

DAS 5142 – Lab de Sistemas Dinâmicos

Prof. Hector Bessa Silveira

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC
Departamento de Automação e Sistemas – DAS
Sala 208
E-mail: hector.silveira@ufsc.br
Website: <http://hector.paginas.ufsc.br>

2016/1

Objetivos:

Primeiramente, vamos apresentar certos conceitos fundamentais sobre sistemas: sistemas dinâmicos, variáveis de estados, linearidade, invariância no tempo e modelo em espaço de estado. Na sequência, veremos exemplos de como modelar, simular, e analisar sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.

1.1. Conceitos Fundamentais

Sistema: é uma entidade em que as variáveis de saída são alterados pelas variáveis de entrada (controles).

Ex: motores elétricos, veículos, aeronaves, ecossistemas

Sistema dinâmico (ou com memória): quando ao menos uma das variáveis de saída do sistema no instante t **depende** de **algum** valor passado **ou** futuro de certas variáveis de entrada.

Sistemas dinâmicos SISO, SIMO e MIMO: vamos considerar sistemas dinâmicos que apresentam m variáveis de entrada $u_1(t), \dots, u_m(t)$ e p variáveis de saída $y_1(t), \dots, y_p(t)$. Quando $m = p = 1$, dizemos que o sistema é **SISO** (Single-Input Single-Output). Quando $m = 1$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **SIMO** (Single-Input Multi-Output). Quando $m \geq 2$ e $p \geq 2$, dizemos que o sistema é **MIMO** (Multi-Input Multi-Output). Denominamos $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ de **vetor de entrada** (ou **vetor de controle**) e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ de **vetor de saída**.

1.1. Conceitos Fundamentais

Vetor de estado de um sistema dinâmico: o **vetor de estado** $x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ (ou, simplesmente, **estado**) de um sistema dinâmico no instante de tempo $t_0 \geq 0$ é a informação em t_0 que, juntamente com o conhecimento do vetor de entrada $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$ (futuro), determina um **único** vetor de saída $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, para todo $t \geq t_0$. Isto significa que, para se determinar o comportamento futuro das saídas, não importa a maneira como o sistema atingiu o vetor de estado $x(t_0)$, ou seja, $x(t_0)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_0 . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0), \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

Dizemos que $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ é o **estado inicial** (ou a **condição inicial**) do sistema no **instante inicial** $t_0 \geq 0$. Denominamos $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de **variáveis de estado** do sistema, e dizemos que o sistema é de **ordem** n ($n = 1$ é primeira ordem, $n = 2$ é segunda ordem, etc).

1.1. Conceitos Fundamentais

Em muitos sistemas dinâmicos, escolhemos as **variáveis de estado** como sinais que correspondem aos **elementos armazenadores de energia** no sistema. Por exemplo, em **circuitos elétricos**, as **variáveis de estado** são: as **tensões nos capacitores** (energia armazenada no campo elétrico) e as **correntes dos indutores** (energia armazenada no campo magnético).

De agora em diante, todos os sistemas que trataremos serão dinâmicos. Desse modo, para simplificar, quando dizemos **sistema**, estaremos sempre nos referindo a um **sistema dinâmico**.

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

- **Linear:** quando o sistema satisfaz ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$):

(Princípio da Superposição) Se

$$\left. \begin{array}{l} x_a(t_0), \\ u_a(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_a(t), t \geq t_0 \quad \left. \begin{array}{l} x_b(t_0), \\ u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_b(t), t \geq t_0$$

então,

$$\left. \begin{array}{l} x_c(t_0) = k_1 x_a(t_0) + k_2 x_b(t_0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq t_0$$

Ao tomarmos $k_1 = k_2 = 0$ na condição acima, concluímos que todo sistema linear satisfaz:

$$\boxed{x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira. Isto significa que não podemos garantir que um sistema é linear apenas porque $x(t_0) = 0, u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y(t) = 0, t \geq t_0 .$

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

Resposta Entrada Nula $y_0(t)$: é a resposta do sistema quando $u(t) = 0, t \geq t_0$: $x(t_0), u(t) = 0, t \geq t_0 \} \longrightarrow y_0(t), t \geq t_0$

Resposta Estado Nulo $y_{esn}(t)$: é a resposta do sistema quando $x(t_0) = 0$: $x(t_0) = 0, u(t), t \geq t_0 \} \longrightarrow y_{esn}(t), t \geq t_0$

Concluimos então que resposta total $y(t), t \geq t_0$, de um **sistema linear** é dada por $y(t) = y_0(t) + y_{esn}(t)$, ou seja:

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}$$

Propriedade de Decomposição

1.1.1. Sistemas Dinâmicos Lineares e Não-Lineares

- **Não-Linear:** quando o sistema não é linear

Importante! Na prática, todo sistema físico possui limitações na amplitude da entrada $u(t)$ (ex: motor elétrico). Assim, sistemas reais não podem ser lineares pois o princípio da separação não é satisfeito. No entanto, para variações não muito grandes na entrada, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** lineares. Isto será visto mais adiante em nosso curso no tópico “Linearização de Sistemas Não-Lineares”.

1.1.2. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

Noção intuitiva: quando as características de um sistema não mudam com o tempo, dizemos que o sistema é *invariante no tempo*. Caso contrário, dizemos que o sistema é *variante no tempo*.

A massa de um transatlântico sofre grandes variações ao longo do tempo devido ao consumo do combustível. Logo, é um sistema variante no tempo. Em geral, sistemas reais são variantes no tempo devido à deterioração e ao envelhecimento dos componentes físicos ao longo do tempo. No entanto, num certo intervalo de tempo finito razoável, diversos sistemas reais se comportam **como se fossem** invariantes no tempo. Por exemplo, um automóvel zero pode ser considerado invariante no tempo no primeiro ano de uso.

Vamos agora definir de maneira precisa este conceito.

1.1.2. Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

- **Invariante no tempo:** quando a seguinte propriedade é satisfeita:

Se

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = v_0, \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

então

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}(t_0 + T) = v_0, \\ \bar{u}(t) = u(t - T), t \geq t_0 + T \end{array} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), t \geq t_0 + T$$

Ilustração: (no quadro)

Desse modo, para sistemas invariantes no tempo, não importa o tempo inicial t_0 em que começamos a estudar o sistema ou aplicamos a entrada. Assim, para simplificar, podemos sempre escolher $t_0 = 0$.

- **Variante no tempo:** quando não é invariante no tempo.

1.2. Modelo em Espaço de Estado

Modelo em espaço de estado: é a modelagem matemática que determina as relações entre as variáveis de estado e as entradas do sistema dinâmico por diversas equações diferenciais de primeira ordem (uma para cada variável de estado), e que determina as relações entre as saídas, as variáveis de estado e as entradas por equações algébricas (uma para cada saída).

