$.

Problema de Desacoplamento: Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho[1] do sistema (13.1)–(13.2). Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em x_0, se existir uma vizinhança aberta[2] $U \subset V$ de x_0 e uma realimentação (13.3) localmente regular em U, tal que o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) seja desacoplado. Do mesmo modo, seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho, ou seja, U_0 é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em U_0, se existir uma realimentação localmente regular em U_0 tal que o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) seja desacoplado.

Ressaltamos que a primeira versão do problema de desacoplamento formulado acima não se preocupa com o tamanho da vizinhança aberta U do ponto de trabalho x_0 para o qual o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) se torna desacoplado. Assim, a princípio, não temos como garantir que $U = V$. Como (13.4)–(13.5) estará definido somente em $U \subset V$, o desacoplamento do sistema em malha-fechada ocorrerá somente dentro de U. Isto significa que apenas enquanto a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada não sair de U é que o sistema permanecerá desacoplado. É por este motivo que usamos o termo **localmente solúvel** na definição acima, pois garantimos apenas uma solução local em torno do ponto de trabalho x_0 para o problema de desacoplamento.

Por outro lado, a segunda versão assegura a existência de uma realimentação localmente regular (13.3) que está definida em toda a região de trabalho $U_0 \subset V$ e que desacopla o sistema em malha-fechada, o qual está definido em U_0. É claro que gostaríamos de escolher $U_0 = V$. No entanto, dependendo das não-linearidades do sistema (13.1)–(13.2), isto nem sempre é possível, e temos que nos contentar com uma solução local em determinado $U_0 \subset V$.

Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho do sistema (13.1)–(13.2) e considere que $U \subset V$ é uma vizinhança aberta de x_0. Veremos que a derivação sucessiva das componentes y_i da saída $y = (y_1, \ldots, y_m)$ com relação ao tempo nos leva a uma solução para o problema de desacoplamento. Para isto, suponha que fixamos uma condição inicial $x(0) \in V$ e uma entrada $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, $t \geq 0$, e considere que tomamos uma componente $y_i(t) = h_i(x(t))$ da saída $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \ldots, h_m(x(t))$ e a derivamos no tempo. Como $y_i(t) = h_i(x(t)) = h_i \circ x(t)$ (função composta), pela regra da cadeia temos que

$$y_i^{(1)}(t) = \left.\frac{\partial h_i}{\partial x}\right|_{x(t)} \dot{x}(t).$$

[1] Aqui, x_0 não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

[2] Dizemos que um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma **vizinhança aberta** de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quando U é um aberto que contém x_0.

Substituindo (13.1) na equação acima, obtemos

$$y_i^{(1)}(t) = \left.\frac{\partial h_i}{\partial x}\right|_{x(t)} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)].$$

Neste momento, é natural introduzirmos a **derivada de Lie** de duas aplicações $w : U \to \mathbb{R}$ (real) e $q = (q_1, \ldots, q_m) : U \to \mathbb{R}^m$ (vetor coluna) de classe C^∞:

$$\begin{aligned} L_q w(x) &\triangleq \frac{\partial w}{\partial x}(x)q(x) = [\partial w/\partial x_1(x) \; \ldots \; \partial w/\partial x_m(x)]q(x); \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) q_i(x) \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

para todo $x \in U$. Temos que $L_q w : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞. Portanto, podemos também considerar $L_q^2 w = L_q(L_q w)$. Note que[3]

$$L_q^2 w(x) \triangleq L_q L_q w(x) = \frac{\partial L_q w}{\partial x}(x)q(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para } x \in U.$$

Definimos, para todo $k \geq 1$ (inteiro),

$$L_q^k w = L_q(L_q^{k-1} w), \quad \text{onde } L_q^0 w = w.$$

Voltando então ao problema de desacoplamento, e tomando

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) f(x) = L_f h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) g(x) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x}(x) g_1(x) \; \ldots \; \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) g_m(x) \right), \\ &= (L_{g_1} h_i(x) \; \ldots \; L_{g_m} h_i(x)) = (A_{i1}^1(x) \; \ldots \; A_{im}^1(x)) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

para todo $x \in U$, encontramos que

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) + A_i^1(x(t))u(t).$$

Assuma que $A_i^1(x)$ é identicamente nulo em U, isto é, $A_i^1(x) = 0$, para todo $x \in U$. Neste caso, dentro de U, $y_i^{(1)}(t)$ não será instantaneamente afetado por $u(t)$, pois teremos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)).$$

Repetindo o mesmo procedimento para $y_i^{(1)}(t)$, vamos obter

$$y_i^{(2)}(t) = h_i^2(x(t)) + A_i^2(x(t))u(t),$$

onde, para todo $x \in U$,

$$\begin{aligned} h_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x) f(x) = L_f^2 h_i(x) \in \mathbb{R}, \\ A_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x) g(x) = \left(\frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x) g_1(x) \; \ldots \; \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x) g_m(x) \right), \\ &= (L_{g_1} L_f h_i(x) \; \ldots \; L_{g_m} L_f h_i(x)) = (A_{i1}^2(x) \; \ldots \; A_{im}^2(x)) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

---

[3] Pode-se mostrar que $L_q^2 w(x) = q^T(x)H(x)q(x) + \frac{\partial w}{\partial x}(x)\frac{\partial q}{\partial x}(x)q(x)$, onde $H(x)$ é a matriz Hessiana da função real w e $\partial q(x)/\partial x$ é a matriz Jacobiana do vetor coluna q, no ponto $x \in U$.

Assuma que $A_i^2(x)$ é identicamente nulo em U. Neste caso, dentro de U, $y_i^{(2)}(t)$ não será instantaneamente afetado por $u(t)$.

Definimos $\rho_i \geq 1$ como o menor inteiro tal que $A_i^{\rho_i}(x)$ não seja identicamente nulo em U. Mais precisamente, $\rho_i \geq 1$ é o inteiro tal que $A_i^{\rho_i}(x_0) \neq 0$ e existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 em que $A_i^k(x)$ é identicamente nulo em $U \subset V$, para todo $1 \leq k \leq \rho_i - 1$.

Observe que tal definição de ρ_i equivale a

$$\begin{aligned} A_i^{\rho_i}(x_0) &= [L_{g_1}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0) \;\; L_{g_2}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0) \;\; \cdots \;\; L_{g_m}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0)] \neq 0, \\ A_i^k(x) &= [L_{g_1}L_f^{k-1}h_i(x) \;\; L_{g_2}L_f^{k-1}h_i(x) \;\; \cdots \;\; L_{g_m}L_f^{k-1}h_i(x)] = 0, \\ &\quad \text{para } 1 \leq k \leq \rho_i - 1,\ x \in U, \end{aligned}$$

que por sua vez é o mesmo que

$$\begin{aligned} &[L_{g_1}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0) \;\; L_{g_2}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0) \;\; \cdots \;\; L_{g_m}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0)] \neq 0, \\ &L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq m,\ 0 \leq k \leq \rho - 2,\ x \in U. \end{aligned}$$

Quando, para todo $k \geq 1$,temos que $A_i^k(x)$ é identicamente nulo em alguma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0, definimos $\rho_i = \infty$. No caso em que $\rho_i < \infty$ (finito), denominamos o inteiro $\rho_i = \rho_i(x_0) \geq 1$ de **grau relativo** da saída $y_i = h_i(x)$ no ponto de trabalho x_0, o qual corresponde ao **número de derivações no tempo que temos que realizar para que a saída y_i dependa explicitamente de alguma componente u_j da entrada** $u = (u_1, \ldots, u_m)$.

Assuma que todas as componentes y_i da saída $y = (y_1, \ldots, y_m)$ admitem grau relativo em x_0. Dizemos então que a saída $y = (y_1, \ldots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))$ **admite grau relativo** em x_0 e, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= a_1(x) + A_1(x)u, \\ y_2^{(\rho_2)} &= a_2(x) + A_2(x)u, \\ \vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= a_m(x) + A_m(x)u, \end{aligned}$$

onde $a_i(x) = h_i^{\rho_i}(x) = L_f^{\rho_i}h(x)$, $A_i(x) = A_i^{\rho_i}(x)$, para $i = 1, \ldots, m$, $x \in U$, onde U é alguma vizinhança aberta de x_0.

Denotando-se $y^{\langle \rho \rangle} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)} \ldots, y_m^{(\rho_m)})'$, podemos escrever

$$y^{\langle \rho \rangle} = a(x) + A(x)u, \tag{13.6}$$

onde, para cada $x \in U$,

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1}h_1(x) \\ L_f^{\rho_2}h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m}h_m(x) \end{bmatrix}_{m\times 1},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{\rho_1-1}h_1(x) & L_{g_2}L_f^{\rho_1-1}h_1(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{\rho_1-1}h_1(x) \\ L_{g_1}L_f^{\rho_2-1}h_2(x) & L_{g_2}L_f^{\rho_2-1}h_2(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{\rho_2-1}h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{\rho_m-1}h_m(x) & L_{g_2}L_f^{\rho_m-1}h_m(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{\rho_m-1}h_m(x) \end{bmatrix}_{m\times m}.$$

Note que $a_i : V \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e A_i é um vetor linha de m funções de classe C^∞. Desta forma, $a : V \to \mathbb{R}^m$ é um vetor coluna de m funções de classe C^∞ e $A : V \to \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz $m \times m$ de funções de classe C^∞, denominada de **matriz de desacoplamento**.

Relembramos que a componente $y_i = h_i(x)$ da saída $y = (y_1,\ldots,y_m) = h(x) = (h_1(x),\ldots,h_m(x))$ admite grau relativo $\rho_i = \rho_i(x_0)$ em x_0 quando

$$A_i(x_0) = \left[L_{g_1}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0)\ \ldots\ L_{g_m}L_f^{\rho_i-1}h_i(x_0)\right] \neq 0,$$

e existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 tal que

$$L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0,\ \text{para todo } 1 \leq j \leq m,\ 0 \leq k \leq \rho_i - 2,\ x \in U.$$

Além disso,

$$y_i^{(k)}(t) = L_f^k h_i(x(t)),\ \text{para } 0 \leq k \leq \rho_i - 1.$$

Ressaltamos que uma saída y nem sempre admite grau relativo em todos os pontos. De fato, considere o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_2u_1; \\ \dot{x}_2 &= u_1; \\ y_1 &= x_1. \end{aligned}$$

Derivando-se y_1, temos

$$y_1^{(1)} = x_2 + x_2u_1,$$

com $A_1^1(x_1,x_2) = L_{g_1}h_1(x_1,x_2) = x_2$. Logo, o grau relativo de y_1 em $x_0 = (x_1^0,x_2^0)$ é $\rho_1 = 1$ quando $x_2^0 \neq 0$, pois $A_1^1(x_1^0,x_2^0) = x_2^0 \neq 0$. No entanto, y_1 não admite grau relativo em x_0 caso $x_2^0 = 0$, já que $A_1^1(x_1^0,0) = 0$ e $A_1^1(x_1,x_2) = x_2$ não se anula em nenhuma vizinhança aberta U de $x_0 = (x_1^0,0)$. De fato, dada qualquer vizinhança aberta U de $x_0 = (x_1^0,0)$, sempre existe algum $(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in U$ com $\bar{x}_2 \neq 0$. Portanto, $A_1^1(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \bar{x}_2 \neq 0$.

Definição: Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho (aberto em $\mathbb{R}^n$) do sistema (13.1)–(13.2). Dizemos que a saída $y = h(x)$ do sistema (13.1)–(13.2) **admite grau relativo** em U_0 quando cada componente $y_i = h_i(x)$ da saída $y = (y_1,\ldots,y_m) = h(x) = (h_1(x),\ldots,h_m(x))$ admite grau relativo $\rho_i(x)$ em todo $x \in U_0$ e $\rho_i(x)$ permanece constante dentro da região U_0, isto é, $\rho_i(x) = \bar{\rho}_i$, para qualquer $x \in U_0$.

Obs 1: Ressaltamos que se a saída $y = h(x)$ admite grau relativo em x_0, então existe uma vizinhança aberta U_0 de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U_0. Isto é uma consequência do teorema apresentado na sequência.

Obs 2: Considere um sistema linear SISO $(m = p = 1)$ da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assuma que o sistema é controlável e observável, e sejam n_p e n_z o número de polos e zeros, respectivamente, da função de transferência $G(s)$. Então, pode-se mostrar que o sistema admite grau relativo em $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ com $\rho = n_p - n_z$.

Teorema: Seja γ: $W \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $W \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Então, o conjunto

$$Z = \{x \in W \mid \gamma(x) \neq 0\}$$

é aberto.

Prova: Fixe $x \in Z \subset W$. Assim, $\gamma(x) \neq 0$. Por simplicidade, considere que $\gamma(x) > 0$. Como a função γ é contínua em x, sabemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ (a princípio, $\delta > 0$ depende de x e ε) tal que, para cada $y \in W$,

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow |\gamma(y) - \gamma(x)| < \varepsilon.$$

E, como W é aberto, sabemos que existe $\overline{\delta} > 0$ tal que $B(x, \overline{\delta}) \subset W$. Escolha $\varepsilon = \gamma(x) > 0$ e seja $\widetilde{\delta} = \min(\overline{\delta}, \delta) > 0$. Fixe $y \in B(x, \widetilde{\delta}) \subset B(x, \overline{\delta}) \subset W$. Então, $y \in W$ com $\|y - x\| < \widetilde{\delta} < \delta$. Desse modo,

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| < \gamma(x),$$

ou seja,

$$-\gamma(x) < \gamma(y) - \gamma(x) < \gamma(x).$$

Portanto, $0 < \gamma(y)$. Logo, $B(x, \overline{\delta}) \subset Z$. Mostramos assim que, para todo $x \in Z$, existe $\widetilde{\delta} > 0$ tal que $B(x, \widetilde{\delta}) \subset Z$, ou seja, provamos que Z é aberto.

Obs 3: Para $j = 1, \ldots, n$, temos que a função projeção π_j: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na j-ésima componente é contínua, onde

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_m) = x_j.$$

Exemplo 1:[3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3. \end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = [0 \;\; 0 \;\; 1], \qquad L_g h(x) = 0, \qquad L_f h(x) = x_2,$$

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) = [0 \;\; 1 \;\; 0], \quad L_g L_f h(x) = 1.$$

Desse modo, a saída $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 2$ na região de trabalho $U_0 = V = \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2:[3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2+2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_4. \end{aligned}$$

Temos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1], \qquad L_g h(x) = 0, \qquad L_f h(x) = x_1^2 + x_2,$$

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) = [2x_1\ \ 1\ \ 0\ \ 0], \quad L_g L_f h(x) = 2(1+x_3).$$

Assim, a saída $y = h(x) = x_4$ admite grau relativo $\rho = 2$ em todos os pontos (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ em que $x_3 \neq -1$. Como tal conjunto é um aberto $U_0 \subset V = \mathbb{R}^n$, concluímos que $y = h(x) = x_4$ admite grau relativo $\rho = 2$ na região de trabalho U_0.

Podemos agora enunciar as soluções para as duas versões do problema de desacoplamento, cujas demonstrações são semelhantes.

Teorema 1: Suponha que a saída $y = h(x)$ do sistema (13.1)–(13.2) admite grau relativo no ponto de trabalho $x_0 \in V$. Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em x_0 **se e somente se** o determinante da matriz de desacoplamento não se anula em x_0, ou seja, $\det A(x_0) \neq 0$.

Teorema 2: Suponha que a saída $y = h(x)$ do sistema (13.1)–(13.2) admite grau relativo na região de trabalho $U_0 \subset V$. Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em U_0 **se e somente se** $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Para esboçar a demonstração da suficiência ($\Leftarrow$) dos dois teoremas acima, relembre que (veja (13.6))

$$y^{\langle \rho \rangle} = a(x) + A(x)u, \tag{13.7}$$

com $y^{\langle \rho \rangle} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)} \ldots, y_m^{(\rho_m)})'$,

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2 - 1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2 - 1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_2 - 1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Com base nisto, veremos na sequência que a escolha de uma realimentação regular (13.3) que soluciona o problema de desacoplamento é natural e evidente.

Provaremos primeiro a suficiência do Teorema 2. Suponha então que $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$. Isto é equivalente a dizer que $A(x)^{-1}$ existe para todo $x \in U_0$. Desse modo, escolhendo a realimentação como

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{13.8}$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_m)$ é a nova entrada e

$$\alpha(x) = -A(x)^{-1}a(x), \tag{13.9}$$
$$\beta(x) = A(x)^{-1}, \tag{13.10}$$

obtemos que a saída $y = h(x)$ do sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) satisfaz

$$y^{\langle\rho\rangle} = v, \tag{13.11}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= v_1, \\ y_2^{(\rho_2)} &= v_2, \\ \vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= v_m. \end{aligned}$$

Note que cada equação $y_i^{(\rho_i)} = v_i$ é linear e completamente desacoplada de outra equação $y_j^{(\rho_i)} = v_j$ quando $i \neq j$. Além disso, $y_i(t)$ corresponde à saída de um banco de ρ_i integradores em série tendo como entrada $v_i(t)$, ou seja,

$$Y_i(s) = \frac{1}{s^{\rho_i}} V_i(s).$$

Desse modo, fica claro que a resposta entrada-saída é linear e que a evolução de $y_i(t)$ depende de fato de $v_i(t)$, mas não é de modo algum influenciada por $v_j(t)$ quando $i \neq j$.

Como (13.8)–(13.10) é uma realimentação de estado estática localmente regular em U_0, concluímos que a mesma fornece uma solução para o problema de desacoplamento. Quando $x \notin U_0$, não temos garantia de que $A(x)^{-1}$ existe e, consequentemente, a realimentação (13.8)–(13.10) poderá apresentar uma singularidade em tal ponto. Portanto, tudo que podemos assegurar é que o sistema malha-fechada (13.4)–(13.5) fica desacoplado enquanto a solução $x(t)$ permanecer em U_0 para a entrada escolhida $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, $t \geq 0$.

Provaremos agora a suficiência do Teorema 1. Suponha então que $\det A(x_0) \neq 0$. Denote o conjunto das matrizes $m \times m$ de números reais por $\mathbb{R}^{m^2}$. Observe que a aplicação $A : V \to \mathbb{R}^{m^2}$ definida por $x \mapsto A(x)$ é de classe C^∞ e, portanto, é contínua. Denote por $\det : \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}$

a função definida por $M \mapsto \det(M)$. Mostra-se que $\det$ é uma função contínua (por ser a soma de produtos dos elementos da matriz M). Considere a função $\det A : V \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \det A(x)$. Esta função é contínua, pois ela é a composta de "$\det$" com "A", e a composta de aplicações contínuas é contínua. Em particular, o conjunto

$$U_0 = \{x \in V \mid \det A(x) \neq 0\}$$

é uma vizinhança aberta de x_0. Portanto, basta aplicarmos o Teorema 2 para demonstrarmos a suficiência do Teorema 1.

A demonstração da necessidade ($\Rightarrow$) dos dois teoremas pode ser encontrada em [3, 5, 2].

Obs 4: Quando $m = 1$, ou seja, o sistema (13.1)–(13.2) tem um única entrada $u \in \mathbb{R}$ e uma única saída $y = h(x) \in \mathbb{R}$, a realimentação regular (13.8)–(13.10) se reduz a

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \left[-L_f^{\rho} h(x) + v \right], \tag{13.12}$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada e

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{-L_f^{\rho} h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}, && (13.13) \\ \beta(x) &= \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. && (13.14) \end{aligned}$$

Portanto, a saída $y = h(x)$ do sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v,$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^{\rho}} V(s).$$

Exemplo 3: [3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} & L_g h(x) = 0, && L_f h(x) = x_1 - x_2, \\ & L_g L_f h(x) = 0, && L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2, \\ & L_g L_f^2 h(x) = -(1 + 2x_2)\exp(x_2), && L_f^3 h(x) = -2x_2(x_1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Vemos que a saída $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 3$ em todos os pontos (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ em que $1 + 2x_2 \neq 0$. Como tal conjunto é um aberto $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$, concluímos que $y = h(x) = x_3$ admite grau relativo $\rho = 3$ na região de trabalho U_0.

A matriz de desacoplamento (nesse caso é um escalar)

$$A(x) = L_g L_f^2 h(x) = -(1+2x_2)\exp(x_2)$$

é tal que $A(x) \neq 0$ para todo $x \in U_0$. Desse modo, concluímos que a realimentação de estado estática localmente regular em U_0 dada por

$$u = \frac{-L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} v = -\frac{2x_2(x_1+x_2^2)}{(1+2x_2)\exp(x_2)} - \frac{1}{(1+2x_2)\exp(x_2)} v$$

para todo $x \in U_0$, desacopla o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5), o qual está definido em $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$. Além disso, a saída $y = h(x) = x_3$ de (13.4)–(13.5) é tal que

$$y^{(3)} = v.$$

Exemplo 4: [3] Considere o sistema definido em $V = \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\
y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\
y_2 &= h_2(x) = x_4.
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& L_{g_1} h_1(x) = L_{g_2} h_1(x) = L_{g_1} L_f h_1(x) = L_{g_2} L_f h_1(x) = 0, \\
& L_{g_1} h_2(x) = L_{g_2} h_2(x) = 0, \\
& L_f^2 h_1(x) = x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5, \\
& L_f h_2(x) = x_5, \\
& [L_{g_1} L_f^2 h_1(x) \;\; L_{g_2} L_f^2 h_1(x)] = [\cos(x_1 - x_5) \;\; 1] \neq 0, \\
& [L_{g_1} L_f h_2(x) \;\; L_{g_2} L_f h_2(x)] = [0 \;\; 1] \neq 0.
\end{aligned}$$

Escolhemos a origem $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^5$ como ponto de trabalho. Assim, $\rho_1 = \rho_1(x_0) = 3$, $\rho_2 = \rho_2(x_0) = 2$, a saída $y = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ admite grau relativo em x_0, e a matriz de desacoplamento é

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det A(x_0) \neq 0$, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U \subset V = \mathbb{R}^5$ de x_0 em que a realimentação de estado estática localmente regular em U dada por

$$u = -A(x)^{-1} a(x) + A(x)^{-1} v$$

para todo $x \in U$, está de fato bem definida, ou seja, $A(x)^{-1}$ existe para todo $x \in U$, onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é a nova entrada e

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, tal realimentação desacopla o sistema em malha-fechada (13.4)–(13.5), o qual está definido em $U \subset V = \mathbb{R}^3$. Por fim, a saída $y = (y_1, y_2) = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ de (13.4)–(13.5) é tal que

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1, \\ y_2^{(2)} &= v_2. \end{aligned}$$

13.2.2 O Problema de Rastreamento de Saída

Considere o sistema (13.1)–(13.2) com saída $y = h(x)$. Dada uma **saída de referência desejada** $\bar{y}(t)$ para a saída $y(t)$, onde $\bar{y} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^∞, queremos encontrar uma realimentação u que force $y(t)$ a **rastrear assintoticamente** a saída desejada $\bar{y}(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0,$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o **erro de rastreamento**. Este problema é denominado de **problema de rastreamento** da saída $\bar{y}(t)$. Para resolver o problema de rastreamento, vamos projetar uma realimentação u que garanta que a dinâmica do erro $e(t)$ seja assintoticamente estável.

Na sequência, restringiremos nosso estudo à classe de sistemas (13.1)–(13.2) que podem ser desacoplados por realimentação estática regular da forma (13.3). Considere o sistema (13.1)–(13.2) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \ldots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho. Suponha que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em U_0, é de classe C^∞ e admite grau relativo em U_0;
- A matriz de desacoplamento é não singular em U_0, ou seja, $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Derivando-se sucessivamente $e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t)$ com relação ao tempo, obtemos que

$$e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, \ldots, m, \ k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k = \rho_i$ e usando (13.7),teremos

$$e^{\langle \rho \rangle} = y^{\langle \rho \rangle} - \bar{y}^{\langle \rho \rangle} = a(x) + A(x)u - \bar{y}^{\langle \rho \rangle},$$

com

$$
\begin{aligned}
y^{\langle\rho\rangle} &= (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \ldots, y_m^{(\rho_m)})', \\
\bar{y}^{\langle\rho\rangle} &= (\bar{y}_1^{(\rho_1)}, \bar{y}_2^{(\rho_2)}, \ldots, \bar{y}_m^{(\rho_m)})', \\
e^{\langle\rho\rangle} &= (e_1^{(\rho_1)}, e_2^{(\rho_2)}, \ldots, e_m^{(\rho_m)})'.
\end{aligned}
$$

Note que a realimentação de estado dependente do tempo

$$
u = \delta(x,t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{\langle\rho\rangle} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0, \tag{13.15}
$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_m)' \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada, produz em malha-fechada a seguinte dinâmica linear para o erro de rastreamento:

$$
e^{\langle\rho\rangle} = v.
$$

A lei de controle (13.15) é portanto uma realimentação linearizante para a dinâmica do erro. Podemos então construir uma realimentação estabilizante v para a dinâmica do erro. Fixe $i = 1, \ldots, m$, e relembre que

$$
e_i^{(\rho_i)} = v_i.
$$

Sejam $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{\rho_i}^i\}$ o conjunto de pólos desejados (no SPE!) para a dinâmica do erro

$$
e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t).
$$

Assim, o polinômio característico desejado em malha-fechada é dado por

$$
\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i s^k.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
v_i = \gamma_i(x,t) &= \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i e_i^{(k)}(t), \\
&= \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i \big[y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)\big], \\
&= \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i \big[L_f^k h_i(x) - \bar{y}_i^{(k)}(t)\big],
\end{aligned}
$$

é a realimentação de estado dependente do tempo desejada, pois

$$
e_i^{(\rho_i)} = v_i = \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i e_i^{(k)},
$$

ou seja, a dinâmica de $e_i(t)$ em malha-fechada é dada por

$$
e_i^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i e_i^{(k)} = 0, \quad \text{(EDO linear homogênea!)} \tag{13.16}
$$

a qual tem $\pi_i(s) = (s-\lambda_1^i)(s-\lambda_2^i)\cdots(s-\lambda_{\rho_i}^i)$ como polinômio característico.

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo a ser aplicada para o rastreamento da saída de referência desejada $\bar{y}(t)$ é

$$u = \delta(x,t) = A(x)^{-1}\big[-a(x) + \bar{y}^{\langle\rho\rangle}(t) + \underbrace{F\varepsilon(x,t)}_{=v}\big], \quad x \in U_0,\ t \geq 0, \tag{13.17}$$

onde

$$\varepsilon(x,t) = (h_1(x),\ldots,L_f^{(\rho_1-1)}h_1(x),\ldots,h_m(x),\ldots,L_f^{(\rho_m-1)}h_m(x))' - \bar{y}^{\langle\rho-1\rangle}(t),$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & F_m \end{bmatrix},$$

$$F_i = [a_0^i \ \ a_1^i \ \ \ldots \ \ a_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Exemplo 5: No Exemplo 4 da Seção 13.2.1, estudamos o sistema definido em $V = \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\ y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\ y_2 &= h_2(x) = x_4. \end{aligned}$$

Escolhemos $x_0 = 0$. Note que $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, e que posto $g(x) = [g_1(x)\ g_2(x)] = 2$, para todo $x \in V = \mathbb{R}^5$. Vimos anteriormente que $\det A(x_0) \neq 0$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$. Com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 13.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U_0 \subset V$ de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U_0 e $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$.

Seja $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ uma saída de referência desejada de classe C^∞. A realimentação de estado dependente do tempo em (13.15)

$$u = \delta(x,t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{\langle\rho\rangle} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0,$$

assegura a seguinte dinâmica linear para os erros de rastreamento

$$e_1^{(3)} = v_1,$$
$$e_1^{(2)} = v_2,$$

com $e_1(t) = y_1(t) - \bar{y}_1(t)$, $e_2(t) = y_2(t) - \bar{y}_2(t)$.

Logo, os ganhos de realimentação $a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_0^2, a_1^2 \in \mathbb{R}$ nas realimentações estabilizantes

$$\begin{aligned}
v_1 = \gamma_1(x,t) &= \sum_{k=0}^{2} a_k^1 e_1^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{2} a_k^1 \left[y_1^{(k)}(t) - \bar{y}_1^{(k)}(t)\right], \\
&= \sum_{k=0}^{2} a_k^1 \left[L_f^k h_1(x) - \bar{y}_1^{(k)}(t)\right], \\
&= a_0^1[x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] + a_1^1[x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] + a_2^1[x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)], \\
v_2 = \gamma_2(x,t) &= \sum_{k=0}^{1} a_k^2 e_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 \left[y_2^{(k)}(t) - \bar{y}_2^{(k)}(t)\right], \\
&= \sum_{k=0}^{1} a_k^2 \left[L_f^k h_2(x) - \bar{y}_2^{(k)}(t)\right], \\
&= a_0^2[x_4 - \bar{y}_2(t)] + a_1^2[x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)].
\end{aligned}$$

são escolhidos de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\begin{aligned}
\pi_1(s) &= s^3 - \sum_{k=0}^{2} a_k^1 s^k, \\
\pi_2(s) &= s^2 - \sum_{k=0}^{1} a_k^2 s^k,
\end{aligned}$$

estejam no SPE, pois as dinâmicas malha-fechada dos erros são dadas por

$$\begin{aligned}
e_1^{(3)} - a_2^1 e_1^{(2)} - a_1^1 e_1^{(1)} - a_0^1 e_1 &= 0, \\
e_2^{(2)} - a_1^2 e_2^{(1)} - a_0^2 e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

A realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned}
u &= \delta(x,t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{\langle\rho\rangle} + v], \\
&= A(x)^{-1}\left(-a(x) + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(3)}(t) \\ \bar{y}_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(x,t) \\ \gamma_2(x,t) \end{bmatrix}\right), \; x \in U_0, t \geq 0,
\end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência desejada $\bar{y}(t)$, onde

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x,t) &= a_0^1[x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] + a_1^1[x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] + a_2^1[x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)], \\
\gamma_2(x,t) &= a_0^2[x_4 - \bar{y}_2(t)] + a_1^2[x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)],
\end{aligned}$$

com $v = (v_1, v_2)' = (\gamma_1(x,t), \gamma_2(x,t))' \in \mathbb{R}^2$.

A partir de (13.16), concluímos que se

$$e_i^{(\rho_i-1)}(0) = e_i^{(\rho_i-2)}(0) = \cdots = e_i^{(1)}(0) = e_i(0) = 0,$$

então $e_i(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$y_i(t) = \bar{y}_i(t), \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ } \textbf{(rastreamento perfeito!)},$$

mas desde que $x(t) \in U_0$ para $t \geq 0$.

Ressaltamos que as realimentações definidas acima forçam $y(t)$ a rastrear assintoticamente $\bar{y}(t)$ desde que a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada permaneça em U_0 para todo $t \geq 0$ (perceba que a realimentação (13.15) poderá apresentar singularidades e que $y_i = h_i(x)$ poderá deixar de ter grau relativo ρ_i constante se $x(t)$ sair de U_0). No entanto, as hipóteses que fizemos até agora sobre o sistema (13.1)–(13.2) não garantem, a princípio, que isto realmente ocorrerá. Observe que não há problema caso $U_0 = V = \mathbb{R}^n$. O próximo resultado, o qual está baseado nos argumentos acima, apresenta condições para a solubilidade do problema de rastreamento de modo que $x(t) \in U_0$, para $t \geq 0$.

Teorema 3: Considere o sistema (13.1)–(13.2) com saída $y = h(x)$ e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho. Suponha que a saída $y = h(x)$ satisfaz:

- A saída $y = h(x)$ está definida em U_0, é de classe C^∞ e admite grau relativo em U_0;
- A matriz de desacoplamento é não singular em U_0, ou seja, $\det A(x) \neq 0$, para todo $x \in U_0$;
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$;
- A aplicação $z : U_0 \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)) \end{aligned} \tag{13.18}$$

  é **injetiva**.

Aplique a realimentação (13.17). Considere o conjunto aberto $Z = z(U_0) \subset \mathbb{R}^n$ e defina

$$z_0 = \left. (y_1^{(0)}(t), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, y_m^{(0)}(t), \dots y_m^{(\rho_m-1)}(t)) \right|_{t=0}.$$

Assuma que $\bar{y}(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ é a saída de referência desejada de classe C^∞ e tal que

$$\bar{z}(t) = (\bar{y}_1^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(0)}(t), \dots \bar{y}_m^{(\rho_m-1)}(t)), \qquad \in Z, \ t \geq 0. \tag{13.19}$$

Seja

$$\varepsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$$

o erro inicial de rastreamento, onde $\bar{z}_0 = \bar{z}(0)$, e considere que existe $H > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(\bar{z}(t), \partial Z) \triangleq \inf_{p \in \partial Z} \|\bar{z}(t) - p\| > H, \ t \geq 0,$$

onde ∂Z denota a fronteira de Z.

Então, existe $\delta > 0$ tal que, se

$$\|\varepsilon_0\| < \delta,$$

então a solução $x(t)$ do sistema em malha-fechada satisfaz $x(t) \in U_0$ para todo $t \geq 0$ e, ainda,

$$\lim_{t\to\infty}[y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m,\ 0 \leq k \leq \rho_i - 1.$$

Em particular, para $\bar{x}(t) \triangleq z^{-1}(\bar{z}(t))$, temos que

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - \bar{x}(t)] = 0.$$

Obs 5: Em muitos casos práticos, não conheceremos Z, ∂Z, δ. Em tais situações, devemos verificar por simulação computacional o quão grande poderá ser o erro de rastreamento inicial $\varepsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$ para que seja assegurada convergência assintótica do erro de rastreamento para zero. Ressaltamos que, se $\varepsilon_0 = 0$, ou seja, $z_0 = \bar{z}_0$, então $y(t) = \bar{y}(t)$, para todo $t \geq 0$ **(rastreamento perfeito!)**. Na prática, no entanto, sempre teremos $\varepsilon_0 \neq 0$ devido a erros/ruídos de medição.

Obs 6: Quando $U_0 = V = \mathbb{R}^n$, temos **convergência assintótica global**, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}[y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m,\ 0 \leq k \leq \rho_i - 1$$

independentemente do erro de rastreamento inicial $\varepsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$. E, quando $Z = U_0 = V = \mathbb{R}^n$ e **cada** $\bar{y}_i^{(k)}(t)$, $t \geq 0$, é **limitada**, então a solução $x(t)$, $t \geq 0$, do sistema em malha-fechada é **limitada** e

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - \bar{x}(t)] = 0$$

para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 6: A equação de movimento de um robô de n graus de liberdade e com atuação em todas as juntas é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + K(q) = u \tag{13.20}$$

onde $M(q)$ é a matriz de massa $n \times n$, que é sempre simétrica e invertível, $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos, $K(q) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade, $q \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de posições generalizadas, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades generalizadas, $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças generalizadas, e M, C, K são de classe C^∞.

A equação (13.20) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{13.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\
f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q,\dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}, \\
g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assuma que a cinemática direta do robô é dada por

$$y(t) = h(q(t)),$$

onde $h : W \to \mathbb{R}^n$ é injetiva e com Jacobiano $\Gamma(q) = \partial h(q)/\partial q$ invertível para todo q pertencente a um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ (onde não existem singularidades da cinemática direta).