Por exemplo, se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ é o vetor (coluna) de estado, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))' \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))' \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, então o modelo em espaço de estado do sistema dinâmico é dado por:

1.2. Modelo em Espaço de Estado

$$\begin{aligned} dx_1(t)/dt &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ dx_n(t)/dt &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) &= h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

onde $f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t), h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t) \in \mathbb{R}$ e

$$f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), \dots, f_n(x, u, t))' \in \mathbb{R}^n$$

$$h(x, u, t) = (h_1(x, u, t), \dots, h_p(x, u, t))' \in \mathbb{R}^p$$

1.2. Modelo em Espaço de Estado

Veremos mais adiante que:

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned}dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

é **linear e invariante no tempo**, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz quadrada de ordem n), $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz $n \times m$), $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz $p \times n$) e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz $p \times m$) são **matrizes constantes**.

- Todo sistema modelado por

$$\begin{aligned}dx(t)/dt &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

é **invariante no tempo**, onde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são aplicações continuamente diferenciáveis.

Exemplo 1: Sistema elétrico – circuito elétrico (no quadro)

Exemplo 2: Sistema mecânico – pêndulo simples (no quadro)

1.4. Procedimentos

- 1.** Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema elétrico do Exemplo 1. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações. Dica: verifique o princípio da superposição com $u(t) = 0$, $u(t) = 1$ e $u(t) = \sin(t)$.
- 2.** Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o sistema mecânico do Exemplo 2. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo? Comprove sua resposta através de simulações com $\ell = 1$, $g = 9.8$, e $k = 0.5$, $k = 0$. Dica: teste o princípio da superposição para $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ e com $\theta(0) = 0$, $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(0) = \pi$.
- 3.** No item anterior, justifique o comportamento observado (solução constante) com $\theta(0) = 0$ e $\theta(0) = \pi$ quando $u(t) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Existe mais alguma outra solução constante? Justifique sua resposta.

Objetivos:

Vamos introduzir o problema de rastreamento de saída para um motor CC e determinar uma realimentação de estado que soluciona tal problema de controle. Em seguida, veremos como implementar a realimentação de estado por diagrama de blocos. Por fim, iremos analisar os resultados de simulação obtidos para diversas saídas de referência.

2.1. Rastreamento de Saída de um Motor CC

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u$$

$$y(t) = x_1(t)$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle), $x_1(t) = \theta(t)$ é a posição angular do eixo em rad, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ é a velocidade angular do eixo em rad/s, e $y(t) = x_1(t)$ é a saída do sistema. Assumimos que $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ pode ser medido (assim como $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$). O objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle u que force a saída $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ do motor em malha-fechada a rastrear assintoticamente uma saída de referência $\bar{y}(t)$ escolhida, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

onde $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 (segunda derivada contínua).

2.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Considere a **realimentação de estado** $u = \alpha(x_1, x_2, t)$:

$$u = \alpha(x_1, x_2, t) \triangleq x_2 + \ddot{y}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{y}(t)]$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos a serem escolhidos. Note que o controle $u(t)$ ao longo do tempo $t \geq 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha(x_1(t), x_2(t), t) = x_2(t) + \ddot{y}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{y}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{y}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= x_2(t) + \ddot{y}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}, \end{aligned}$$

onde $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ é o erro de rastreamento da saída.

Ao substituírmos a realimentação de estado $u = \alpha(x_1, x_2, t)$ acima no modelo do motor, encontramos a dinâmica em **malha-fechada**:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) - k_1 \overbrace{[x_1(t) - \bar{y}(t)]}^{e(t)} - k_2 \overbrace{[x_2(t) - \dot{y}(t)]}^{\dot{e}(t)}, \quad y = x_1$$

2.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Desse modo,

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1 e(t) - k_2 \dot{e}(t)$$

ou seja,

$$\ddot{e}(t) + k_2 \dot{e}(t) + k_1 e(t) = 0 \quad (\text{EDO Linear Homogênea!})$$

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2 s + k_1 = 0$$

Agora, suponha que os pólos (estáveis!) de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são p_1, p_2 (partes reais negativas!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2 s + k_1 = (s - p_1)(s - p_2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}_{\text{polinômio caract. de MF}}$$

ou seja, escolhemos $k_2 = -(p_1 + p_2), k_1 = p_1 p_2$.

2.2. Projeto da Realimentação de Estado que Soluciona o Problema de Rastreamento de Saída

Concluimos então que, com tais escolhas de $u = \alpha(x_1, x_2, t)$, k_1 e k_2 , garantimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

para quaisquer condições iniciais $x_1(t_0), x_2(t_0)$, $t_0 \geq 0$, resolvendo assim o **problema de rastreamento de saída** através de uma **realimentação de estado** adequada.

Ao longo do curso, vamos generalizar as ideias acima para sistemas MIMO lineares e não-lineares.

2.3. Procedimentos

1. Elabore um diagrama de blocos no Matlab/Simulink de modo a simular o motor CC considerado. De acordo com o modelo em espaço de estado, o sistema é linear? É invariante no tempo?
2. Agora, implemente a realimentação de estado $u = \alpha(x_1, x_2, t)$ projetada que soluciona o problema de rastreamento de saída.

Considere que:

- 1 $\bar{y}(t) = 1, t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$
- 2 $\bar{y}(t) = 2(1 - e^{-t}), t \geq 0, x_1(0) = -1, x_2(0) = 2$
- 3 $\bar{y}(t) = 3 \sin(5t), t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$

Em cada um dos casos acima, analise os resultados de simulação obtidos (saída, controle e erro) para uma escolha de pólos “rápidos” e “lentos” da dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada. Note que, nos dois primeiros casos acima, a dinâmica do erro de rastreamento é idêntica. Isto era esperado? Justifique sua resposta.

3. Repita o item acima para: $\bar{y}(t) = \cos(t^2), t \geq 0, x_1(0) = x_2(0) = 0$. É possível implementarmos a lei de controle projetada neste caso? Isto era esperado? Justifique sua resposta.

Objetivos:

Vamos introduzir o conceito de ponto de equilíbrio, rever certos resultados de Álgebra Linear, e classificar o comportamento qualitativo das soluções de sistemas lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz que determina a dinâmica do sistema.

3.1. Ponto de Equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em equilíbrio quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente esta noção.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 (i.e. a aplicação $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz jacobiana) é contínua). Dizemos que $x^e \in D$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ permanece em x^e para todo tempo futuro, ou seja, $x(t) = x^e$, para $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Proposição: Temos que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema acima **se e somente se** $f(x^e) = 0$ (ou seja, $\dot{x} = 0$).

3.1. Ponto de Equilíbrio

Demonstração: Suponha que $x^e \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Então, a solução do sistema para a condição inicial $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$ é a curva constante $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Logo, $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x^e)$, $t \geq 0$, ou seja, $f(x^e) = 0$. Agora, suponha que $x^e \in D$ é tal que $f(x^e) = 0$. Considere a curva constante $x: [0, \infty) \rightarrow D$ definida por $x(t) = x^e$, $t \geq 0$. Assim, $\dot{x}(t) = 0 = f(x^e) = f(x(t))$, $t \geq 0$, ou seja, mostramos que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é uma solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$. Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que $x(t) = x^e$, $t \geq 0$, é a solução do sistema para $x(0) = x^e$ em $t_0 = 0$.

Teorema: Considere novamente o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ apresentado acima. Seja $x(0) = x_0 \in D$ uma dada condição inicial (em $t_0 = 0$). Se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$, então $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Pontos de Equilíbrio do Pêndulo Simples

Exemplo 1: Considere o pêndulo simples do Lab 1 com $u = 0$ (sem controle)

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado.

Para encontrarmos todos os pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in \mathbb{R}^2$ do pêndulo simples, resolvemos:

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e) = x_2^e \Rightarrow x_2^e = 0$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e) = -\frac{g}{l} \sin(x_1^e) - \frac{k}{m} x_2^e \Rightarrow \sin(x_1^e) = 0$$

Logo, os pontos de equilíbrio são $x_e = (x_1^e, x_2^e) = (\ell\pi, 0)$, com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Mas, como $x_1 = \theta$ (ângulo que o pêndulo forma com o eixo vertical), concluímos que o pêndulo simples apresenta apenas 2 pontos de equilíbrio: $(0, 0)$ (pêndulo parado em baixo) e $(\pi, 0)$ (pêndulo parado em cima).

Exemplo 2: Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Note que $f(x) = Ax$ é de classe C^1 , pois $\partial f / \partial x = A$ é constante. Para encontrarmos os pontos de equilíbrio do sistema, devemos resolver $Ax^e = 0$. É evidente que $x_e = 0$ sempre é um ponto de equilíbrio. Relembre de Álgebra Linear que o conjunto $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ (**núcleo** de A) é um subespaço vetorial, e que $N(A) = \{0\}$ **se e somente se** $\det(A) \neq 0$. Logo:

- Se $\det(A) \neq 0$, então $x^e = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio
- Suponha que $\det(A) = 0$ com $A \neq 0$. Então, o sistema possui infinitos pontos de equilíbrio, pois o conjunto $N(A) \neq \{0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão maior ou igual a 1. Em particular, se $n = 2$ (sistema de segunda ordem), então $N(A)$ é um subespaço vetorial de dimensão 1, ou seja, uma reta passando pela origem do plano x_1 - x_2 .

3.2. Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada não-nula $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Relembre que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v$$

Note que, como $v \neq 0$,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in N(A - \lambda I) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Denominamos $\det(A - \lambda I)$ de **polinômio característico** de A . Logo, os autovalores de A são as raízes reais do seu polinômio característico. No entanto, é possível que o polinômio característico possua raízes complexas. Em tal caso, dizemos que A possui **autovalores complexos**.

3.2. Revisão de Álgebra Linear

Relembre, ainda, que toda matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina o seguinte operador no \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$$

e que toda matriz quadrada invertível $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina a seguinte mudança linear de coordenadas (mudança de base)

$$z = Tx$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas originais do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , e $z = (z_1, \dots, z_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as novas coordenadas do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação à nova base.

3.2. Revisão de Álgebra Linear

Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Temos então que A é a **representação** do operador no \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$$

em relação à base canônica do \mathbb{R}^n , ou seja, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)' \in \mathbb{R}^n$ são as coordenadas canônicas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível. Podemos então encontrar a matriz \bar{A} que representa operador acima nas novas coordenadas $z = Tx$. Note que

$$\mathbb{R}^n \ni z \mapsto x = T^{-1}z \mapsto \tilde{x} = Ax = AT^{-1}z \mapsto \tilde{z} = T\tilde{x} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z = \bar{A}z \in \mathbb{R}^n$$

onde $z = Tx$ e $\tilde{z} = T\tilde{x} = TAx$ são as novas coordenadas dos vetores x e $\tilde{x} = Ax$ em relação à nova base, respectivamente. Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Motivação: Considere a seguinte EDO linear de primeira ordem

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R}$$

onde a é um parâmetro real constante. Relembre que

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

com

$$\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}, \quad e^{a \cdot 0} = 1$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 = 0$, a solução desta EDO é dada por

$$x(t) = e^{at} x_0, \quad t \geq 0$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = ae^{at} x_0 = ax(t), \quad t \geq 0$$

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante. Definimos, para cada $t \geq 0$, a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Temos que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}$$

Portanto, para a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em $t_0 = 0$, a solução deste sistema é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad t \geq 0$$

pois $x(0) = x_0$ e

$$\dot{x}(t) = A e^{At} x_0 = Ax(t), \quad t \geq 0$$

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Relembre que $x^e = 0$ é sempre ponto de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = Ax$$

Portanto, se a condição inicial é $x_0 = x^e = 0$ em $t_0 = 0$, então a solução correspondente é $x(t) = x^e = 0$, $t \geq 0$.

De agora em diante, vamos considerar apenas sistemas de segunda ordem ($n = 2$), ou seja, sistemas em que a dinâmica evolui no plano. Nosso objetivo é analisar de maneira **qualitativa** o comportamento do sistema quando $x_0 \neq 0$. Por exemplo, caso $x_0 \neq 0$, queremos saber:

- Se as soluções convergem (retornam) assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ e, em tal caso, se isto se dá de maneira oscilatória ou não
- Se as soluções oscilam de maneira periódica, sem convergirem ao ponto de equilíbrio $x^e = 0$
- As soluções se afastam (divergem) do ponto de equilíbrio $x^e = 0$

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Ao invés de determinarmos as soluções de maneira **quantitativa** (analítica), tal análise **qualitativa** será realizada pelo esboço do **retrato de fase** do sistema (definido a seguir), o qual será determinado a partir dos autovalores da matriz A .

Dada uma condição inicial x_0 , a **trajetória (ou órbita)** da solução corresponde $x(t)$, $t \geq 0$, é a curva no plano (parametrizada pelo tempo $t \geq 0$)

$$O_{x_0} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), \text{ para algum } t \geq 0\}$$

Assim, as trajetórias do sistema exibem apenas o comportamento **qualitativo** do sistema. Por exemplo, uma trajetória O_{x_0} que é uma curva fechada no plano corresponde à uma solução oscilatória periódica. O **retrato de fase** do sistema é a união de todas as suas trajetórias (órbitas).

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Para um sistema linear autônomo no plano ($n = 2$)

$$\dot{x} = Ax$$

onde $A \in \mathbb{R}^2$ é uma matriz quadrada não-nula, pode-se demonstrar que sempre existe $T \in \mathbb{R}^2$ invertível em que a matriz $\bar{A} = TAT^{-1}$ apresenta uma das seguintes formas

(**forma canônica de Jordan** – veja o livro do Chen):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, λ_1, λ_2 os autovalores reais de A . No segundo caso e no terceiro, os autovalores reais de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. No último caso, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ são os autovalores complexos de A . Relembre que A e $\bar{A} = TAT^{-1}$ possuem os mesmos autovalores.