Neste caso, pela regra da cadeia,

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q} = \Gamma(q)\dot{q}.$$

Vemos assim que a primeira derivada de todas as saídas $y_i = h_i(x)$ é função apenas do estado x e não é influenciada pela entrada u. Derivando outra vez, obtemos

$$y^{(2)} = \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} + \Gamma(q)\ddot{q}.$$

Note que a componente ij da matriz $\Gamma(q)$ é dada por

$$\Gamma_{ij}(q) = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q),$$

e, portanto, a componente ij de $\Gamma^{(1)}(q)$ será

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left\{\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k.$$

Logo, a i-ésima componente do vetor coluna $\Gamma^{(1)}(q)\dot{q}$ é

$$\left\{\Gamma^{(1)}(q)\dot{q}\right\}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_j.$$

A matriz Hessiana H_i da aplicação h_i é definida elemento a elemento por

$$\{H_i(q)\}_{kj} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}(q).$$

Temos então que

$$\left\{\Gamma^{(1)}(q)\dot{q}\right\}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^T H_i(q)\dot{q}.$$

Como H_i depende apenas de q, segue-se que

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u,$$

onde

$$a(x) = \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} - \Gamma(q)M^{-1}(q)[C(q,\dot{q}) + K(q)], \quad A(x) = \Gamma(q)M^{-1}(q).$$

Mas,

$$\det A(x) = (\det \Gamma(q))(\det M^{-1}(q)) \neq 0, \quad \text{para } x = (q,\dot{q}) \in W \times \mathbb{R}^n.$$

Assim, concluímos que:

- Cada saída $y_i = h_i(x)$ admite grau relativo $W \times \mathbb{R}^n$ com $\rho_i = 2$;

- A matriz de desacoplamento é invertível em $W \times \mathbb{R}^n$ (o espaço de estado é $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$);

- $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 2n$;

- A aplicação $z : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em (13.18) é injetiva, já que é dada por $z(q,\dot{q}) = (y^{(0)}, y^{(1)}) = (h(q), \Gamma(q)\dot{q})$.

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo

$$u = \delta(x,t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(2)}(t) + v], \quad x \in W \times \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{13.22}$$

lineariza a dinâmica do erro da seguinte maneira

$$e^{\langle 2 \rangle} = v,$$

onde $\bar{y} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é a saída de referência desejada.

Agora, seja $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^2$ definido por

$$\varepsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)})', \quad 1 \leq i \leq n.$$

A dinâmica de ε_i é governada pela equação linear

$$\dot{\varepsilon}_i = A_i \varepsilon_i + B_i v_i, \tag{13.23}$$

onde

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Devemos então determinar uma lei de controle estabilizante

$$v_i = F_i \varepsilon_i.$$

Para isto, tomamos dois pólos de malha-fechada λ_i^1, λ_i^2 (SPE), calculamos $\pi_i(s) = (s - \lambda_i^1)(s - \lambda_i^2) = s^2 - (a_1^i s + a_0^i)$, e escolhemos

$$F_i = [a_0^i,\ a_1^i].$$

Logo, a lei de controle estabilizante v possui a forma

$$v = F\varepsilon,$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')'.$$

Note que

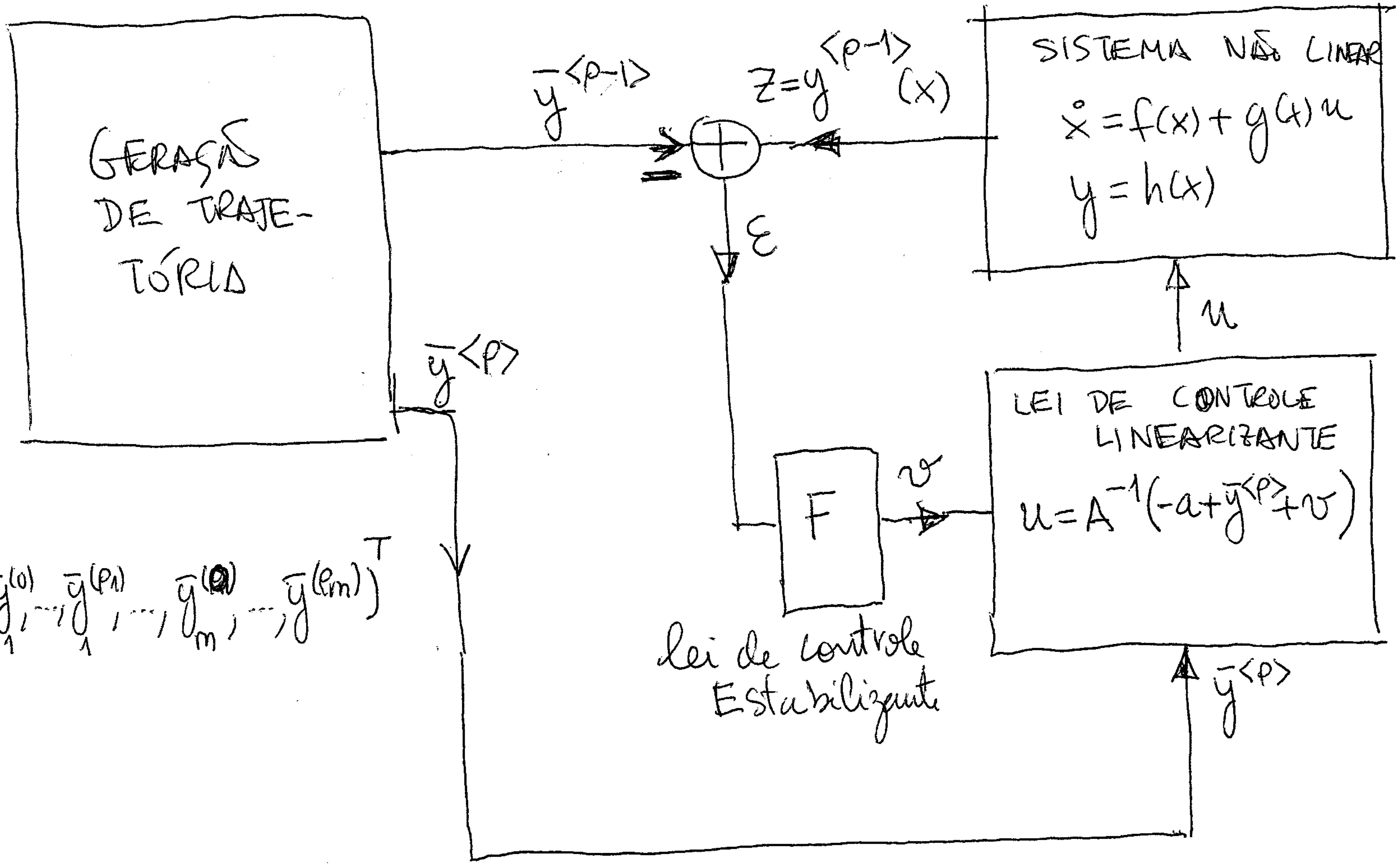
$$\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_n^{(0)}, e_n^{(1)})' = y^{\langle 1 \rangle} - \bar{y}^{\langle 1 \rangle},$$

onde

$$\begin{aligned} y^{\langle 1 \rangle} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(0)}, y_n^{(1)})', \\ \bar{y}^{\langle 1 \rangle} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \ldots, \bar{y}_n^{(0)}, \bar{y}_n^{(1)})'. \end{aligned}$$

$$z = y^{\langle p-1\rangle}(x) = \left(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(p_m-1)}\right)^T$$

$$\bar{y}^{\langle p-1\rangle}(x) = \left(\bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_1^{(p_1-1)}, \dots, \bar{y}_m^{(0)}, \dots, \bar{y}_m^{(p_m-1)}\right)^T$$



$$\bar{y}^{\langle p\rangle} = \left(\bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_1^{(p_1)}, \dots, \bar{y}_m^{(0)}, \dots, \bar{y}^{(p_m)}\right)^T$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_m \end{pmatrix}, \quad v = F\varepsilon, \quad v_i = F_i \varepsilon_i$$

13.3 Flatness

Nesta seção, faremos a conexão entre o problema de rastreamento de saída e o conceito de **flatness** (ou **platitude**, que segundo o dicionário Houaiss é a propriedade de ser plano). O conceito de flatness foi cunhado por Fliess e seus coautores em [1] a partir dos resultados que apresentamos neste capítulo sobre linearização exata. Existem várias maneiras equivalentes de enunciar a propriedade de flatness. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [6]. Os livros [7] e [4] apresentam a noção de flatness e suas diversas aplicações em problemas de controle.

Definição: Dizemos que um sistema da forma (13.1) é **plano** (ou **flat**) quando existe um conjunto $y = (y_1, \ldots, y_m)$ de funções de classe C^∞, denominada de saída[4] **plana** (ou saída **flat**), com as seguintes propriedades:

- Cada $y_i = h_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, é função apenas[5] do estado x, e **o número de componentes m de y é igual ao número de componentes da entrada $u = (u_1, \ldots, u_m)$ do sistema;**

- O estado x pode ser determinado a partir de y e de um número finito de suas derivadas. Mais especificamente[6], existe uma aplicação $\mathscr{A}$ de classe C^∞ tal que

  $$x = \mathscr{A}(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\gamma)}), \tag{13.24}$$

  onde $y^{(k)} \triangleq (y_1^{(k)}, \ldots, y_m^{(k)})$, para $k \geq 0$;

- A entrada u pode ser determinada a partir de y e de um número finito de suas derivadas. Em outras palavras, existe uma aplicação $\mathscr{B}$ de classe C^∞ tal que

  $$u = \mathscr{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\delta)}). \tag{13.25}$$

Isto significa que

$$x(t) = \mathscr{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \ldots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))$$

é a trajetória de (13.1) quando a aplicamos a entrada

$$u(t) = \mathscr{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \ldots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

onde $\bar{y} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação arbitrária de classe C^∞.

Exemplo 1: Temos que o motor CC apresentado na Seção 13.1 é um sistema flat com saída flat $y = x_1$, pois o estado deste sistema é determinado por

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, \dot{x}_1) = (y, \dot{y}) = \mathscr{A}(y, \dot{y}),$$

[4] Essa não é necessariamente a saída real do sistema (13.1).

[5] Para simplificar a exposição, consideraremos que y_i depende somente do estado x. Na verdade, o conceito de flatness é muito mais geral, de modo que y_i pode depender também da entrada $u = (u_1, \ldots, u_m)$ e de suas derivadas até uma certa ordem finita.

[6] Aqui, não estamos sendo precisos porque a definição de flatness é local, e as aplicações $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ acima podem estar definidas apenas localmente, e não globalmente.

e, como $\ddot{y} = -\dot{y} + u$, a entrada é dada por

$$u = \ddot{y} + \dot{y} = \mathscr{B}(y, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Note que, neste caso, a saída flat coincide com a saída real do sistema.

Exemplo 2: [7] Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u. \end{aligned}$$

Temos que $y = x_1$ é uma saída flat. De fato,

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = y^{(1)}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 + \sin(x_1) + x_1 = y^{(2)} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= \dot{x}_3 = y^{(3)} + y^{(1)}\cos(y) + y^{(1)}, \\ u &= \dot{x}_4 - x_1 + x_3 = y^{(4)} + y^{(2)}\cos(y) - (y^{(1)})^2\sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y). \end{aligned}$$

Exemplo 3: Um sistema linear da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

é flat **se e somente** é controlável (veja [1]).

Exemplo 4: Todo robô com n graus de liberdade e atuação em todas as juntas é flat[7]. De fato, vimos no Exemplo 6 da Seção 13.2.2 que a equação de movimento de um robô de n graus de liberdade é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = u \tag{13.26}$$

onde $M(q)$ é a matriz de massa $n \times n$, que é sempre simétrica e invertível, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos, $K(q) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade, $q \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de posições generalizadas, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades generalizadas, $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de forças generalizadas, e M, C, K são de classe C^∞.

A equação (13.26) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{13.27}$$

[7] Para quem já fez algum curso de robótica, perceberá que a noção de flatness é análoga ao método do torque calculado.

onde

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\
f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q,\dot{q})+K(q)] \end{bmatrix}, \\
g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Neste caso, fica claro que $y=q$ é uma saída flat, já que

$$
\begin{aligned}
&x=(q,\dot{q})=(y,\dot{y}), \\
&u=M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})+K(q)=M(y)\ddot{y}+C(y,\dot{y})+K(y).
\end{aligned}
$$

(método do torque calculado!)

se escrevem em função de $y,\dot{y},\ddot{y}$.

Veremos agora que o conceito de flatness permite solucionar de maneira simples e direta o problema de controlabilidade de um sistema não-linear. De fato, imagine que desejamos levar o estado $x(t)$ do sistema (13.1) de uma condição inicial $x(0)=x_0$ em $t=0$ até uma condição final desejada $x(T)=x_T$ em $t=T>0$. Para isto, devemos encontrar uma entrada adequada $u:[0,T]\to\mathbb{R}^m$. Tal problema de controle é denominado de **planejamento de trajetórias**. Quando $y=h(x)$ é uma saída flat de (13.1), a solução do problema de planejamento de trajetórias recai na construção de uma aplicação $\bar{y}:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ de classe C^∞ que obedeça as seguintes restrições determinadas por (13.24):

(A) $x_0=\mathscr{A}\left(\bar{y}^{(0)}(t),\bar{y}^{(1)}(t),\ldots,\bar{y}^{(\gamma)}(t)\right)\Big|_{t=0}$;

(B) $x_T=\mathscr{A}\left(\bar{y}^{(0)}(t),\bar{y}^{(1)}(t),\ldots,\bar{y}^{(\gamma)}(t)\right)\Big|_{t=T}$.

Teorema: Assuma que o sistema (13.1) é flat. A aplicação da entrada dada por (13.25)

$$u(t)=\mathscr{B}(\bar{y}^{(0)}(t),\bar{y}^{(1)}(t),\ldots,\bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad \text{para } t\in[0,T],$$

onde $\bar{y}:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^∞ que obedece as restrições (A) e (B) anteriores [8], leva o sistema de x_0 em $t=0$ até x_T em $t=T$. Em particular, se um sistema é flat, ele possui garantidamente uma propriedade de controlabilidade[9].

Obs: Ressaltamos que apesar de a lei de controle acima resolver o problema de planejamento de trajetórias de maneira trivial, essa é uma solução em **malha-aberta**. Uma estratégia de controle em malha-fechada deve ser capaz de corrigir erros de condição inicial, de modelagem, de influência de perturbações, etc.

[8] Sempre podemos construir uma aplicação $\bar{y}:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ de classe C^∞ que satisfaz tais restrições por interpolação polinomial. Para maiores detalhes, veja [4, pp. 182–184].

[9] Para definições e resultados de controlabilidade para sistemas não-lineares, veja [5] e [4].

Note que, se $y = h(x)$ é uma saída flat do sistema (13.1), então (13.24) implica que ao forçarmos $y(t)$ a rastrear $\bar{y}(t)$, o estado $x(t)$ do sistema fica completamente determinado. Desse modo, para sistemas flat, o problema de rastreamento da saída se confunde com o problema de controlar o seu estado. Veremos agora que, quando a saída $y = h(x)$ do sistema (13.1) é flat, o problema de rastreamento de saída pode muitas vezes ser solucionado de maneira relativamente simples e direta. Isto é ilustrado a seguir.

Exemplo 5: [7] No Exemplo 2 acima, mostramos que $y = x_1$ é uma saída flat para o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= y^{(1)}, \\ x_3 &= y^{(2)} + \sin(y) + y, \\ x_4 &= y^{(3)} + y^{(1)}\cos(y) + y^{(1)}, \\ u &= y^{(4)} + y^{(2)}\cos(y) - (y^{(1)})^2\sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y). \end{aligned}$$

Para resolvermos o problema de rastreamento de saída, basta encontrarmos uma realimentação de estado $u = \delta(x, w)$, onde $w \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, que linearize a dinâmica de y. A ideia é impor que (pois $y^{(4)}$ é a maior derivada de y que aparece na expressão de u acima):

$$y^{(4)} = w.$$

É fácil ver que realimentação de estado

$$\begin{aligned} u &= y^{(2)}\cos(y) - (y^{(1)})^2\sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y) + w, \\ &= \underbrace{[x_3 - x_1 - \sin(x_1)]}_{=y^{(2)}=\dot{x}_2}\cos(x_1) - x_2^2\sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + w, \end{aligned}$$

atinge o desejado, ou seja, assegura que $y^{(4)} = w$. Escolhendo

$$w = \bar{y}^{(4)} + v,$$

onde $\bar{y} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é a saída de referência desejada de classe C^∞, obtemos que a dinâmica do erro $e = y - \bar{y}$ é linear e dada por

$$e^{(4)} = v.$$

Logo, tudo o que nos resta fazer é determinar uma realimentação estabilizante v como na Seção 13.2.2 acima.

Escolhendo a realimentação estabilizante v como

$$v = a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e$$

implica que

$$e^{(4)} - a_3 e^{(3)} - a_2 e^{(2)} - a_1 e^{(1)} - a_0 e = 0,$$

e então especificamos os ganhos $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ de modo que as raízes da equação característica do erro

$$\pi(s) = s^4 - a_3 s^3 - a_2 s^2 - a_1 s - a_0$$

estejam no SPE (polos da dinâmica do erro no SPE).