3.3. Análise Qualitativa de Sistemas Lineares no Plano

Para determinarmos um esboço do retrato de fase do sistema, a ideia é:

- 1 Fazemos a mudança de coordenadas $z = Tx$, denominada de **coordenadas modais**
- 2 Esboçamos o retrato de fase do sistema nas **coordenadas modais** $z = Tx$
- 3 Voltamos às coordenadas originais por $x = T^{-1}z$, e esboçamos o retrato de fase na base canônica

Seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema (nas coordenadas canônicas originais) para uma dada condição inicial x_0 em $t_0 = 0$. Defina $z(t) = Tx(t)$, $t \geq 0$ (solução nas coordenadas modais). Assim,

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = TAx(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{=\bar{A}}z(t)$$

Portanto, a solução do sistema nas coordenadas modais é dada por

$$z(t) = e^{\bar{A}t}z_0, \quad t \geq 0, \quad \text{com } z_0 = Tx_0$$

e, nas coordenadas originais é $x(t) = T^{-1}z(t)$, $t \geq 0$.

3.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}$$

$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

3.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

Desse modo:

- 1 Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó estável**
- 2 Se $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó instável**
- 3 Se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **sela**

3.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

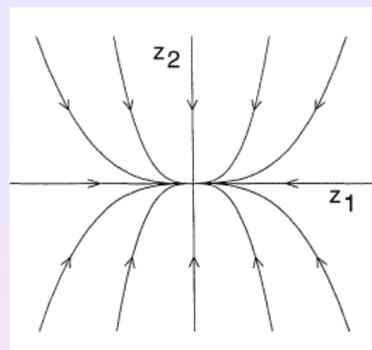


Figura: Retrato de fase de um **nó estável** nas **coordenadas modais**.

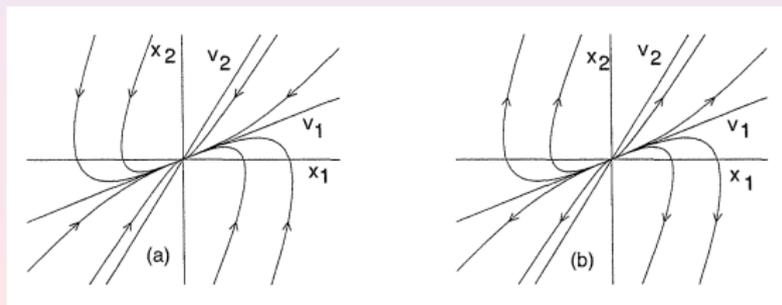


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó estável** e (b) **nó instável** nas **coordenadas originais**.

3.3.1. Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos

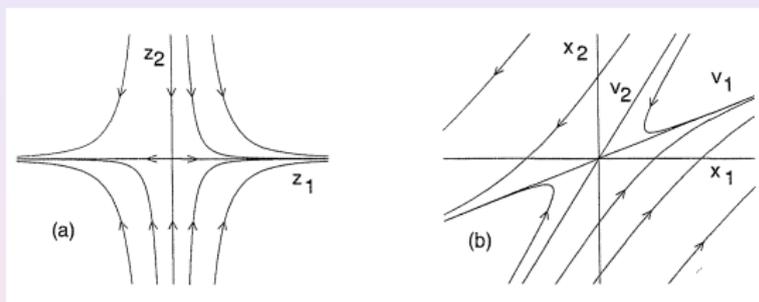


Figura: Retrato de fase de uma **sela** (a) nas **coordenadas modais** e (b) nas **coordenadas originais**.

3.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

Neste caso,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\alpha t} \cos \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$z_2(t) = -z_{10} e^{\alpha t} \sin \beta t + z_{20} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$.

Passando para coordenadas polares

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(z_2/z_1)$$

obtemos que

3.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

$$r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)} = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \tan^{-1}(z_2(t)/z_1(t)) = \theta_0 + \beta t$$

onde $r_0 = \sqrt{z_{10}^2 + z_{20}^2}$ e $\theta_0 = \tan^{-1}(z_{20}/z_{10})$. Desse modo:

- 1 Se $\alpha < 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ converge assintoticamente em espiral para a origem do plano z_1 - z_2 , com frequência (angular) de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **foco estável**
- 2 Se $\alpha > 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ se afasta (diverge) em espiral da origem do plano z_1 - z_2 , com frequência de oscilação $\beta > 0$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **foco instável**
- 3 Se $\alpha = 0$, então $z(t) = (z_1(t), z_2(t))'$ oscila periodicamente com frequência $\beta > 0$, sendo que a amplitude é determinada pelas condições iniciais z_{10} , z_{20} . Neste caso, as trajetórias das soluções $z(t)$ são círculos centrado na origem do plano z_1 - z_2 , e denominamos $x^e = 0$ de **centro**

3.3.2. Caso 2: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \neq 0$ (autovalores complexos)

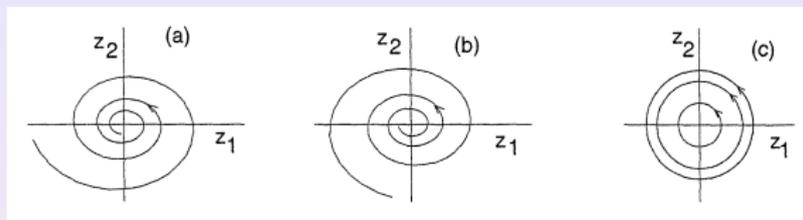


Figura: Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas modais**.

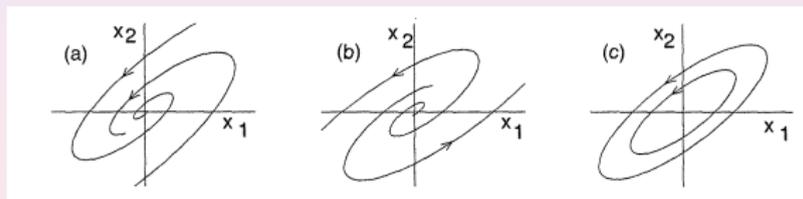


Figura: Retrato de fase de um (a) **foco estável**, (b) **foco instável** e (c) **centro** nas **coordenadas originais**.

3.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Neste caso, temos duas situações:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Na primeira situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

- 1 Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) estável**
- 2 Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (ou estrela) instável**

3.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

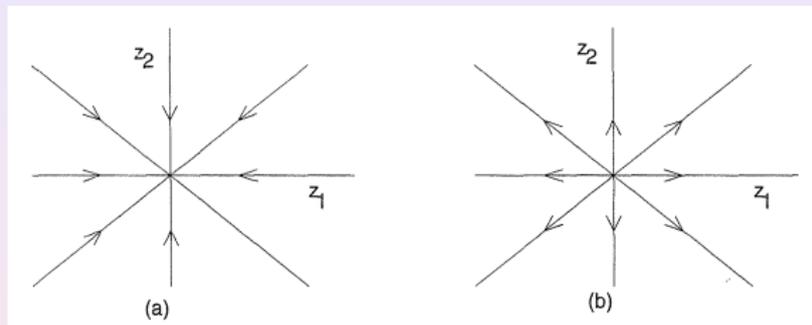


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó (ou estrela) estável** e (b) **nó (ou estrela) instável** nas **coordenadas modais**.