Portanto, a realimentação estabilizante v projetada, rescrita em função do estado x e do tempo t, é dada por

$$\begin{aligned}
v = \gamma(x,t) &= a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e, \\
&= a_3[y^{(3)} - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2[y^{(2)} - \bar{y}^{(2)}(t)] + a_1[y^{(1)} - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0[y - \bar{y}(t)], \\
&= a_3[x_4 - x_2\cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2[x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\
&+ a_1[x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0[x_1 - \bar{y}(t)],
\end{aligned}$$

pois encontramos anteriormente que

$$\begin{aligned}
&y = x_1, \\
&y^{(1)} = x_2, \\
&y^{(2)} = \dot{x}_2 = x_3 - x_1 - \sin(x_1), \\
&y^{(3)} = x_4 - y^{(1)}\cos(y) - y^{(1)} = x_4 - x_2\cos(x_1) - x_2.
\end{aligned}$$

Por fim, a realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned}
u &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)]\cos(x_1) - x_2^2\sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + w, \\
&= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)]\cos(x_1) - x_2^2\sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \underbrace{\bar{y}^{(4)}(t) + v}_{=w}, \\
&= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)]\cos(x_1) - x_2^2\sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \bar{y}^{(4)}(t) + \\
&+ a_3[x_4 - x_2\cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2[x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\
&+ a_1[x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0[x_1 - \bar{y}(t)],
\end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência $\bar{y}(t)$.

13.4 O Problema de Linearização Exata

Começamos apresentando dois exemplos motivacionais.

Exemplo 1: Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e entrada $u \in \mathbb{R}$, da forma

$$\dot{x} = f(x,u)$$

e dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_1^2 + x_2^2)u. \end{aligned}$$

A realimentação de estado não-linear

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 + v),$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, permite cancelar perfeitamente as não-linearidades, resultando no seguinte sistema **linear** em **malha-fechada**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v. \end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{x} = Ax + Bv,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que tal sistema linear é controlável, pois posto$(\mathscr{C}) =$ posto$([B \;\; AB]) = 2$. Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma $v = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$ de modo a estabilizarmos a origem do sistema acima e, desse modo, concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 - k_1x_1 - k_2x_2),$$

aplicada ao sistema original $\dot{x} = f(x,u)$, assegura que a origem do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

Exemplo 2: Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ e entrada $u \in \mathbb{R}$, da forma

$$\dot{x} = f(x,u)$$

e dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{(1 + x_1^2)}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{\left(1 + x_1^2\right)^2} + \left(1 + x_1^2\right)\left(\frac{x_2^2}{\left(1 + x_1^2\right)^2} + \left(1 + x_1^2\right)u\right). \end{aligned}$$

Observe que $\dot{x}_1$ não pode ser linearizado diretamente por uma realimentação. Definimos então a mudança de coordenadas **não-linear** $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$, onde $z_1 = x_1$ e $z_2 = x_2/(1 + x_1^2)$. Note que a aplicação ϕ possui inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$, onde $x_1 = z_1$ e $x_2 = z_2(1 + z_1^2)$. Portanto, ϕ é um difeomorfismo, ou seja, ϕ é de fato uma mudança de coordenadas. Assim, aplicando a regra da cadeia, teremos nas novas coordenadas z que

$$\dot{z}(t) \;=\; \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x(t)} \dot{x}(t) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x(t)} f(x(t),u(t)).$$

Substituindo $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$, obtemos

$$\dot{z} = \left.\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x,u)\right)\right|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left.\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} & \dfrac{1}{(1+x_1^2)} \end{bmatrix} f(x,u)\right)\right|_{x=\phi^{-1}(z)},$$

com

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2}{(1+x_1^2)} \\ \dfrac{2x_1x_2^2}{\left(1+x_1^2\right)^2} + \left(1+x_1^2\right)\left(\dfrac{x_2^2}{\left(1+x_1^2\right)^2} + \left(1+x_1^2\right)u\right) \end{bmatrix}.$$

Note que a equação de estado acima é da forma

$$\dot{z} = g(z,u)$$

e corresponde à expressão do **mesmo sistema** nas novas coordenadas z. Fazendo os cálculos, vamos encontrar

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 + (1+z_1^2)u. \end{aligned}$$

Escolhendo a realimentação de estado **não-linear**

$$u = \delta(z,v) = \frac{1}{1+z_1^2}(-z_2^2 + v),$$

onde $v \in \mathbb{R}$ é a nova entrada, determinamos o sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v. \end{aligned}$$

Este sistema é **linear** e da forma

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vê-se que o sistema em **malha-fechada**, nas **novas coordenadas** z, é **linear e controlável**. Além disso, nas coordenadas originais x, a realimentação de estado **não-linear** é dada por

$$u = \delta(\phi(x),v) = \gamma(x,v) = \frac{1}{1+x_1^2}\left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + v\right).$$

Conclui-se então que uma mudança de coordenadas não-linear $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado não-linear[10] $u = \gamma(x, v)$, permitem cancelar de maneira exata as não-linearidades do sistema e obter um sistema em malha-fechada que é linear e controlável.

Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma $v = -Kz = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ de modo a estabilizarmos a origem de

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

e, desse modo, como $(z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$ com $(0,0) = \phi(0,0)$, concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+x_1^2}\left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1 z_1 - k_2 z_2\right), \\ &= \frac{1}{1+x_1^2}\left(-\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1 x_1 - k_2 \frac{x_2}{1+x_1^2}\right), \end{aligned}$$

aplicada ao sistema original $\dot{x} = f(x, u)$, assegura que a origem do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

Os resultados dos exemplos acima dão origem ao seguinte problema:

Problema de Linearização Exata: Encontrar uma realimentação de estado e uma mudança de coordenadas, tais que o sistema em malha-fechada, quando escrito nessas novas coordenadas, seja um sistema linear controlável.

Na próxima seção, veremos a conexão entre o problema de linearização exata, o problema de desacoplamento e o problema de estabilização de um ponto de equilíbrio.

13.4.1 Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Para tratarmos **mudanças de coordenadas não-lineares** de maneira precisa, precisamos primeiramente apresentar um teorema fundamental de análise matemática, denominado de **Teorema da Função Inversa**. Sejam W e Z abertos de $\mathbb{R}^n$. Lembramos que uma aplicação $\phi : W \to \phi(W) = Z$ de classe C^∞ que admite inversa $\psi = \phi^{-1} : Z \to \phi^{-1}(Z) = W$ de classe C^∞ é denominada de **difeomorfismo** ou de **mudança de coordenadas local** em W.

Teorema da Função Inversa: Considere que $F : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^∞, onde W é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Seja $J(x) = \partial F(x)/\partial x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz Jacobiana da aplicação F no ponto $x \in W$. Seja $x_0 \in W$ e $y_0 = F(x_0)$. Assuma que $\det\big(J(x_0)\big) \neq 0$ (ou, equivalentemente, posto$\big(J(x_0)\big) = n$). Então, existe uma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 e uma vizinhança aberta $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$ de $y_0 = F(x_0)$ tais que a aplicação $\phi : U_{x_0} \to V_{y_0} = \phi(U_{x_0}) = F(U_{x_0})$ definida por $z = \phi(x) = F(x)$, para todo $x \in U_{x_0}$, é um difeomorfismo em U_{x_0} (dizemos então que F é um **difeomorfismo local** em $U_{x_0} \subset W$).

[10] Ou, equivalentemente, $u = \gamma(\phi^{-1}(z), v) = \delta(z, v)$.

Ressaltamos que, no enunciado do teorema, dizer que ϕ é a mesma aplicação que F seria um abuso de linguagem. De fato, o domínio destas aplicações em geral não coincidem (nem o contradomínio), pois na maioria dos casos U_{x_0} é um subconjunto aberto próprio de W e V_{y_0} é um subconjunto aberto próprio de $\mathbb{R}^n$.

Obs 1: Suponha que uma aplicação $F : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ é tal que $\det\big(J(x)\big) \neq 0$, para todo $x \in W$, onde W é um aberto. O Teorema da Função Inversa implica que $F(W)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, mas não assegura que $F : W \to F(W)$ é um difeomorfismo em W. No entanto, $F : W \to F(W)$ é um difeomorfismo em W se e somente se F é uma aplicação injetiva, ou seja, $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$, para quaisquer $x, y \in W$.

Exemplo 3:[3] Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$z = (z_1, z_2) = F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_2)$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos(x_2) \end{bmatrix}.$$

Como $\det\big(J(0)\big) = 1 \neq 0$, concluímos que existe uma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^2$ de $x_0 = 0$ tal que $z = F(x)$ é um difeomorfismo local em U_{x_0}. Note que $\det\big(J(x_1, x_2)\big) = 0$ quando $x_2 = \pi/2 + k\pi$.

Exemplo 4:[3] Considere a aplicação $F : W \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \dfrac{1}{x_1 + 1} \end{bmatrix}$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq -1\}$. Temos que $W \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto,

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{(x_1 + 1)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det\big(J(x)\big) = 1 \neq 0$, para todo $x = (x_1, x_2) \in W$. Como F é injetiva, concluímos que $F : W \to F(W)$ é um difeomorfismo em W.

Vamos agora tratar o problema de linearização exata que foi enunciado de maneira relativamente imprecisa no início deste capítulo.

Problema de Linearização Exata: Seja $x_0 \in V$ um ponto de trabalho[11] do sistema (13.1). Dizemos que o **problema de linearização exata é localmente solúvel** em x_0, se existir uma mudança de coordenadas local $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado localmente regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, ambas definidas em uma vizinhança aberta $U \subset V$

[11] Novamente, aqui, x_0 não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

de x_0, tais que, nas novas coordenadas $z = \phi(x)$, o sistema em malha-fechada (13.4) se expresse localmente em $\phi(U)$ por um sistema linear controlável da forma

$$\dot{z} = Az + Bv. \tag{13.28}$$

Do mesmo modo, seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho, ou seja, U_0 é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o **problema de linearização é localmente solúvel** em U_0, se existir uma mudança de coordenadas local $z = \phi(x)$ e uma realimentação de estado localmente regular $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, ambas definidas em U_0, tais que, nas novas coordenadas $z = \phi(x)$, o sistema em malha-fechada (13.4) se expresse localmente em $\phi(U)$ por (13.28).

Obs 2: Note que

$$\begin{aligned} Az &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\tilde{f}(x)\right)\bigg|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}f(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}g(x)\alpha(x)\right)\bigg|_{x=\phi^{-1}(z)}, \\ B &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\tilde{g}(x)\right)\bigg|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}g(x)\beta(x)\right)\bigg|_{x=\phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Lema: Considere o sistema (13.1)–(13.2) e seja $x_0 \in V$. Assuma que a saída $y = h(x)$ do sistema admite grau relativo em uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 e que $\det\big(A(x_0)\big) \neq 0$. Seja $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ a soma dos graus relativos ρ_i das saídas $y_i = h_i(x)$. Considere a aplicação $z : U \to \mathbb{R}^\rho$ definida por[12]

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)), \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)), \\ &= (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \dots, z_{\rho_m}^m) \in \mathbb{R}^\rho, \end{aligned} \tag{13.29}$$

para $x \in U$. Seja $J(x) = \partial z(x)/\partial x$ a matriz Jacobiana de z no ponto $x \in U$ (note que $J(x)$ tem tamanho $\rho \times n$). Então, as ρ linhas de $J(x_0)$ são linearmente independentes ou, de maneira equivalente, posto$\big(J(x_0)\big) = \rho$ (posto completo). Em particular, $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \leq n$.

Uma demonstração geométrica deste resultado pode ser encontrada em[3].

Obs 2: Relembre que, pela Obs 1 da Seção 13.2.1, se $y = h(x)$ admite grau relativo em x_0, então existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U. Além disso[13], se $f(x_0) = 0$ e $h(x_0) = 0$, temos que a definição de derivada de Lie implica que $L_f^k h_i(x_0) = 0$, para todo $0 \leq k \leq \rho_i$, $1 \leq i \leq m$. Logo, $z(x_0) = 0$ em (13.29) e $\alpha(x_0) = 0$ em (13.8).

Teorema 1: Considere o sistema (13.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $x_0 \in V$ um ponto

12 Da definição de grau relativo, temos que $y_i^{(k)} = L_f^k h_i(x)$ depende apenas de x para $0 \leq k \leq \rho_i - 1$.

13 Note que assumir que $f(x_0) = 0$ é o mesmo que dizer que x_0 é um ponto de equilíbrio de (13.1)–(13.2) para $u = 0$. Observe também que, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir que $h(x_0) = 0$. De fato, se $h(x_0) \neq 0$, então ao escolhermos como nova saída $\bar{y} = \bar{h}(x) = h(x) - h(x_0)$, a qual corresponde a uma translação da origem do espaço de saída, teremos que $\bar{h}(x_0) = 0$ e $L_f^{k+1} h_i = L_f^{k+1} \bar{h}_i$, $L_{g_j} L_f^k h_i = L_{g_j} L_f^k \bar{h}_i$, para $k \geq 0$. Assim, $\bar{y}_i = \bar{h}_i(x)$ admite grau relativo $\bar{\rho}_i = \rho_i$ em x_0.

de trabalho. Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em x_0 **se e somente se** existir uma saída[14] $y = h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))$ ($m$componentes) tal que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em uma vizinhança aberta de x_0, é de classe C^∞ e admite grau relativo em x_0;
- A matriz de desacoplamento é não singular em x_0, ou seja, $\det\big(A(x_0)\big) \neq 0$;
- $\rho = \sum_{i=1}^{m} \rho_i = n$.

Prova: O fato de que tais condições são suficientes ($\Leftarrow$) é uma consequência do resultado acima. De fato, com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 13.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0 tal que $y = h(x)$ admite grau relativo em U e $\det\big(A(x)\big) \neq 0$, para todo $x \in U$. Pelo lema anterior, temos que a matriz quadrada $\rho \times n = n \times n$ dada por $Z(x_0) = \partial z(x_0)/\partial x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem determinante não-nulo. Defina a aplicação $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ por $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local em alguma vizinhança aberta $U_{x_0} \subset U$ de x_0. Por construção, temos que, nas novas coordenadas $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, o sistema (13.1) com a saída $y = h(x)$ é descrito por:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{z}_1^i &=& z_2^i \\ \dot{z}_2^i &=& z_3^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &=& z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &=& a_i(\phi^{-1}(z,\eta)) + A_i(\phi^{-1}(z,\eta))u \\ y_i &=& z_1^i \end{array}\right\}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{13.30}$$

Logo, com a realimentação desacoplante (13.8), que é uma realimentação de estado estática localmente regular em U_{x_0}, e nas coordenadas locais $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$, o sistema malha-fechada (13.4)–(13.5) se expressa localmente em $V_{z_0} = \phi(U_{x_0})$, onde $z_0 = \phi(x_0) = z(x_0)$, por:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{z}_1^i &=& z_2^i \\ \dot{z}_2^i &=& z_3^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &=& z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &=& v_i \\ y_i &=& z_1^i \end{array}\right\} \quad \equiv \quad (z_1^i)^{(\rho_i)} = y_i^{(\rho_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{13.31}$$

[14] Aqui, $y = h(x)$ não precisa ser a saída real de (13.1).

Agora, note que, para cada $1 \leq i \leq m$, (13.31) é um sistema linear controlável da forma

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A_i z^i + B_i v_i, \\ y_i &= C_i z^i, \end{aligned} \tag{13.32}$$

onde $z^i = (z^i_1, \ldots, z^i_{\rho_i})' \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ é o estado, $y_i = z^i_1 \in \mathbb{R}$ é a saída, e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{\rho_i \times \rho_i}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\rho_i \times 1}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times \rho_i}.$$

Tal sistema linear é essencialmente a conexão em cascata de ρ_i integradores, em que a entrada v_i e o estado z^i são obtidos derivando-se ρ_i vezes a saída $y_i^{(0)} = y_i = z^i_1$, obtendo-se sucessivamente $y_i^{(1)} = (z^i_1)^{(1)} = z^i_2, \ \ldots, \ y_i^{(\rho_1 - 1)} = (z^i_1)^{(\rho - 1)} = z^i_n$, até pararmos em $y_i^{(\rho_i)} = (z^i_1)^{(\rho_i)} = v_i$. Mostra-se que este sistema possui ρ_i pólos em $s = 0$ (ou, equivalentemente, os autovalores de A_i são todos nulos com multiplicidade ρ_i).

Desse modo, mostramos que, nas coordenadas locais $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ e com a realimentação de estado estática localmente regular (13.8), as quais são definidas em uma vizinhança aberta U_{x_0} de x_0, o sistema em malha-fechada é descrito pela **forma canônica de Brunowsky**:

$$\dot{z} = Az + Bv, \tag{13.33}$$

onde $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)' = ((z^1)', (z^2)', \ldots, (z^m)')' \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_m \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_m \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Pode-se mostrar que a forma canônica de Brunowsky é controlável, o que finaliza a demonstração da suficiência ($\Leftarrow$) no teorema. Para uma prova da necessidade ($\Rightarrow$), consulte[15] [3].

Teorema 2: Considere o sistema (13.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \ldots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $U_0 \subset V$ uma região de trabalho. Suponha que existe uma saída[16] $y = h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))$ (m componentes) tal que:

- A saída $y = h(x)$ está definida em U_0, é de classe C^∞ e admite grau relativo em U_0;

[15] Em [3], há um critério de existência de $y = h(x)$ através do cálculo dos *colchêtes de Lie* dos campos de vetores $f, g_1, \ldots, g_m$ que definem (13.1).

[16] Novamente, aqui, $y = h(x)$ não precisa ser a saída real de (13.1).

- A matriz de desacoplamento é não singular em U_0, ou seja, $\det\big(A(x)\big) \neq 0$, para todo $x \in U_0$;

- $\rho = \sum_{i=1}^{m} \rho_i = n$;

- A aplicação $z : U_0 \to \mathbb{R}^\rho = \mathbb{R}^n$ em (13.29) é injetiva.

Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em U_0 através da mudança de coordenadas local $z : U_0 \to z(U_0)$ e da realimentação desacoplante (13.8). Mais precisamente, a mudança de coordenadas coordenadas local $z : U_0 \to z(U_0)$ e a realimentação (13.8) estão definidas em U_0, e são tais que, nas novas coordenadas z, o sistema em malha-fechada (13.4) se expressa localmente em $z(U_0)$ pela forma canônica de Brunowsky (13.33).

Prova: Este resultado é uma consequência do lema acima, da Obs 1 após o Teorema da Função Inversa, e da prova do Teorema 1 anterior.

Na sequência, vamos relacionar linearização exata com desacoplamento e com estabilização de um ponto de equilíbrio.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, a origem $z^i = 0$ do sistema (13.32) pode ser estabilizada por uma realimentação de estado

$$v_i = F_i z^i \tag{13.34}$$

projetada como se segue. Seja $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{\rho_i}^i\}$ o conjunto de polos desejados em malha-fechada (SPE). Assim,

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$$

é o polinômio característico desejado em malha-fechada. Escreva

$$\pi_i(s) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i s^k.$$

Prova-se que a realimentação (matriz linha)

$$F_i = [a_0^i \; a_1^i \; \ldots a_{\rho_i - 1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}$$

fornece[17]

$$\sigma(A_i + B_i F_i) = \Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{\rho_i}^i\}.$$

Agrupando todas as realimentações estabilizantes (13.34), para $i = 1, \ldots, m$, obtemos

$$v = Fz, \tag{13.35}$$

[17] Aqui, $\sigma(A)$ denota o conjunto de autovalores da matriz quadrada A.

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)' = ((z^1)', (z^2)', \dots, (z^m)')' \in \mathbb{R}^n.$$

Agora, suponha que

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2, \dots, z_n) = z(x), \\ &= (\underbrace{h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x)}_{=z^1}, \dots, \underbrace{h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m - 1} h_m(x)}_{=z^m}), \\ &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1 - 1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m - 1)}(x)). \end{aligned} \tag{13.36}$$

É claro que o procedimento descrito acima equivale a escolher

$$y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i = F_i z^i = \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i z_k^i = \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i y_i^{(k)},$$

que por sua vez implica que

$$(z_1^i)^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i (z_1^i)^{(k)} = y_i^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i - 1} a_k^i y_i^{(k)} = 0$$

é uma EDO linear homogênea com pólos estáveis $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i$.

O próximo resultado, o qual segue dos argumentos acima e da demonstração do Teorema 1, é uma condição suficiente para a solução do problema de desacoplamento com estabilidade em malha-fechada.

Teorema 3: [3] A forma canônica de Brunowsky (13.33) (sistema linear com vetor de estado $z \in \mathbb{R}^n$ e vetor de entrada $v \in \mathbb{R}^m$) é desacoplada e $z_0 = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente** assintoticamente estável de (13.33) com a realimentação (13.35). Em particular, se as hipóteses do Teorema 1 forem atendidas com $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, então[18] x_0 é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema (13.1) com a realimentação desacoplante (13.8) seguida da realimentação estabilizante (13.35)–(13.36).

Obs 3: No resultado acima, note que a realimentação desacoplante (13.8) seguida da realimentação estabilizante (13.35)–(13.36) a ser aplicada na estabilização de x_0 nada mais é do que a realimentação (13.17) a ser aplicada para o rastreamento da saída $\bar{y} \equiv 0$ ao assumirmos que $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_m = n$.

[18] Aqui, como $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, temos que $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (13.33) para $v = 0$. Veja a Obs 2 acima.

Exemplo 5: No Exemplo 4 da Seção 13.2.1, estudamos o sistema definido em $V=\mathbb{R}^5$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2+x_2^2 \\ x_3-x_1x_4+x_4x_5 \\ x_2x_4+x_1x_5-x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1-x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \\
y_1 &= h_1(x) = x_1 - x_5, \\
y_2 &= h_2(x) = x_4.
\end{aligned}
$$

Escolhemos $x_0=0$. Note que $f(x_0)=0$, $h(x_0)=0$, e que posto $g(x)=[g_1(x)\ \ g_2(x)]=2$, para todo $x\in V=\mathbb{R}^5$. Vimos anteriormente que $\det A(x_0)\neq 0$, $\rho_1=3$, $\rho_2=2$, e que a realimentação desacoplante (13.8) assegurou que

$$
\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= v_1, \\
y_2^{(2)} &= v_2.
\end{aligned}
$$

Temos que $\rho=\rho_1+\rho_2=5$. Isto implica que

$$
\begin{aligned}
z = (z_1,z_2,\ldots,z_5) &= (z^1,z^2) = (z_1^1,z_2^1,z_3^1,z_1^2,z_2^2), \\
&= (y_1^{(0)}(x),y_1^{(1)}(x),y_1^{(2)}(x),y_2^{(0)}(x),y_2^{(1)}(x)), \\
&= (h_1(x),L_fh(x),L_f^2h(x),h_2(x),L_fh_2(x)), \\
&= (\underbrace{x_1-x_5,x_2,x_3-x_1x_4+x_4x_5}_{z^1=\gamma_1(x)}\ \underbrace{x_4,x_5}_{z^2=\gamma_2(x)}),
\end{aligned}
$$

define uma mudança de coordenadas local $z=\phi(x)=z(x)$ em torno de x_0 com

$$
\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= (z_1^1)^{(3)} = v_1, \\
y_2^{(2)} &= (z_1^2)^{(2)} = v_2,
\end{aligned}
$$

ou seja, nas novas coordenadas $z=\phi(x)=z(x)$, o sistema em malha-fechada é dado pela seguinte forma de canônica de Brunowsky:

$$
\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0&0 \\ 0&0 \\ 1&0 \\ 0&0 \\ 0&1 \end{bmatrix} v.
$$

Além do mais, a realimentação desacoplante u determinada no Exemplo 4 da Seção 13.2.1, seguida a realimentação estabilizante v em (13.35)–(13.36)

$$
\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = v = Fz = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1z^1 \\ F_2z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1\gamma_1(x) \\ F_2\gamma_2(x) \end{bmatrix},
$$

estabiliza assintoticamente (localmente) a origem $x_0 = 0$ do sistema original acima.

A realimentação de estado resultante

$$\begin{aligned} u &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}Fz, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}\begin{bmatrix} F_1\,\gamma_1(x) \\ F_2\,\gamma_2(x) \end{bmatrix}, \\ &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}\begin{bmatrix} a_0^1(x_1 - x_5) + a_1^1 x_2 + a_2^1(x_3 - x_1x_4 + x_4x_5) \\ a_0^2 x_4 + a_1^2 x_5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

está definida apenas em uma vizinhança aberta $U \subset V = \mathbb{R}^5$ de $x_0 = 0$, onde as matrizes de ganho

$$F_1 = [a_0^1 \ \ a_1^1 \ \ a_2^1] \in \mathbb{R}^3, \quad F_2 = [a_0^2 \ \ a_1^2] \in \mathbb{R}^2,$$

são escolhidas de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\pi_1(s) = s^3 - \sum_{k=0}^{2} a_k^1 s^k, \qquad \pi_2(s) = s^2 - \sum_{k=0}^{1} a_k^2 s^k,$$

estejam no SPE. Note que a realimentação u acima nada mais é do que a realimentação u determinada no Exemplo 5 da Seção 13.2.2 com $\bar{y} \equiv 0$, conforme a Obs 3 anterior.

Relembramos, aqui, que a realimentação de estado u acima de fato estabiliza a origem $x_0 = 0$ do sistema em malha-fechada, pois, por construção:

$$\begin{aligned} (z_1^1)^{(3)} = y_1^{(3)} = v_1 = F_1 z^1 = \sum_{k=0}^{2} a_k^1 z_k^1 = \sum_{k=0}^{2} a_k^1 (z_1^1)^{(k)}, \ \text{com } F_1 = [a_0^1 \ \ a_1^1 \ \ a_2^1], \\ (z_1^2)^{(2)} = y_2^{(2)} = v_2 = F_2 z^2 = \sum_{k=0}^{1} a_k^2 z_k^2 = \sum_{k=0}^{1} a_k^2 (z_1^2)^{(k)}, \ \text{com } F_2 = [a_0^2 \ \ a_1^2], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (z_1^1)^{(3)} - a_2^1 (z_1^1)^{(2)} - a_1^1 (z_1^1)^{(1)} - a_0^1 z_1^1 = 0, \\ (z_1^2)^{(2)} - a_1^2 (z_1^2)^{(1)} - a_0^2 z_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 4: [3] Considere as hipóteses do Teorema 2 e que $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$. Seja[19] $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Então, x_0 é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (13.1) com a realimentação desacoplante (13.8) seguida da realimentação estabilizante (13.35)–(13.36), e

$$\{x(0) \in U_0 \mid x(t) \in U_0 \text{ para todo } t \geq 0\} \subset R_A(x_0),$$

onde $R_A(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ é região de atração de x_0. Em particular, se $U_0 = V = \mathbb{R}^n$, então x_0 é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema em malha-fechada.

[19] Aqui, como $f(x_0) = 0$, $h(x_0) = 0$, temos que $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (13.33) para $v = 0$. Veja a Obs 2 acima.

Exemplo 6: Considere novamente um robô com n graus de liberdade e com atuação em todas as juntas. Pelo o que vimos anteriormente no Exemplo 6 da Seção 13.2.2, temos que cada componente $y_i = q_i$ da saída $y = h(q) = q$ (com $W = \mathbb{R}^n$) admite grau relativo em todo o espaço de estado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que os mesmos são todos iguais a dois, ou seja, $\rho_1 = \cdots = \rho_n = 2$. Além disso, a matriz de desacoplamento $A(x)$ é dada por $A(x) = M^{-1}(q)$, pois $\Gamma(q) = I$. Em particular, concluímos pelo Teorema 2 que o problema de linearização exata para o robô é **globalmente** solúvel em todo o espaço de estado $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, já que a dimensão do estado $x = (q, \dot{q})$ é $2n$, $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 2n$, $\text{posto}\big(A(x)\big) = \text{posto}\big(g(x)\big) = n$ em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e a aplicação (identidade) $z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $z(x) = x = (q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n)$ é injetiva (e sobrejetiva: $z(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). É importante ressaltar que as coordenadas generalizadas q nem sempre são as coordenadas $y = h(q)$ do efetuador (veja o Exemplo 6 da Seção 13.2.3).

13.4.2 Linearização Exata e Flatness

O teorema abaixo estabelece que todo sistema linearizável por uma realimentação de estado estática regular é flat. No entanto, a recíproca é falsa: existem sistemas flat que não são linearizáveis por realimentação estática regular da forma (13.3). É possível provar que todo sistema flat é linearizável por uma realimentação dinâmica da forma

$$\dot{z} = \alpha(x, z, v) \in \mathbb{R}^k,$$
$$u = \beta(x, z, v) \in \mathbb{R}^m,$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é nova entrada [1], [6]. O problema de mostrar que todo sistema que é linearizável por realimentação dinâmica é flat ainda é um problema aberto na Teoria de Controle.

Teorema: Considere o sistema (13.1) e assuma que, para todo $x \in V$, o posto da matriz $g(x) = [g_1(x) \ \ldots \ g_m(x)]$ é igual ao seu número m de colunas. Seja $x_0 \in V$. Se o problema de linearização exata é localmente solúvel em x_0, então (13.1) é flat.

Prova: De acordo com a demonstração do Teorema 1, temos que a expressão de (13.1) nas coordenadas locais (13.29)

$$z = \phi(x) = (y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(\rho_1-1)}, \ldots, y_m^{(0)}, \ldots, y_m^{(\rho_m-1)}) \in \mathbb{R}^n \tag{13.37}$$

e com a realimentação desacoplante (13.8)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{13.38}$$

as quais são definidas em uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x_0, está na forma canônica de Brunowsky (13.33) com (13.32). Em particular,

$$x = \phi^{-1}(z) = \mathscr{A}(z) = \mathscr{A}(y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(\rho_1-1)}, \ldots, y_m^{(0)}, \ldots, y_m^{(\rho_m-1)}) \tag{13.39}$$

e

$$v = (y_1^{(\rho_1)}, \ldots, y_m^{(\rho_m)}). \tag{13.40}$$

Assim, x pode ser escrito como função de y e de suas derivadas até uma ordem finita $\gamma = \max\{\rho_1 - 1, \ldots, \rho_m - 1\}$. E, a partir de (13.38)–(13.40), concluímos que

$$u = \alpha(\mathscr{A}(z)) + \beta(\mathscr{A}(z))v = \mathscr{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\delta)}),$$

onde $\delta = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$.

14 Método Direto de Lyapunov

Neste capítulo, estudaremos o Método Direto de Lyapunov, que estabelece condições suficientes para determinarmos o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear: estável, assintoticamente estável e globalmente assintoticamente estável. Ao contrário do Método Indireto de Lyapunov visto no Capítulo 11, que se baseia no sistema linearizado (e tem a restrição de que todos os polos do sistema linearizado estejam fora do eixo imaginário), o Método Direto de Lyapunov leva em conta o sistema não-linear por completo através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia.

Começarmos este capítulo analisando como que a variação da energia total do pêndulo simples ao longo das soluções permite caracterizar o tipo de estabilidade da origem. Este exemplo motivará a apresentação do Método Direto de Lyapunov na sequência. Veremos também como esse método é aplicado no projeto de controladores.

Motivação: Considere novamente a equação de estado de um pêndulo simples (não-controlado):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2,
\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado. Relembre que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio do pêndulo. A energia total $E(x)$ do pêndulo no ponto $x = (x_1, x_2)$, com relação ao referencial $E(0) = 0$, é a soma da energia potencial com a energia cinética, ou seja:

$$E(x) = \int_0^{x_1} \frac{g}{\ell}\sin(\tau)d\tau + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{g}{\ell}[1-\cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0.$$

Então, ao longo das soluções $x(t)$ do sistema, temos que:

$$E(x(t)) = \frac{g}{\ell}[1-\cos(x_1(t))] + \frac{1}{2}x_2^2(t).$$

Primeiramente, considere que $k = 0$ (sem atrito). Então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(x(t)) &= \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t),\\
&= \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))x_2(t),\\
&= 0.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$E(x(t)) = E(x(0)) = c, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Isto significa que a energia total é conservada ao longo das soluções do sistema. Logo, para $x(0) \cong 0$, temos que $x(t) \cong 0$ para $t \geq 0$ e, assim, chegamos novamente à conclusão de que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável na ausência de atrito.

Agora, considere que $k > 0$ (com atrito). Suponha que $x_2(0) \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(x(t)) &= \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t), \\
&= \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{k}{m}x_2^2(t), \\
&= -\frac{k}{m}x_2^2(t) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $E(x(t_2)) < E(x(t_1))$ sempre que $t_2 > t_1$. Isto significa que a energia total é dissipada ao longo das soluções do sistema. Logo, se $E(x(t))$ tender para zero à medida que $t \to \infty$, então $x(t)$ tenderá para a origem quando $t \to \infty$ e, consequentemente, concluiremos que a origem é assintoticamente estável. Portanto, percebemos que a análise da derivada de $E(x(t))$ (energia total ao longo das soluções do sistema) permite determinar o tipo de estabilidade da origem. Em 1892, Lyapunov mostrou como determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia. Isto é o que veremos na sequência.

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos considerar sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{14.1}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)' \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (continuamente diferenciável). Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, i.e. $f(x^e) = 0$. Sem perda de generalidade, sempre podemos considerar que $x^e = 0$ pois, fazendo a translação $z = x - x^e$ (mudança de coordenadas), temos que

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x^e) \triangleq g(z), \tag{14.2}$$

com $g(0) = f(x^e) = 0$, ou seja, $z^e = 0$ é um ponto de equilíbrio de (14.2). Temos então que x^e um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (14.1) se e somente se $z^e = 0$ é um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (14.2). **Por simplicidade, de agora em diante vamos sempre supor que a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio de** (14.1).

Seja $V\colon D_v \to \mathbb{R}$ uma função com $V(0) = 0$, onde $D_v \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto contendo a origem $x = 0$. Considere $W \subset D_v$ com $x = 0 \in W$. Temos então a seguinte classificação da função V:

1. V é **definida positiva** em W se $V(x) > 0$ para todo $x \in W$ com $x \neq 0$;

2. V é **semidefinida positiva** em W se $V(x) \geq 0$ para todo $x \in W$;

3. V é **definida negativa** em W se $V(x) < 0$ para todo $x \in W$ com $x \neq 0$, ou seja, se $-V$ é definida positiva em W;

4. V é **semidefinida negativa** em W se $V(x) \leq 0$ para todo $x \in W$, ou seja, se $-V$ é semidefinida positiva em W.

Agora, seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (14.1). Considere que $V\colon D_v \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável, onde $D_v \subset D$ é uma vizinhança aberta de $x^e = 0$. Definimos a **derivada** $\dot{V}\colon D_v \to \mathbb{R}$ **de** V **(ao longo das soluções de** (14.1)**)** por

$$\dot{V}(x) \triangleq L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x), \quad x \in D_v.$$

Note que $\dot{V}(0) = 0$ pois $f(0) = 0$. Pela regra da cadeia, temos que:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V\big(\phi(t,x)\big)\Big|_{t=0}, \quad x \in D_v,$$

onde $\phi(t,x)$ denota a solução do sistema (14.1) no instante t para a condição inicial x em $t_0 = 0$.

Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (14.1). Considere que $V\colon D_v \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, onde $D_v \subset D$ é uma vizinhança aberta de $x^e = 0$. Temos que:

1. Se V é **definida positiva** em D_v (i.e. $V(x) > 0$ para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$) e $\dot{V}$ é **semidefinida negativa** em D_v (i.e. $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in D_V$), então $x^e = 0$ é **estável**;

2. Se V é **definida positiva** em D_v (i.e. $V(x) > 0$ para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$) e $\dot{V}$ é **definida negativa** em D_v (i.e. $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in D_V$ com $x \neq 0$), então $x^e = 0$ é **(localmente) assintoticamente estável**.