3.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

Por fim, na segunda situação,

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Logo, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))' = e^{\bar{A}t} z_0$, $t \geq 0$, ou seja,

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda t} + z_{20}te^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = z_{20}e^{\lambda t}$$

onde $z_0 = (z_{10}, z_{20})'$. Desse modo:

- 1 Se $\lambda < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$. Neste caso, denominamos o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ de **nó (impróprio) estável**
- 2 Se $\lambda > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \infty$. Neste caso, denominamos $x^e = 0$ de **nó (impróprio) instável**

3.3.2. Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ (autovalores repetidos)

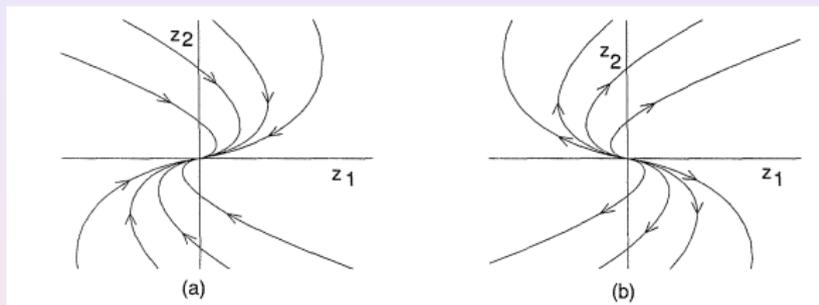


Figura: Retrato de fase de um (a) **nó (impróprio) estável** e (b) **nó (impróprio) instável** nas **coordenadas modais**.

3.4. Resumo

Considere um sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax$$

Com base nos autovalores λ_1, λ_2 da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, obtemos a seguinte classificação do ponto de equilíbrio $x^e = 0$:

- 1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), nó instável ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$), sela ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)
- 2 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \neq 0$: foco estável ($\alpha < 0$), foco instável ($\alpha > 0$), centro ($\alpha = 0$)
- 3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, com λ_1, λ_2 reais e não-nulos: nó estável ($\lambda < 0$), nó instável ($\lambda > 0$)

Importante: como em todos os casos acima a matriz A não possui autovalores nulos, concluímos que $\det(A) \neq 0$, ou seja, $x^e = 0$ é o **único** ponto de equilíbrio do sistema.

3.5. Procedimentos

1. Comprove por simulação que $x^e = (0, 0)$ e $x^e = (\pi, 0)$ são realmente pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Verifique também que o pêndulo simples é não-linear. Dica: simule o pêndulo para a condição inicial $x(0) = (\pi/2, 0)$.
2. Considere o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = Ax$$

Para cada um dos casos abaixo, classifique o ponto de equilíbrio $x^e = 0$, esboce a retrato de fase com base nos autovalores de A , e determine o retrato de fase por simulação para diversas condições iniciais. Dica: utilize o pacote **pplane** do Matlab.

3.5. Procedimientos

1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

3

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Lab 4 – Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano

Objetivos:

Vamos introduzir o conceito de estabilidade estrutural e classificar o comportamento qualitativo local do retrato de fase de sistemas não-lineares autônomos no plano com base nos autovalores da matriz do sistema linearizado.

4.1. Estabilidade Estrutural

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Definimos a **norma euclidiana** de A por $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^2}$. Temos o seguinte resultado da Teoria de Perturbação de Matrizes:

Proposição (Continuidade dos Autovalores): Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz constante) satisfaz $\|\Delta A\| < \delta$, então a distância entre autovalores das matrizes $A + \Delta A$ e A é menor que ϵ , ou seja, $|\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)| < \epsilon$.

Considere o sistema linear autônomo no plano (**sistema nominal**)

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ é o vetor (coluna) de estado e os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são **distintos e não-nulos**, e o **sistema perturbado**

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x$$

onde $\Delta A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz **constante**.

4.1. Estabilidade Estrutural

Concluimos assim da proposição acima que, para **pequenas perturbações** ΔA , a **estabilidade e o tipo do ponto de equilíbrio** $x^e = 0$ **são preservados**. Mais precisamente, se o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema nominal** $\dot{x} = Ax$ é do tipo **nó estável** (os autovalores de A são reais e negativos), **nó instável** (reais e positivos), **sela** (A possui um autovalor negativo e outro positivo), **foco estável** (os autovalores de A são complexos conjugados com parte real negativa), **foco instável** (complexos conjugados com parte real positiva), então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do **sistema perturbado** $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ será do tipo **nó estável**, **nó instável**, **sela**, **foco estável** ou **foco instável**, respectivamente.

Dizemos que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Assim, sistemas lineares no plano da forma $\dot{x} = Ax$ são estruturalmente estáveis quando $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo nó (com autovalores distintos), sela ou foco.

4.1. Estabilidade Estrutural

Importante: Não há estabilidade estrutural quando o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema nominal $\dot{x} = Ax$ é do tipo centro (i.e. a matriz A possui autovalores complexos conjugados com parte real nula). Por exemplo, considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\lambda_{1,2} = \pm j)$$

Assim, para

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

temos que os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ são $\lambda_{1,2} = \mu \pm j$. Portanto, se $\mu > 0$, então o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ do sistema perturbado será do tipo foco instável e, se $\mu < 0$, será do tipo foco estável. Desse modo, o comportamento qualitativo do retrato de fase do sistema nominal não é preservado sob pequenas perturbações no campo de vetores $f(x) = Ax$.

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Considere um sistema não-linear da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto** e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (i.e. $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é contínua). Suponha que $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^e) = 0$.

A expansão em série de Taylor de f em relação ao ponto de equilíbrio x^e é dada por

$$f(x) = \underbrace{f(x^e)}_{=0} + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS}$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x) \cong \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} \underbrace{(x - x^e)}_{=\Delta x}, \quad \text{para } \Delta x = x - x^e \cong 0.$$

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Agora, seja $x(t)$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma condição inicial $x(0) \in D$ em $t_0 = 0$, e considere o **desvio** $y(t) = x(t) - x^e$ da solução $x(t)$ em relação ao ponto de equilíbrio x^e . Assim, para $y(t) = x(t) - x^e \cong 0$ (pequenos desvios), temos

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) \cong \underbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e}}_{\triangleq A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{(x(t) - x^e)}_{=y(t)} = Ay(t)$$

Denominamos

$$\dot{y} = Ay = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right] y$$

de **sistema linearizado** associado ao sistema $\dot{x} = f(x)$ no ponto de equilíbrio x^e .

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Relembre que a solução do sistema linear autônomo $\dot{y} = Ay$ para a condição inicial $y(0) \in \mathbb{R}^n$ é dada por $y(t) = e^{At}y(0)$, $t \geq 0$. Portanto, é razoável esperarmos que

$$x(t) = x^e + y(t) \cong x^e + e^{At}y(0) = x^e + e^{At}(x(0) - x^e), \quad t \geq 0$$

desde que $y(t) = x(t) - x^e \cong 0$, ou seja, $x(t) \cong x^e$. Em particular, é razoável esperarmos que o **retrato de fase do sistema não-linear** $\dot{x} = f(x)$ apresente, nas **proximidades** do ponto do equilíbrio x^e , um **comportamento qualitativo semelhante** ao do retrato de fase do sistema linear $\dot{y} = Ay = [\partial f(x^e)/\partial x]y$ (após uma **translação** por x^e). Isto é de fato verdade, conforme o teorema apresentado a seguir.