Dizemos que V é uma **função de Lyapunov** para o sistema (14.1) quando V satisfaz as condições de um dos 2 casos acima.

Ideia da demonstração da estabilidade assintótica: Seja $x(0) \neq 0$. Então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

pois $x^e = 0$ é ponto de equilíbrio e, assim, $x(t)$ nunca poderá atingir $x^e = 0$. Mas, $V(x(t)) \geq 0$, $t \geq 0$. Logo, $V(x(t))$ é uma função decrescente e limitada inferiormente por zero. Desse modo, $V(x(t)) < V(x(0))$ e (veja a Proposição do Lab 6):

$$\lim_{t \to \infty} V(x(t)) = a \geq 0.$$

Pode-se então mostrar que, para $x(0)$ próximo o suficiente de $x^e = 0$, o limite acima implica que[1]

$$\lim_{t\to\infty} \dot{V}(x(t)) = 0,$$

que por sua vez assegura que (pois $\dot{V}(0) = 0$):

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Exemplo 1: Voltamos ao pêndulo simples **sem atrito** (e sem controle) visto no início desta seção:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) = f_2(x_1,x_2),
\end{aligned}$$

onde $x = (x_1,x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell}[1-\cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Note que $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ e que V é definida positiva no conjunto aberto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. Temos:

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{\ell}\sin(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \frac{g}{\ell}\sin(x_1)x_2 - \frac{g}{\ell}\sin(x_1)x_2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, como V é definida positiva e $\dot{V}$ é semidefinida negativa em D_v, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que $x^e = 0$ é estável.

No entanto, a origem não é assintoticamente estável. De fato, para qualquer condição inicial $x(0)$, temos que a solução $x(t)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

ou seja, $V(x(t)) = V(x(0))$ para $t \geq 0$. Assim, caso $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ para alguma condição inicial $x(0)$ com $x_2(0) \neq 0$, então teríamos pela continuidade de V que

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = V(0) = 0$$

o que contradiz $V(x(t)) = V(x(0))$ para todo $t \geq 0$.

Exemplo 2: Agora, considere o pêndulo simples **com atrito** (mas sem controle):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1,x_2),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 = f_2(x_1,x_2),
\end{aligned}$$

[1] Cuidado! Isto em geral não é verdade. Por exemplo, para $f(t) = e^{-t}\sin(e^{2t})$, temos que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, mas $\dot{f}(t)$ é **ilimitada!**

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$, $k > 0$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell}[1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2}x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{g}{\ell}\sin(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \frac{g}{\ell}\sin(x_1)x_2 - \frac{g}{\ell}\sin(x_1)x_2 - \frac{k}{m}x_2^2,\\ &= -\frac{k}{m}x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Temos então que $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ e V é definida positiva no aberto $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$. No entanto, $\dot{V}$ é semidefinida negativa em D_v: $\dot{V}(x) = 0$ para $x_2 = 0$ e qualquer $-\pi < x_1 < \pi$. Portanto, o Teorema de Lyapunov nos permite apenas concluir que $x^e = 0$ é estável. Entretanto, sabemos que $x^e = 0$ é assintoticamente estável na presença de atrito: a função da energia total escolhida não conseguiu mostrar esse fato.

Obs: Não há nenhum método sistemático para se encontrar funções de Lyapunov para um sistema. No caso de sistemas elétricos e mecânicos, energia total do sistema é a primeira escolha mais natural como função de Lyapunov. Mas, no caso geral, a escolha se dá por tentativa e erro. Pelo exemplo cima, percebemos que o Teorema de Lyapunov fornece apenas condições **suficientes** de estabilidade. A origem $x^e = 0$ pode ainda ser estável ou assintoticamente estável apesar da função $V(x)$ escolhida não satisfazer as condições do teorema. Em tal caso, devemos procurar por outra função $V(x)$ mais adequada ou utilizar outras técnicas de análise de estabilidade.

Exemplo 3: Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2,\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3,\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. A linearização na origem é dada por:

$$A = \left.\begin{bmatrix} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}\right|_{x=0} = \left.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j$$

Logo, nada podemos concluir sobre a estabilidade da origem pelo Método Indireto de Lyapunov. Vamos mostrar que a origem é assintoticamente estável pelo Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov).

Escolhemos:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(note que $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$). Logo:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4) < 0,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Desse modo, vemos que V é definida positiva e $\dot{V}$ é definida negativa em $\mathbb{R}^2$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável (mostraremos mais adiante que a estabilidade assintótica é na verdade global).

Proposição (Estimativa da Região de Atração): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (14.1) com $D = \mathbb{R}^n$. Considere que $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, e que D_v é uma vizinhança aberta da origem $x^e = 0$ tal que:

1. V é definida positiva em D_v e $\dot{V}$ é definida negativa em D_v, ou seja: $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in D_v$ com $x \neq 0$;

2. O conjunto
$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < c\}$$
é limitado e está contido em D_v, onde $c > 0$.

Então, $x^e = 0$ é assintoticamente estável e
$$\Omega_c \subset R_A(0)$$
onde $R_A(0)$ é a região de atração do ponto de equilíbrio $x^e = 0$.

Exemplo 4: Considere o sistema:
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2,\\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2),\end{aligned}$$
onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio. Escolhemos:
$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$
(note que $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$). Logo:
$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2),\ x \in \mathbb{R}^2.$$
Desse modo, vemos que V é definida positiva e $\dot{V}$ é definida negativa em $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável.

Além disso, para $c = 2$, temos que
$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2\} = D_v$$
é limitado, pois $\|x\| = \sqrt{V(x)} < \sqrt{2}$ para todo $x \in \Omega_c = D_v$. Logo, a proposição anterior determina que $D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\} \subset R_A(0)$ é uma estimativa da região de atração da origem.

Teorema de Lyapunov (Estabilidade Assintótica Global): Seja $x^e = 0$ um ponto de equilíbrio de (14.1) com $D = \mathbb{R}^n$. Considere que $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável com $V(0) = 0$ tal que:

- V é definida positiva em $\mathbb{R}^n$ e $\dot{V}$ é definida negativa em $\mathbb{R}^n$, ou seja: $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$;
- V é **radialmente ilimitada**, ou seja:[2]

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty.$$

Então, a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável**.

Prova: Seja $x(0) \in \mathbb{R}^n$ uma condição inicial arbitrária com $x(0) \neq 0$. Tome $c = V(x(0)) > 0$. Portanto, existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \leq c \Rightarrow \|x\| \leq r$. Desse modo, $\Omega_c \subset B_r(0)$, ou seja, Ω_c é um conjunto limitado. Logo, utilizando a proposição acima com $D_v = \mathbb{R}^n$, concluímos que $x(0) \in \Omega_c \subset R_A(0)$.

Exemplo 5: Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3. \end{aligned}$$

No Exemplo 3, mostramos que $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ é tal que V é definida positiva e $\dot{V}$ é definida negativa em $\mathbb{R}^2$. Como V é radialmente ilimitada, ou seja, $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$, concluímos que a origem $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema.

Exemplo 6 (Projeto de Controladores Estabilizantes): Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \phi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_1, x_2) + u. \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle, e ϕ, ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 com $\phi(0,0) = \psi(0,0) = 0$. Note que $x^e = (0,0)$, $u^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema. O objetivo é projetar uma realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1, x_2),$$

onde α: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $\alpha(0,0) = 0$, de modo que $x^e = 0$ seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \phi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_1, x_2) + \alpha(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Escolhendo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

[2] Temos que $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$ significa que: para todo $c > 0$ existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow V(x) > c$.

temos que $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável com $V(0) = 0$, V é definida positiva em $\mathbb{R}^2$ e V é radialmente ilimitada. Logo, devemos tentar encontrar $u = \alpha(x_1, x_2)$ de modo a impor que $\dot{V}$ seja definida negativa em $\mathbb{R}^2$, ou seja:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1[-x_1^3 + x_2\phi(x_1,x_2)] + x_2[\psi(x_1,x_2) + u],\\ &= -x_1^4 + x_1x_2\phi(x_1,x_2) + x_2\psi(x_1,x_2) + x_2\alpha(x_1,x_2) < 0, \quad x \neq 0.\end{aligned}$$

A escolha de

$$u = \alpha(x_1,x_2) = -x_2 - x_1\phi(x_1,x_2) - \psi(x_1,x_2)$$

assegura que $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $\alpha(0,0) = 0$ e que

$$\dot{V}(x) = -x_1^4 - x_2^2 < 0, \quad x \neq 0,$$

ou seja, $\dot{V}$ é definida negativa para o **sistema em malha-fechada**.

Concluímos assim que a realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1,x_2) = -x_2 - x_1\phi(x_1,x_2) - \psi(x_1,x_2)$$

garante que a origem $x^e = 0$ do sistema em malha-fechada é **globalmente assintoticamente estável**.

15 Lab 10 – Controlador Antiwindup e Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Objetivos

Vamos inicialmente relembrar o efeito windup e o controlador antiwindup. Em seguida, veremos como anular o efeito de certas não-linearidades estáticas através de um compensador não-linear. Por fim, projetaremos um controlador PI com antiwindup e um compensador de não-linearidade estática para controlar o modelo de um motor CC com saturação no atuador e zona morta.

15.1 Controlador Antiwindup

Em todo sistema de controle, o atuador apresenta saturação devido a limitações físicas. Por exemplo, uma válvula satura quando está completamente aberta ou fechada, e a saída de um amp-op é limitada por valores máximos e mínimos de tensão.

Considere um sistema realimentado através de um controlador PI e com saturação no atuador mostrado abaixo:

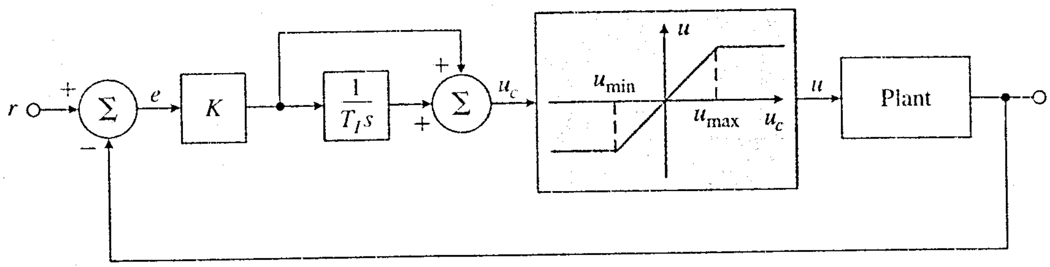


Figura 29 – Sistema realimentado com saturação no atuador.

Suponha que uma referência do tipo degrau faz com que o sinal do atuador sature em $u(t) = u_{max}$. Assim, o integrador continuará a integrar (**windup**) o erro $e(t)$, e o sinal de controle $u_c(t)$ continuará a crescer. Com isso, a entrada $u(t)$ da planta ficará trancada em seu valor máximo $u(t) = u_{max}$, ou seja, **a planta estará efetivamente em malha-aberta**. Desse modo, o erro permanecerá grande até que a saída $y(t)$ da planta exceda o valor da referência (i.e. sobressinal), quando então o erro $e(t)$ muda de sinal e o efeito acumulativo do integrador é revertido (**antiwindup**). O aumento no sinal de controle $u_c(t)$ em nada ajuda, pois a entrada da planta está trancada em $u(t) = u_{max}$. No entanto, a amplitude de $u_c(t)$ pode se tornar relativamente grande se a saturação do atuador durar bastante tempo. Concluímos, assim, que será preciso um erro negativo (i.e. um sobressinal) considerável e uma resposta transitória relativamente deteriorada para produzir o erro **antiwindup** necessário para trazer o sinal de controle $u_c(t)$ de volta à faixa linear do atuador (onde não há saturação).

A solução para esse problema é um **controlador antiwindup**, o qual "desliga" a ação integral quando o atuador satura. Duas configurações **antiwindup** equivalentes são mostradas abaixo para um controlador PI: a de cima é para fins didáticos, pois é mais simples de entender; e a debaixo é para fins práticos, pois é mais simples de implementar.

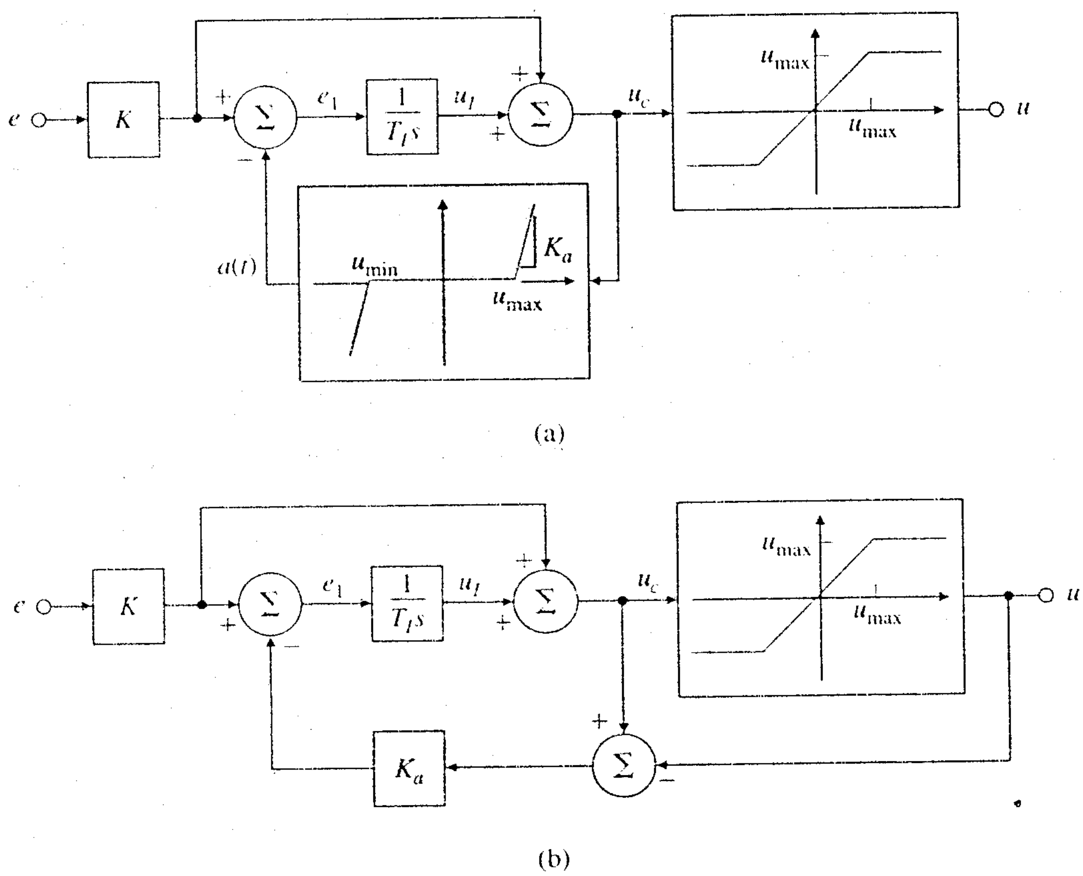


Figura 30 – Controlador PI com **antiwindup**: (a) configuração didática; (b) configuração prática (**o Bloco Saturação faz parte do Controlador!**)

Nessas configurações, enquanto **não há saturação** do atuador, o **controlador antiwindup** funciona **exatamente** como o **PI original**. Mas, assim que o **atuador satura**, a malha de realimentação em torno do integrador se torna ativa, agindo para que a entrada $e_1(t)$ do integrador seja relativamente pequena. Durante tal intervalo de tempo, o integrador essencialmente se torna um **compensador atraso de fase (estável) de primeira ordem**. Para vermos isso, note que a configuração prática apresenta acima é equivalente ao seguinte diagrama de blocos:

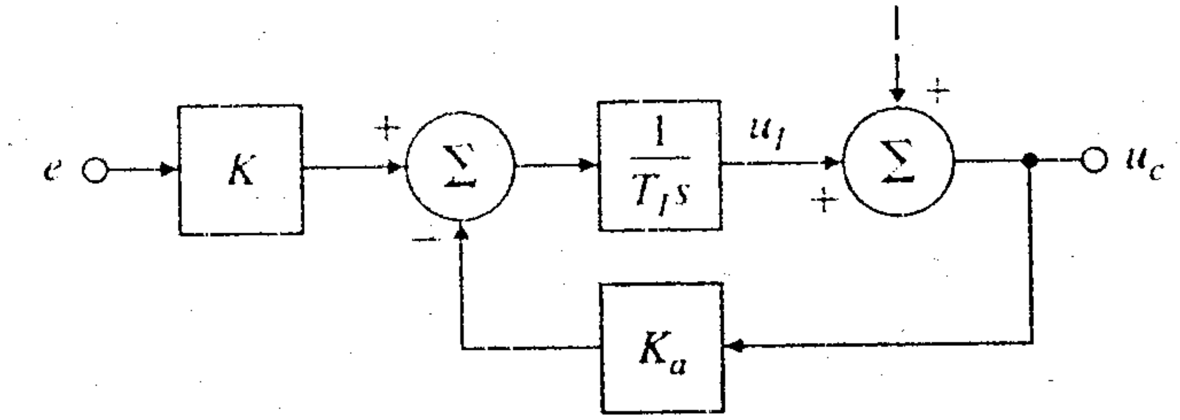


Figura 31 – Controlador PI com **antiwindup**: diagrama de blocos equivalente.

A partir desse diagrama de blocos equivalente, é fácil ver que

$$U_c(s) = \underbrace{\frac{Ks + 1/T_I}{s + K_a/T_I}}_{atraso\ de\ fase} E(s) + \frac{K_a/T_I}{s + K_a/T_I} \frac{u_{max}}{s}.$$

Ressaltamos que esta equação só é válida enquanto o atuador permanecer saturado em $u(t) = u_{max}$. O **ganho antiwindup** $K_a > 0$ deve ser grande o suficiente para que o **controlador antiwindup** mantenha a entrada $e_1(t)$ do integrador em valores relativamente pequenos sob todas as condições do erro. Na prática, é comum tomar $K_a = 1/T_I$ (ao menos como uma primeira escolha, procurando-se então refinar o valor de K_a por tentativa e erro através de simulações).

O efeito do controlador **antiwindup** é reduzir tanto o sobressinal quanto o esforço de controle num sistema realimentado. A implementação da configuração **antiwindup** é uma necessidade prática em aplicações com ação integral implementada no controlador. A não utilização desta técnica pode levar a uma deterioração significativa no desempenho do sistema em malha-fechada e, inclusive, à instabilidade (a saturação é um elemento não-linear)! Relembre que, quando há **saturação**, a **planta fica efetivamente em malha-aberta** com uma entrada constante $u(t) = u_{max}$, e a **ação integral** do controlador **se comporta como** um **sistema (BIBO) instável em malha-aberta** tendo o erro $e(t)$ como entrada. O propósito do **controlador antiwindup** é ativar uma malha de realimentação em torno do integrador quando há saturação, de modo que o controlador resultante seja **estável** e o efeito acumulativo do integrador seja revertido (**antiwindup**) mais rapidamente.

15.2 Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Uma **não-linearidade estática** é um sistema que é não-linear e estático. Relembre que um sistema é **estático (sem memória)** quando a saída $z(t)$ do sistema no instante de tempo t só depende na entrada $x(t)$ do sistema no mesmo instante t, ou seja, a descrição matemática da relação entrada-saída do sistema é dada algebricamente por (não há estado!)

$$z(t) = f(x(t)).$$

Não-linearidades estáticas estão sempre presentes na prática como, por exemplo, na saturação em atuadores, zona morta em motores, folgas (backlash) em sistemas mecânicos, relé, histerese, etc. Estas e outras não-linearidade estáticas serão vistas em mais detalhes no Lab 11. Quando a função $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ acima é **sobrejetiva**, ou seja, para qualquer $z \in B$ existe $x \in A$ com $z = f(x)$, então podemos anular o efeito da não-linearidade estática através um **compensador não-linear** que implementa **uma** função inversa **pela direita** $f^{-1}\colon B \to A$ de f, pois neste caso teremos

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(z) = f(f^{-1}(z)) = f(x) = z, \quad \text{para todo } z \in B$$

Tal compensador é denominado de **compensador de não-linearidade estática**. Isto é ilustrado abaixo:

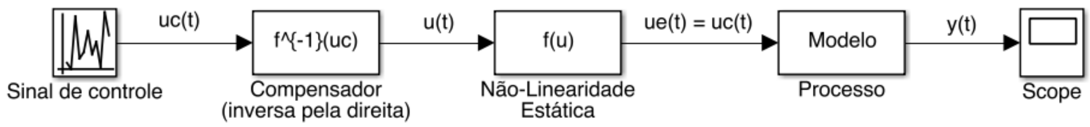


Figura 32 – Compensação da não-linearidade estática $z = f(x)$ com $f\colon A \to B$ sobrejetiva, onde: Planta = Não-Linearidade Estática + Processo, $u_c(t)$ é o sinal de controle, $u(t)$ é o sinal do atuador e $u_e(t)$ é a **entrada efetiva** no processo. Aqui, assumimos que $u_c(t) \in B$, para todo $t \geq 0$. **Importante**: Quando consideramos saturação no atuador, então: Planta = Bloco Saturação + Não-Linearidade Estática + Processo.

Ressaltamos que, quando $f\colon A \to B$ é sobrejetiva, poderão existir **diversas** inversas pela direita de f, ou seja, $f^{-1}\colon B \to A$ não é necessariamente única. No entanto, se f for **bijetiva** (sobrejetiva e injetiva), então f^{-1} é **única**.

Exemplo 1: Considere a não-linearidade estática

$$z = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0,$$

onde z é a vazão de saída e $x \geq 0$ é a abertura de uma válvula. Note que $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ é bijetiva. Logo, **a** função inversa pela direita de f é a função $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$x = f^{-1}(z) = z^2, \quad z \geq 0$$

e o efeito da não-linearidade estática da válvula por ser anulada por um compensador. Verificação: $f(f^{-1}(z)) = f(z^2) = \sqrt{z^2} = z$, para todo $z \geq 0$.

Exemplo 2: A zona morta de um motor é uma não-linearidade estática que é descrita pela função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$z = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq \delta \\ -\delta + x, & \text{se } x > \delta \\ \delta - x, & \text{se } x < \delta \end{cases}$$

Note que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Logo, o efeito da zona morta pode ser anulado por um compensador de não-linearidade estática. Neste caso, **uma** inversa pela direita de f é a função f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$x = f^{-1}(z) = \begin{cases} \delta + z, & \text{se } z \geq 0 \\ -\delta + z, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Verificação: $f(f^{-1}(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

15.3 Procedimentos

1. Seja

$$G(s) = \frac{1}{s},$$

o modelo linearizado de um tanque num certo ponto de equilíbrio. Assuma que foi projetado um controlador PI com $K = 2$ e $1/T_I = 4$. Suponha que a saturação no atuador é de ± 1. Para uma referência do tipo degrau, simule o sistema em malha-fechada com e sem o controlador antiwindup, comparando e analisando os resultados obtidos. Escolha $r(t) = 0.1$, 0.45, 1, 2, e $K_a = 1$, 4, 10, 20.

2. Considere que um motor CC é modelado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.8}{s+1},$$

onde $u(t)$ é a tensão de entrada no motor e $y(t)$ é a velocidade angular do eixo do motor. Assuma que o motor apresenta uma zona morta de $\delta = 0.5$V. Determine uma compensação para anular o efeito de tal não-linearidade estática. Simule o motor em malha-aberta com e sem o compensador da zona morta, analisando os resultados obtidos. Escolha $u(t) = 0.1$ e $u(t) = 1$.

3. No item anterior, projete um PI para que em malha-fechada sejam atendidos os seguintes requisitos: (i) rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau; (ii) sem sobressinal; e (iii) $t_{MF}(5\%) = t_{MA}(5\%)/2$. Suponha que a saturação no atuador é de $\pm 10V$. Simule o motor em malha-fechada sem o controlador antiwindup e sem a compensação da zona morta, considerando que $r(t) = 0.1$, 1, 5, 10. Analise os resultados obtidos. Note que, na ausência da compensação de zona morta, a saída em malha-fechada apresenta um atraso no tempo quando $r(t) = 0.1$. Explique tal comportamento.

Agora, implemente o controlador antiwindup e a compensação da zona morta, analisando e comparando os resultados obtidos. Escolha inicialmente $K_a = 1/T_I$, e então procure aprimorar o valor de K_a por tentativa e erro através de simulações. **Dica:** no **controlador antiwindup**, tome $u_{max} = 10 - 0.5 = 9.5$. Justifique esta escolha.

16 Lab 11 – Oscilações Periódicas em Malha-Fechada pelo Método da Função Descritiva

Objetivos

Veremos como determinar a provável existência de oscilações periódicas na entrada de uma não-linearidade estática de um sistema realimentado. Isto será realizado com base no método da função descritiva. Compararemos as previsões fornecidas pelo método da função descritiva com os resultados de simulação, considerando as seguintes não-linearidades estáticas: relé, saturação e zona morta.

16.1 Método da Função Descritiva

Considere o sistema realimentado abaixo, onde $r(t) = A$ é uma referência do tipo degrau de amplitude A, $z = f(x)$ é uma não-linearidade estática e $G(s)$ é a função de transferência de um sistema linear.

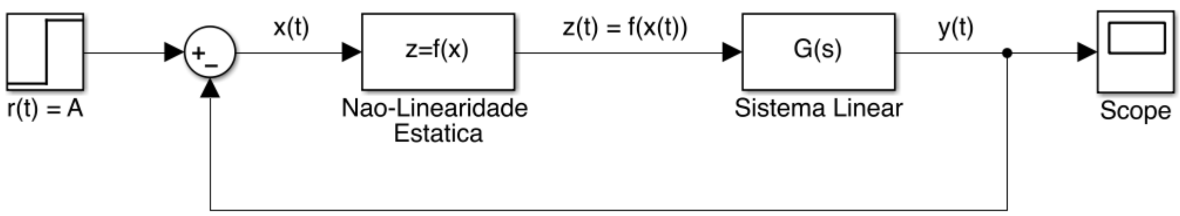


Figura 33 – Sistema linear $G(s)$ realimentado com a não-linearidade estática $z = f(x)$.

Assumimos que:

1. A não-linearidade estática é descrita por $z = f(x)$;

2. A entrada $x(t)$ da não-linearidade estática é senoidal:

$$x(t) = a\sin(\omega t), \quad \text{com } a > 0,\ \omega > 0;$$

3. A não-linearidade estática é uma função ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$ (rebatimento diagonal do gráfico);

4. A função de transferência $G(s)$ é racional, estritamente própria (mais pólos do que zeros) e com todos os polos no SPE, exceto por um possível pólo simples (sem multiplicidade) em $s=0$. Além disso, assumimos que $G(s)$ tem um comportamento passa-baixas com
$$G(jk\omega) \cong 0, \quad k = 2,3,4,\ldots;$$

5. $r(t) = 0$ $(A = 0)$.

Pelas duas primeiras hipóteses, temos que $z(t) = f(x(t))$ é uma função periódica no tempo com frequência fundamental ω, e sua série de Fourier é dada por

$$z(t) = f(x(t)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t),$$

onde

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)dt, \quad \text{com } T = 2\pi/\omega, \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)\cos(k\omega t)dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)\sin(k\omega t)dt.
\end{aligned}$$

A terceira hipótese implica que: (i) $a_k = 0$, para $k \geq 0$; e (ii) $b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} z(t)\sin(k\omega t)dt$, para $k \geq 1$. Portanto,
$$z(t) = f(x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t).$$
Consequentemente,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k |G(jk\omega)| \sin\big(k\omega t + \angle G(jk\omega)\big).$$

Decorre então da quarta hipótese que

$$y(t) \cong b_1 |G(j\omega)| \sin\big(\omega t + \angle G(j\omega)\big).$$

No entanto, $x(t) = -y(t)$ pela quinta hipótese. Relembre que $\gamma = |\gamma| e^{j\angle\gamma} \in \mathbb{C}$, $e^{j(\omega t+\theta)} = \cos(\omega t + \theta) + j\sin(\omega t + \theta)$. Logo:

$$\begin{aligned}
0 = x(t) + y(t) &= a\sin(\omega t) + b_1 |G(j\omega)| \sin\big(\omega t + \angle G(j\omega)\big), \\
\Rightarrow a e^{j\omega t} + b_1 G(j\omega) e^{j\omega t} &= \big[a + b_1 G(j\omega)\big] e^{j\omega t} = 0.
\end{aligned}$$

Concluímos então que (**equação do balanço harmônico**):

$$\boxed{1 + \Psi(a) G(j\omega) = 0},$$

onde (mudando a variável de integração de t para $\theta = \omega t$ em b_1)

$$\Psi(a) = \frac{b_1}{a} = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} f(a\sin\theta)\sin\theta d\theta \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

é chamada **função descritiva** da não-linearidade estática $z = f(x)$.

A equação do balanço harmônico

$$1 + \Psi(a)G(j\omega) = 0$$

é uma **condição necessária** (mas não suficiente!) para que a entrada $x(t) = a\sin(\omega t)$ da não-linearidade estática apresente uma oscilação periódica de frequência $\omega > 0$ e amplitude $a > 0$ quando $r(t) = A = 0$.

O **método da função descritiva** estabelece então que (mesmo quando $r(t) = A \cong 0$):

1. Se a equação do balanço harmônico possui uma solução (a_s, ω_s), então é **provável** que $x(t)$ oscile periodicamente com amplitude próxima de $a_s > 0$ e frequência próxima de $w_s > 0$. Havendo mais de uma solução, a amplitude e frequência de oscilação que **esperamos** (i.e. não temos como garantir!) que $x(t)$ apresente poderá depender da condição inicial;

2. Se a equação do balanço harmônico não possui solução, então é **provável** que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas.

Obs 1: Note que a equação do balanço harmônico é equivalente a

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\Psi(a)}.$$

Logo, podemos resolver a equação do balanço harmônico graficamente: basta traçarmos o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ para $\omega > 0$ e o gráfico de $-1/\Psi(a) \in \mathbb{R}$ para $a > 0$. As interseções destes 2 gráficos no plano complexo correspondem a soluções da equação do balanço harmônico. Não havendo nenhuma interseção, então é provável que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas.

Obs 2: Como $\Psi(a)$ é real para todo $a > 0$, temos que a equação do balanço harmônico é equivalente as 2 equações reais

$$\begin{aligned}
&1 + \Psi(a)\mathrm{Re}\big[G(j\omega)\big] = 0,\\
&\mathrm{Im}\big[G(j\omega)\big] = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, a princípio poderemos resolver a equação do balanço harmônico **analiticamente** quando $G(s)$ é de ordem relativamente baixa. Resolvemos a segunda equação acima para $\omega > 0$, encontrando assim as possíveis frequências de oscilação $\omega > 0$. Em seguida, substituímos na primeira equação acima cada ω obtido, e então resolvemos para $a > 0$. Desse modo, concluímos que: (i) as possíveis frequências de oscilação $\omega > 0$ só dependem de $G(s)$, ou seja, as mesmas independem da não-linearidade estática $z = f(x)$; e (ii) as possíveis amplitudes de oscilação $a > 0$ dependem de $z = f(x)$ e de $G(s)$.

Obs 3: As equações

$$\begin{aligned}
&1 + \Psi(a)\mathrm{Re}\big[G(j\omega)\big] = 0,\\
&\mathrm{Im}\big[G(j\omega)\big] = 0,
\end{aligned}$$

também nos permitem resolver **graficamente** a equação do balanço harmônico. Primeiramente, determine o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ para $\omega > 0$, e encontre as possíveis frequências $\omega > 0$ em que o diagrama cruza o eixo horizontal, ou seja, $\mathrm{Im}\big[G(j\omega)\big] = 0$. Em seguida, determine $\mathrm{Re}\big[G(j\omega)\big]$ para tais frequências ω através do diagrama de Nyquist. Agora, calcule $\Psi(a) = -1/\mathrm{Re}\big[G(j\omega)\big]$. Por fim, determine pelo gráfico de $\Psi(a)$ os possíveis valores $a > 0$ em que $\Psi(a) = -1/\mathrm{Re}\big[G(j\omega)\big]$.

Obs 4: O resultados anteriores para o sistema realimentado da Figura acima podem ser generalizados para a estrutura de controle dada abaixo:

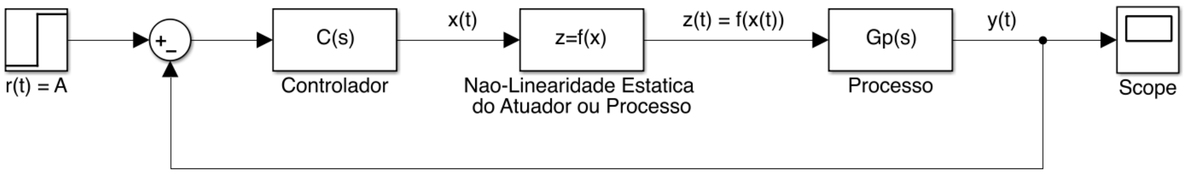


Figura 34 – Sistema realimentado com controlador $C(s)$, não-linearidade estática $z = f(x)$ do atuador ou processo, e processo modelado pela função de transferência $G_p(s)$.

Ao tomarmos $G(s) = C(s)G_p(s)$, o método da função descritiva estabelece que (para $r(t) = A \cong 0$):

1. Se a equação do balanço harmônico

$$1 + \Psi(a)G(j\omega) = 1 + \Psi(a)C(j\omega)G_p(j\omega) = 0$$

   possui uma solução (a_s, ω_s), então é **provável** que a **entrada** $x(t)$ **da não-linearidade estática** oscile periodicamente com amplitude próxima de $a_s > 0$ e frequência próxima de $\omega_s > 0$, podendo assim gerar desgastes no atuador e/ou no processo. Havendo mais de uma solução para a equação do balanço harmônico, a amplitude e frequência de oscilação que **esperamos** (i.e. não temos como garantir!) que $x(t)$ apresente poderá depender da condição inicial. Em particular, se (a_s, ω_s) é uma solução da equação do balanço harmônico, então é razoável **esperarmos** que a **saída** $y(t)$ (do processo!) oscile periodicamente com frequência próxima de $\omega_s > 0$ e amplitude próxima de $a_s\Psi(a_s)|G(j\omega_s)|$, podendo assim gerar desgastes no processo e/ou comprometer o desempenho;

2. Quando não há solução para a equação do balanço harmônico, então é **provável** que $x(t)$ (assim como $y(t)$) não apresente oscilações periódicas. Desse modo, em situações práticas, a ideia é projetar o controlador $C(s)$ da modo a atender as especificações desejadas e assegurar que a equação do balanço harmônico não tenha solução. Em geral, primeiramente projetamos o controlador $C(s)$ através de técnicas lineares para

atender aos requisitos de desempenho desejados, desconsiderando a não-linearidade estática. Em seguida, alteramos os parâmetros/estrutura de $C(s)$ para que a equação do balanço harmônico

$$1+\Psi(a)C(j\omega)G_p(j\omega)=0$$

a qual leva em conta a não-linearidade estática $z=f(x)$ através da sua função descritiva $\Psi(a)$, não tenho solução.