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Teorema de Hartman-Grobman: Considere um sistema não-linear autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Seja $x^e \in D$ um ponto de equilíbrio do sistema, e considere o sistema linearizado associado

$$\dot{y} = Ay = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right] y$$

Assuma que os autovalores de A possuem **parte real não-nula**. Então, o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado associado.

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Teorema de Hartman-Grobman (continuação): Em particular, quando $n = 2$ (**sistema no plano**) e os 2 autovalores da matriz A são **distintos e com parte real não-nula**, se $y^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável, nó instável, sela, foco estável ou foco instável, respectivamente.

Devido ao Teorema de Hartman-Grobman acima, dizemos que o sistema linearizado permite analisar **localmente** o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ **em torno** do ponto de equilíbrio x^e .

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Obs: Quando $n = 2$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação analítica (por exemplo, cada componente de f é a soma, diferença, produto ou quociente de funções polinomiais ou trigonométricas), então o resultado do Teorema de Hartman-Grobman permanece válido mesmo quando a matriz A possui 2 autovalores **repetidos fora do eixo imaginário**, ou seja, se $y^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado do tipo nó estável ou nó instável com autovalores iguais, então o retrato de fase de $\dot{x} = f(x)$ apresenta, nas proximidades do ponto de equilíbrio x^e , um comportamento qualitativo semelhante a um nó estável ou nó instável, respectivamente.

4.2. Análise Qualitativa de Sistemas Não-Lineares no Plano nas Proximidades de um Ponto de Equilíbrio

Exemplo: Considere o circuito *tunnel-diode* abaixo:

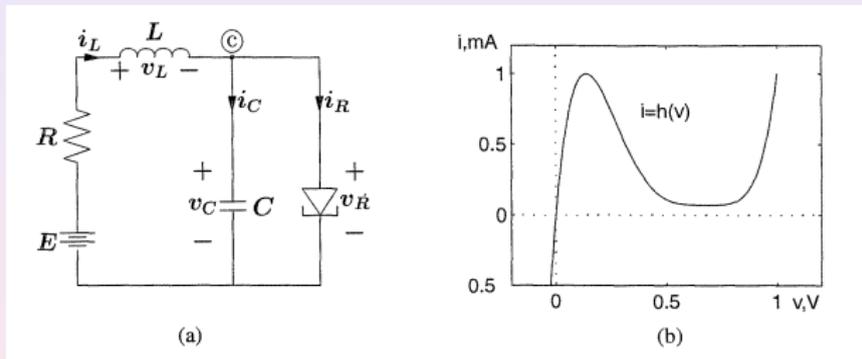


Figura: (a) Circuito *tunnel-diode*, e (b) característica v_r-i_r do diodo.

Considerando que $u = E$ (controle), $x_1 = v_C$ e $x_2 = i_L$, temos que o modelo de estado do circuito é dado por:

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} (-h(x_1) + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (-x_1 - Rx_2 + u)$$

Para $u = 1.2\text{V}$, $R = 1.5\text{k}\Omega$, $C = 2\text{pF} = 2 \times 10^{-12}\text{F}$, $L = 5\mu\text{H}$, e considerando que o tempo é medido em nanosegundos e as correntes em mA, temos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = 0.5(-h(x_1) + x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2)$$

Suponha que

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

Fazendo $f(x_1^e, x_2^e) = (f_1(x_1^e, x_2^e), f_2(x_1^e, x_2^e)) = (0, 0)$, obtemos 3 pontos de equilíbrio:

$$Q_1 = (0.063, 0.758), \quad Q_2 = (0.285, 0.61), \quad Q_3 = (0.884, 0.21)$$

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

Temos que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} dh(x_1)/dx_1 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

com

$$dh(x_1)/dx_1 = 17.76 - 207.58x_1 + 668.86x_1^2 - 905.25x_1^3 + 418.6x_1^4$$

Assim:

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_1} = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -3.57, \lambda_2 = -0.33$$

$$A_2 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_2} = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.77, \lambda_2 = -0.25$$

$$A_3 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=Q_3} = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1.33, \lambda_2 = -0.4$$

Exemplo: Circuito *Tunnel-Diode*

Portanto: Q_1 é um nó estável, Q_2 é do tipo sela, e Q_3 é um nó estável. O retrato de fase abaixo comprova nossa análise **local** pelo sistema linearizado. Observe a presença das separatrizes (uma **separatriz** é uma curva que divide o retrato de fase em regiões com comportamentos qualitativos distintos). Assim, um circuito *tunnel-diode* **real** funciona como um circuito biestável: os 2 estados são Q_1 e Q_3 (na prática, pequenos ruídos externos forçarão a órbita a sair das separatrizes).

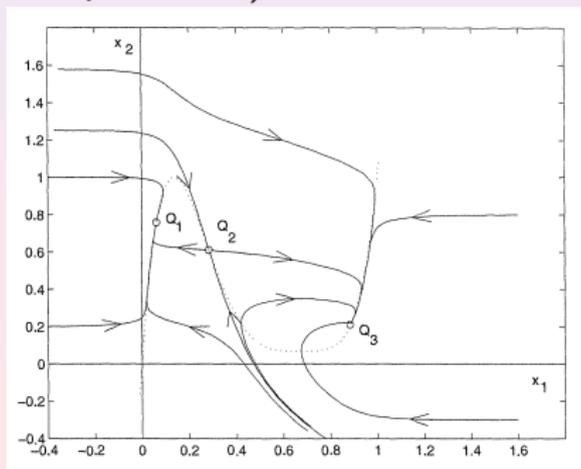


Figura: Retrato de fase do circuito *tunnel-diode*.

4.3. Procedimentos

1. Para o circuito *tunnel-diode* do exemplo anterior, utilize o pacote simbólico do Matlab para calcular os pontos de equilíbrio e o sistema linearizado associado. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase utilizando o pacote **pplane**. Interprete o retrato de fase, concluindo que um circuito *tunnel-diode* **real** opera como um circuito biestável. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento das separatrizes (fenômeno **global**).

2. Classifique os pontos de equilíbrio do pêndulo simples e esboce o retrato de fase. Relembre que o modelo de estado do pêndulo simples com $u = 0$ (sem controle) é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2\end{aligned}$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $m = \ell = 1$, $g = 9.8$ e $k = 0.1$.

3. Considere a equação de Van der Pol

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\epsilon = 0.2$ é um parâmetro. Classifique os pontos de equilíbrio e esboce o retrato de fase. Note a presença de um **ciclo limite** (estudaremos ciclos limite no próximo Lab). Assim, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a amplitude de oscilação independe da condição inicial. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo limite (fenômeno **global**).

Objetivos:

Vamos inicialmente analisar osciladores lineares e suas limitações práticas. Na sequência, vamos estudar osciladores não-lineares através de ciclos-limite. Por fim, verificaremos o comportamento caótico em um pêndulo duplo.

5.1. Osciladores Lineares

Um **oscilador** é um sistema que exibe comportamento oscilatório. Quando tal comportamento $y(t)$ é periódico e dado por

$$y(t) = C \cos(\omega t + \phi)$$

denominamos o sistema de **oscilador harmônico (simples)**.