16.2 Determinação da Função Descritiva

Exemplo 1: Considere que a não-linearidade estática é um relé:

$$z=f(x)=\begin{cases} -M, & \text{se } x<0 \\ 0, & \text{se } x=0 \\ M, & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Assim, a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi f(a\sin\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi M\sin\theta d\theta, \\ &= -\frac{2M}{a\pi}[\cos(\pi)-\cos(0)], \\ &= \frac{4M}{a\pi}.\end{aligned}$$

Exemplo 2: Considere que a não-linearidade estática é a função saturação:

$$z=f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } |x|<\Delta \\ \Delta, & \text{se } |x|\geq\Delta \end{cases}$$

Pode-se mostrar que a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi f(a\sin\theta)\sin\theta d\theta, \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0<a\leq\Delta \\ \frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}(\Delta/a)+\frac{\Delta}{a}\sqrt{1-(\Delta/a)^2}\right]\leq 1, & \text{se } a>\Delta \end{cases}\end{aligned}$$

Exemplo 3: Considere que a não-linearidade estática é a zona morta:

$$z=f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } |x|\leq\delta \\ -\delta+x, & \text{se } x>\delta \\ \delta-x, & \text{se } x<\delta \end{cases}$$

Pode-se mostrar que a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi f(a\sin\theta)\sin\theta d\theta, \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0<a\leq\delta \\ 1-\frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}(\delta/a)+\frac{\delta}{a}\sqrt{1-(\delta/a)^2}\right]<1, & \text{se } a>\delta \end{cases}\end{aligned}$$

16.3 Exemplo

Considere

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},$$

com as seguintes não-linearidades estáticas: relé com $M = 1$, e saturação com $\Delta = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}, \\
&= \frac{(-j\omega)(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{(-j\omega)(-j\omega+1)(-j\omega+2)} \times \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}, \\
&= \frac{(-j\cancel{\omega})(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{\omega^{\cancel{2}}(\omega^2+1)(\omega^2+4)}, \\
&= \frac{-j(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)}, \\
&= \frac{-3\omega - j(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4+5\omega^2+4)}.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do balanço harmônico com $\omega > 0$ (veja a **Obs 2**):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\big(G(j\omega)\big) = 0 \Rightarrow -(2-\omega^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2}} \\
&1 + \Psi(a)\mathrm{Re}\big(G(j\omega)\big)\big|_{\omega=\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow 1 + \Psi(a)\left.\frac{-3\omega}{\omega(\omega^4+5\omega^2+4)}\right|_{\omega=\sqrt{2}} \\
&\Rightarrow \boxed{\Psi(a) = 6}.
\end{aligned}$$

• Para o relé com $M = 1$ (veja o **Exemplo 1**): $\Psi(a) = \dfrac{4}{a\pi} = 6 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{2}{3\pi}}$. Desse modo, **esperamos** (i.e. não temos como garantir) que a entrada $x(t)$ da não-linearidade estática oscile com uma frequência próxima de $\omega = \sqrt{2} \cong 1.41$rad/s e uma amplitude próxima de $a = \frac{2}{3\pi} \cong 0.21$.

• Para a saturação com $\Delta = 1$ (veja o **Exemplo 2**): $\Psi(a) \leq 1$, para todo $a > 0$. Portanto, não há solução para $\Psi(a) = 6$ e, assim, **esperamos** que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas.

16.4 Procedimentos

1. Para o exemplo da seção anterior, simule $G(s)$ em malha-fechada com o relé e também com a saturação (separadamente), considerando que $r(t) = 0.5$, 1, 2, 5. Verifique se $x(t)$ oscila ou não periodicamente de acordo com a previsão fornecida pelo método da função descritiva.

2. Com base no método da função descritiva, investigue a provável existência de oscilações periódicas em $x(t)$ considerando

$$G(s) = \frac{-s}{s^2+0.8s+8},$$

e que as não-linearidades estáticas são: a saturação com $\Delta = 1$, e a zona morta com $\delta = 1$. Simule $G(s)$ em malha-fechada com estas não-linearidades estáticas (separadamente) para $r(t) = 0.05,\ 0.1,\ 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 3,\ 3.5$. Verifique se $x(t)$ oscila ou não periodicamente de acordo com a previsão fornecida pelo método da função descritiva. Resposta: $\omega \cong 2.83 \cong 2\sqrt{2}$ e $\Psi(a) = 0.8$ (pelo diagrama de Nyquist); $a \cong 1.455$ para a saturação, e $a \cong 6.34$ para a zona morta (pelo gráfico de $\Psi(a)$).

17 Lab 12 – Introdução aos Sistemas Dinâmicos Quânticos

Objetivos

Faremos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos quânticos em dimensão finita. Primeiramente, vamos revisar certos resultados de Álgebra Linear, para então apresentarmos os principais postulados da mecânica quântica em dimensão finita. Em seguida, veremos como analisar matematicamente partículas de spin-1/2. Por fim, ilustraremos alguns dos principais aspectos de sistemas quânticos tomando como exemplo partículas de spin-1/2.

17.1 Revisão de Álgebra Linear em $\mathbb{C}^n$

Sejam

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)' \in \mathbb{C}^n,$$
$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)' \in \mathbb{C}^n,$$

onde $\psi_1, \phi_1, \ldots, \psi_n, \phi_n \in \mathbb{C}$. Então:

Norma: $\|\psi\| = \sqrt{|\psi_1|^2 + \cdots + |\psi_n|^2} \geq 0$.

Vetor unitário: quando $\|\psi\| = 1$.

Produto interno: $\langle \psi, \phi \rangle = \psi_1^* \phi_1 + \cdots + \psi_n^* \phi_n \in \mathbb{C}$.

Vetores ortogonais: quando $\langle \psi, \phi \rangle = 0$.

Conjunto ortonormal: Um conjunto $S \subset \mathbb{C}^n$ é **ortonormal** quando: (i) cada vetor de S é unitário ($\|\psi\| = 1$); e (ii) vetores distintos de S são ortogonais ($\langle \psi, \phi \rangle = 0$).

Seja $\widehat{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz quadrada complexa de ordem n. Então:

Matriz transposta conjugada: $\widehat{Q}^\dagger = (q_{ji}^*)$.

Matriz hermitiana: quando $\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$.

Matriz unitária: quando $\widehat{Q}^\dagger \widehat{Q} = I$, ou seja, $\widehat{Q}^\dagger = \widehat{Q}^{-1}$.

Propriedades:

1. Suponha que $\widehat{Q}$ é uma matriz hermitiana. Temos que os autovalores de $\widehat{Q}$ são **reais** e, se ψ e ϕ são autovetores de $\widehat{Q}$ associados a autovalores **distintos**, então $\langle \psi, \phi \rangle = 0$. Além disso, $\mathbb{C}^n$ possui uma base ortonormal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de $\widehat{Q}$. Em particular, todo vetor $\psi \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito como

$$\psi = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \quad \text{com } a_i = \langle v_i, \psi \rangle \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, n$$

e $\|\psi\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$.

2. Se $\widehat{Q}$ é um matriz unitária, então $\|\widehat{Q}\psi\| = \|\psi\|$ (preservação da norma)

17.2 Postulados da Mecânica Quântica

Observável: grandeza física que pode ser medida por um experimento no qual os resultados possíveis são números reais como, por exemplo, posição, velocidade e spin de uma partícula.

1. Todo vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ representa um estado possível do sistema quântico. Se $k \in \mathbb{C}$ é unitário ($|k| = 1$), então $k\psi$ e ψ representam o mesmo estado do sistema. Além disso, todo estado possível do sistema é representado por um vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ e por seus múltiplos unitários, e somente por eles;

2. O espaço de estado de um sistema composto por dois subsistemas é $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{mn}$ (produto tensorial);

3. A cada observável Q (com um número finito de resultados possíveis) está associado uma matriz hermitiana $\widehat{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$). Quando o sistema está no estado correspondente ao vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então o valor esperado de Q, no sentido usual de probabilidade, é dado por $\langle \psi, \widehat{Q}\psi \rangle \in \mathbb{R}$;

4. As medições possíveis de um observável Q são os autovalores (reais) de $\widehat{Q}$. Se o resultado de Q é α (real), então **imediatamente** após a medição o estado do sistema corresponderá ao autovetor unitário $\psi_\alpha \in \mathbb{C}^n$ de $\widehat{Q}$ associado ao autovalor α (**colapso do estado**). Quando o sistema está no estado unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então a probabilidade de medirmos o valor α é dada por $|\langle \psi_\alpha, \psi \rangle|^2 \in \mathbb{R}$ (e, se de fato medirmos α, teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_\alpha$);

5. Caso o sistema esteja **isolado** e **não seja perturbado** por nenhum experimento, a dinâmica do estado do sistema é determinada pela **equação de Schrödinger**

$$j\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = \widehat{H}\psi(t)$$

onde $\hbar = h/2\pi$, h é a constante de Planck e H é o observável correspondente à energia total do sistema (**Hamiltoniano**).

Conseqüências:

- Técnicas de controle por realimentação não podem ser aplicadas diretamente;
- Controle em malha-aberta;

- Controle em malha-fechada pode ser realizado considerando o efeito das medições no sistema: o sistema em malha-fechada é modelado por equações diferenciais estocásticas no caso de tempo contínuo, e por equações a diferenças estocásticas no caso de tempo discreto (cadeias de Markov).

17.3 Partículas de Spin-1/2

Descrição:

- Exemplos de partículas de spin-1/2: elétron, próton;
- Medições possíveis: $\pm 1/2$;
- Espaço de estado: $\mathbb{C}^2$;
- $\widehat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z);
- $\psi_+ = (1 \ \ 0)', \psi_- = (0 \ \ 1)'$: base ortonormal;
- ψ_+, ψ_- são autovetores de $\widehat{S}_z$:

$$\begin{aligned}\widehat{S}_z \psi_+ &= +\frac{1}{2}\psi_+, \\ \widehat{S}_z \psi_- &= -\frac{1}{2}\psi_-;\end{aligned}$$

- Estado unitário geral (**spinor**): $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \in \mathbb{C}^2$, onde

$$\begin{aligned}&\alpha = \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ &\beta = \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\ &|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|);\end{aligned}$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: **amplitudes de probabilidade**;
- $|\alpha|^2 = |\langle \psi_+, \psi \rangle|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ quando o sistema está no estado ψ. Se de fato medirmos $+1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_+$;
- $|\beta|^2 = |\langle \psi_-, \psi \rangle|^2 = 1 - |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ quando o sistema está no estado ψ. Se de fato medirmos $-1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_-$.

Importância:

- **Qubit (quantum bit)**: análogo quântico do bit usual da teoria de computação clássica;

- Partículas de spin-1/2: modelo de qubit (**informação**). O estado quântico ψ_- corresponde ao bit clássico 0, e ψ_+ ao bit clássico 1. No entanto, a **superposição** $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_-$ pode assumir um número infinito de estado quânticos e não há uma correspondência direta com bits clássicos!;

- Teoria da computação quântica e da informação quântica: computadores quânticos processando algoritmos quânticos são mais eficientes computacionalmente que computadores clássicos;

- IBM: implementou a primeira plataforma de computação quântica, a qual utiliza um processador quântico de 5 qubits $\Rightarrow$ `http://www.research.ibm.com/quantum`.

Duas partículas de spin-1/2 (2 qubits):

- Espaço de estado: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$;

- Estado unitário geral: $\psi = \alpha[\psi_{++}] + \beta[\psi_{+-}] + \gamma[\psi_{-+}] + \delta[\psi_{--}] \in \mathbb{C}^4$, onde

$$\begin{aligned}
&\alpha = \langle \psi_{++}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle \psi_{+-}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\
&\gamma = \langle \psi_{-+}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \delta = \langle \psi_{++}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \\
&|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|);
\end{aligned}$$

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula;

- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula;

- $|\gamma|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula;

- $|\delta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula.

17.4 Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Considere uma partícula de spin-1/2. Vimos na seção anterior que

$$\widehat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z, e que todo spinor pode ser escrito como

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_-.$$

Agora, considere a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção x:

$$\widehat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então que

$$\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2})', \quad \psi_-^{(x)} = (1/\sqrt{2} \;\; -1/\sqrt{2})',$$

é uma base ortonormal de autovetores de $\widehat{S}_z$:

$$\widehat{S}_x\psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2}\psi_+^{(x)}, \quad \widehat{S}_x\psi_-^{(x)} = -\frac{1}{2}\psi_-^{(x)}.$$

Desse modo, todo spinor pode ser escrito como (mudança de base ortonormal)

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- = \underbrace{\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\alpha_x}\psi_+^{(x)} + \underbrace{\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\beta_x}\psi_-^{(x)},$$

onde:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \langle\psi_+, \psi\rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle\psi_-, \psi\rangle \in \mathbb{C},\\
&\alpha_x = \langle\psi_+^{(x)}, \psi\rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta_x = \langle\psi_-^{(x)}, \psi\rangle \in \mathbb{C},\\
&|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1 \;\; (= \|\psi\|).
\end{aligned}$$

Assim:

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z (quando a partícula está no estado ψ);
- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção z;
- $|\alpha_x|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção x;
- $|\beta_x|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção x.

Exemplo 1: Suponha que o estado quântico de uma partícula de spin-1/2 é

$$\psi = \psi_+,$$

ou seja, $\alpha = 1, \beta = 0$. Logo, se formos medir o spin da partícula na direção z, então é certo que vamos obter $+1/2$, i.e. com probabilidade igual a 1. No entanto, como

$$\alpha_x = \beta_x = 1/\sqrt{2},$$

se formos medir o spin da partícula na direção x, então vamos obter $+1/2$ com probabilidade $|\alpha_x|^2 = 1/2$, e $-1/2$ com probabilidade $|\beta_x|^2 = 1/2$, ou seja, temos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$.

Assuma que de fato medimos $+1/2$ na direção x (a partícula estava no estado $\psi = \psi_+$). Então, imediatamente após tal medição, o estado quântico da partícula passou a ser $\psi_+^{(x)}$ (colapso do estado: $\psi = \psi_+ \rightsquigarrow \psi_+^{(x)}$!), ou seja, $\alpha_x = 1, \beta_x = 0$ e, portanto, $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Desse modo, se neste momento formos medir o spin da partícula na direção z (que agora está no estado $\psi_+^{(x)}$), então teremos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$! Concluímos assim que **a medição do spin da partícula na direção x alterou significativamente a probabilidade das possíveis medições do spin da partícula na direção z: a probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z passou de 100% para 50%**!

Exemplo 2: Suponha que a dinâmica de uma partícula de spin-1/2 é determinada pela seguinte **equação de Schrödinger** (enquanto a partícula não é perturbada por nenhum experimento/medição)

$$j\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = \widehat{H}\psi(t),$$

onde

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assuma que o spinor inicial da partícula é dado por

$$\psi(0) = \alpha(0)\psi_+ + \beta(0)\psi_- \in \mathbb{C}^2,$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Então, a dinâmica $\psi(t)$, $t \geq 0$, do spinor é:

$$\begin{aligned}\psi(t) = e^{-\frac{j}{\hbar}\widehat{H}t}\psi(0) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{j}{\hbar}\widehat{H}t)^k}{k!}\right)\psi(0), \\ &= \begin{pmatrix} e^{-jt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{jt/\hbar} \end{pmatrix}\psi(0) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2.\end{aligned}$$

Note que $\psi(t)$ é de fato um vetor unitário, já que

$$\|\psi(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1.$$

Isto era esperado, pois pode-se mostrar que, sempre que $\widehat{H}$ for uma matriz hermitiana, então $e^{-\frac{j}{\hbar}\widehat{H}t}$ será uma matriz unitária para todo $t \geq 0$. Em particular,

$$\|\psi(t)\| = \|e^{-\frac{j}{\hbar}\widehat{H}t}\psi(0)\| = \|\psi(0)\| = 1.$$

Mostramos acima que

$$\psi(t) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2.$$

Logo, concluímos que as **amplitudes de probabilidade** $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}$ de $\psi(t)$ são calculadas a partir da solução da **equação de Schrödinger**, que é uma **EDO determinística**! Em outras palavras, **as amplitudes de probabilidade seguem uma lei determinística ao longo do tempo**!

Por fim, ressaltamos que

$$|\alpha(t)|^2 = |\alpha(0)e^{-jt/\hbar}|^2 = |\alpha(0)|^2,$$
$$|\beta(t)|^2 = |\beta(0)e^{jt/\hbar}|^2 = |\beta(0)|^2,$$

ou seja, as amplitudes de probabilidades iniciais foram preservadas. No entanto, como (veja o Exemplo 1 acima)

$$|\alpha_x(t)|^2 = \left|\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left|\frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}+\beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}}\right|^2,$$
$$|\beta_x(t)|^2 = \left|\frac{\alpha(t)-\beta(t)}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left|\frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}-\beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}}\right|^2,$$

isto não ocorre para as amplitudes de probabilidade $|\alpha_x(t)|^2$ e $|\beta_x(t)|^2$.

17.5 Para Saber Mais

Livros:

1. Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University Press, 2010. Capítulos 1 e 2;

2. David J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", 2nd Edition, Prentice-Hall, 2005. Capítulos 1 a 4;

3. Jim Baggott, "The Quantum Story: A History in 40 Moments", Oxford University Press, 2011.

Paradoxo EPR: `https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox`

Teorema de Bell: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bell's_theorem`

Referências

[1] M. Fliess et al. “A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.5 (1999), pp. 922–937.

[2] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 2rd. Springer-Verlag, 1989.

[3] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd. Springer-Verlag, 1995.

[4] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

[5] H. Nijmeijer e A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, 1990.

[6] P. S. Pereira da Silva et al. “An Infinite Dimensional Differential-Geometric Approach for Nonlinear Systems: Part II – Systems Theory”. Em: (). Disponível em www.lac.usp.br/∼paulo.

[7] H. Sira-Ramirez e S. K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. New York: Marcel Dekker, 2004.