Veremos agora que todo sistema descrito por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{com } \omega > 0$$

é um **oscilador harmônico linear**. Escolhendo como variáveis de estado

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

e definindo vetor (coluna) de estado $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$, obtemos o sistema linear autônomo no plano

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x = Ax$$

5.1. Osciladores Lineares

Note que os autovalores da matriz A são

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega$$

Logo, o ponto de equilíbrio $x^e = 0$ é do tipo **centro**. Desse modo, as soluções $x(t) = (x_1(t), x_2(t))' = (y(t), \dot{y}(t))' \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, oscilam periodicamente com frequência ω e a amplitude de oscilação depende da condição inicial.

É fácil verificar que a solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))' \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, para a condição inicial $x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}) = (y(0), \dot{y}(0))' \in \mathbb{R}^2$ em $t_0 = 0$, é dada por

$$x_1(t) = C \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = -\omega C \sin(\omega t + \phi)$$

onde

$$C = \sqrt{(x_{10})^2 + \left(\frac{x_{20}}{\omega}\right)^2}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{x_{20}}{x_{10}\omega}\right)$$

Note que a amplitude C e a fase ϕ dependem de $x_0 = (x_{10}, x_{20})'$.

5.1. Osciladores Lineares

Como

$$y(t) = x_1(t) = C \cos(\omega t + \phi), \quad t \geq 0,$$

concluimos que todo sistema modelado por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{com } \omega > 0$$

corresponde de fato a um **oscilador harmônico linear**.

Exemplo 1 (Sistema Massa-Mola): Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo

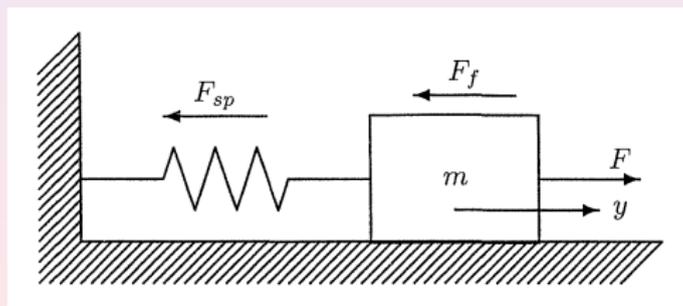


Figura: Sistema massa-mola.

5.1. Osciladores Lineares

onde m é a massa do bloco e y é o deslocamento horizontal do bloco em relação a uma posição de referência. Considerando que $F_{sp} = ky$ (força restauradora da mola (*spring*)), $F = 0$ (força externa nula) e $F_f = 0$ (força de atrito (*friction*) nula), obtemos pela 2ª Lei de Newton:

$$m\ddot{y} + F_{sp} = m\ddot{y} + ky = 0$$

ou seja,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{com } \omega = \sqrt{k/m}$$

Portanto, o sistema massa-mola sem atrito é um oscilador harmônico linear. Ressaltamos que a frequência de oscilação é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$.

5.1. Osciladores Lineares

Exemplo 2 (Circuito LC): Considere o circuito LC ilustrado abaixo

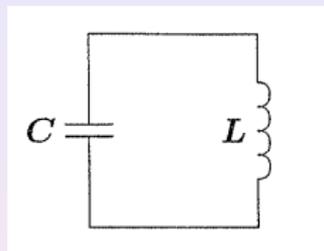


Figura: Circuito LC.

Considere que $y = i_L$ (corrente no indutor). Como

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C = v_L$$

$$i_C = -i_L$$

obtemos que

5.1. Osciladores Lineares

$$\ddot{y} = \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{L} \dot{v}_L = \frac{1}{L} \dot{v}_C = \frac{1}{LC} i_C = -\frac{1}{LC} i_L = -\frac{1}{LC} y$$

ou seja,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{com } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Portanto, o circuito LC é um oscilador harmônico linear: existe uma troca periódica entre a energia armazenada no campo elétrico do capacitor e a energia armazenada no campo magnético do indutor. Ressaltamos que a frequência de oscilação é dada por $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Apesar de um oscilador harmônico linear descrito por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

apresentar um comportamento oscilatório periódico da forma $y(t) = C \cos(\omega t + \phi)$, o mesmo apresenta os seguintes problemas:

5.1. Osciladores Lineares

- 1 O sistema **não é** estruturalmente estável, pois vimos que $x^e = 0$ é um ponto de equilíbrio do tipo **centro** da equação de estado $\dot{x} = Ax$ associada. Portanto, pequenas perturbações ΔA no sistema nominal $\dot{x} = Ax$ irão destruir o comportamento periódico. Por exemplo, em um sistema massa-mola real, sempre teremos a presença de uma força de atrito $F_f \neq 0$, resultando numa dissipação de energia e na destruição da oscilação periódica. Do mesmo modo, em um circuito LC real, a resistência dos cabos elétricos dissipará a energia trocada entre o capacitor e o indutor.
- 2 Mesmo que fosse possível construir na prática um oscilador harmônico linear, vimos que a **amplitude de oscilação depende da condição inicial** $x_0 = (x_{10}, x_{20})' = (y(0), \dot{y}(0))'$.

Estes 2 problemas podem ser eliminados se considerarmos osciladores não-lineares. Isto será visto na sequência.

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

Relembre que um oscilador é um sistema que exibe comportamento oscilatório. Assim, uma sistema autônomo da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, D é um conjunto aberto e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , oscila periodicamente quando o mesmo possui uma solução periódica $x(t) \in D$, ou seja:

$$x(t) = x(t + T), \quad \text{para } t \geq 0,$$

onde $T > 0$ é o período de oscilação (soluções constantes, i.e. pontos de equilíbrio, não serão consideradas periódicas). Portanto, no retrato de fase do sistema, temos que toda órbita fechada (que não é um ponto de equilíbrio) corresponde a uma solução periódica, e vice-versa.

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

Quando $n = 2$ (sistema no plano), denominamos uma órbita fechada $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^2$ do sistema $\dot{x} = f(x)$ de **ciclo-limite (ou oscilação auto-sustentada)** quando γ é uma órbita fechada **isolada** do sistema, ou seja, quando existe um conjunto aberto V com $\gamma \subset V \subset D$ e tal que V não contém nenhuma outra órbita fechada diferente de γ . Desse modo, percebemos que **não existem ciclos-limite em sistemas lineares autônomos** no plano da forma $\dot{x} = Ax$, pois o sistema só terá órbitas fechadas (soluções periódicas) caso $x^e = 0$ seja um ponto de equilíbrio do tipo centro (autovalores $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$), e é evidente que tais órbitas fechadas (um continuum de elipses concêntricas centradas em $x^e = 0$) não são isoladas. Concluimos, portanto, que **ciclos-limite só podem ocorrer em sistemas não-lineares autônomos** (no plano).

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

Pode-se mostrar que só existem três tipos de ciclos-limite (γ):

- 1 **Estável:** quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ e tal que, para toda condição inicial $x(0) \in W$ em $t_0 = 0$, a solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, **tende em espiral** ao ciclo-limite quando $t \rightarrow \infty$
- 2 **Instável:** quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ tal que, para toda condição inicial $x(0) \in W$, a solução correspondente $x(t)$, $t \geq 0$, **se afasta em espiral** do ciclo-limite quando $t \rightarrow \infty$
- 3 **Semi-estável:** quando existe um conjunto aberto W com $\gamma \subset W \subset D$ tal que: (a) se a condição inicial $x(0) \in W$ está no interior (respectivamente, exterior) do ciclo-limite, então $x(t)$ **tende em espiral** ao ciclo-limite quando $t \rightarrow \infty$; e (b) se a condição inicial $x(0) \in W$ está no exterior (respectivamente, interior) do ciclo-limite, então $x(t)$ **se afasta em espiral** do ciclo-limite quando $t \rightarrow \infty$

Além disso, pode-se mostrar que **sempre haverá um ponto de equilíbrio no interior de um ciclo-limite.**

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

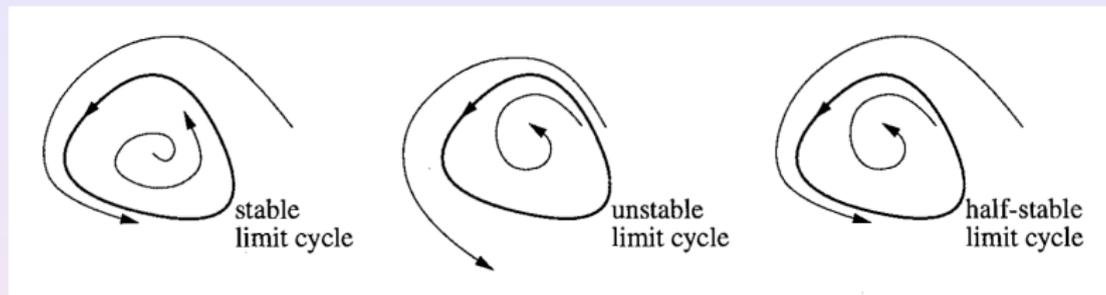


Figura: Tipos de ciclos-limite: (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável.

Seja γ um ciclo-limite **estável**. Portanto, todas as soluções do sistema que começam suficientemente próximas de γ tendem em espiral para a órbita fechada γ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, para $t \geq 0$ suficientemente grande, temos que as soluções correspondentes $x(t)$ oscilam periodicamente com mesma frequência e a mesma amplitude da solução periódica associada a γ (mas não estarão necessariamente em fase!). Neste sentido, concluímos que a **amplitude de oscilação independe da condição inicial!**

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

A determinação dos possíveis ciclos-limite de um sistema não-linear não é uma tarefa fácil. O resultado abaixo é um critério para se prever a não-existência de ciclos-limite.

Critério de Bendixson: Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = f(x)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D é aberto e $f = (f_1, f_2)'$: $D \subset \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 . Seja $W \subset D$ um conjunto aberto simplesmente conexo (i.e. W não apresenta “buracos”). Se $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 \neq 0$ **em todos os pontos** de W , então o sistema **não** apresenta órbitas fechadas em W .

5.2. Osciladores Não-Lineares e Ciclos-Limite

Exemplo: Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 - x_1^2x_2 - x_1^3$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ são parâmetros constantes.

Tome $W = \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 = b - x_1^2$$

Portanto, quando $b < 0$, temos que $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 < 0$ em todos os pontos de $W = \mathbb{R}^2$. Logo, não há nenhuma órbita fechada no plano \mathbb{R}^2 se $b < 0$ (no entanto, se $b \geq 0$, então teremos pontos de \mathbb{R}^2 em que $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 = 0$, e nada podemos afirmar sobre a existência ou não de órbitas fechadas no plano!)

5.3. Caos

Não há uma definição universalmente aceita de **caos** na literatura de sistemas dinâmicos. No entanto, a seguinte definição é suficiente para os propósitos do nosso curso:

Definição: **Caos** é um comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema dinâmico (determinístico) que exhibe sensibilidade às condições iniciais.

Aqui, **comportamento aperiódico de longo prazo** significa que existem soluções que não convergem para pontos de equilíbrio, soluções periódicas ou soluções quase-periódicas quando $t \rightarrow \infty$. O termo **determinístico** significa que o sistema não possui entradas, ruídos ou parâmetros que variam de maneira randômica. E, **sensibilidade às condições iniciais**, significa que soluções com condições iniciais próximas se separam com rapidez exponencial. Portanto, uma pequena mudança, perturbação ou incerteza na condição inicial leva a uma solução com comportamento futuro significativamente diferente.

Citando Edward Lorenz (meteorologista e um dos pioneiros no estudo do caos): **“Caos: Quando o presente determina o futuro, mas o presente aproximado não determina o futuro de maneira aproximada.”**

Sensibilidade às condições iniciais é popularmente conhecido como **efeito borboleta** (termo decorrente de um artigo de Lorenz de 1972 intitulado *“Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?”*): o bater das asas da borboleta representa uma pequena mudança nas condições iniciais do sistema, causando assim uma cadeia de eventos que leva a um comportamento futuro significativamente diferente. Caso a borboleta não tivesse batido suas asas, a solução do sistema poderia ter sido bem diferente.

Diversos sistemas reais apresentam comportamento caótico: circuitos eletrônicos, sistemas mecânicos, sistemas meteorológicos, sistemas ecológicos, sistemas químicos, etc.

Pode-se mostrar que apenas sistemas não-lineares autônomos de ordem $n \geq 3$ podem apresentar comportamento caótico. Assim, não há caos em sistemas lineares autônomos de qualquer ordem nem em sistemas não-lineares autônomos no plano!

Para maiores detalhes sobre a Teoria do Caos, veja:

https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory.

5.4. Procedimentos

1. Considere um circuito LC com $L = C = 1$. Simule o sistema para diversas condições iniciais, comprovando pelo retrato de fase e pelas soluções no domínio do tempo que a amplitude de oscilação depende da condição inicial (elipses concêntricas centradas em $x^e = 0$ no retrato de fase).
2. Considere o circuito oscilador abaixo:

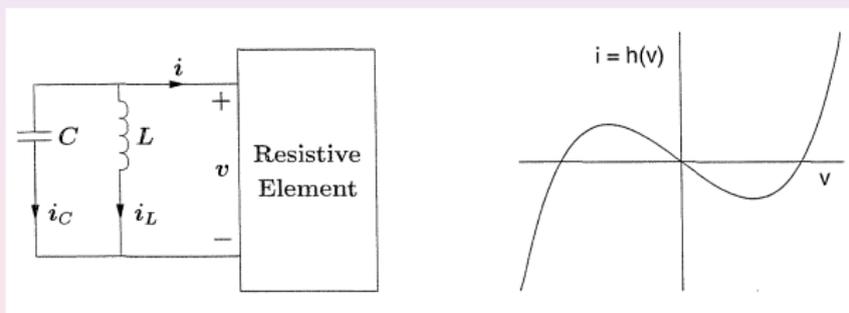


Figura: (a) Circuito oscilador e (b) característica v - i do elemento resistivo (resistência negativa)

5.4. Procedimentos

A resistência negativa por ser implementada pelo seguinte circuito:

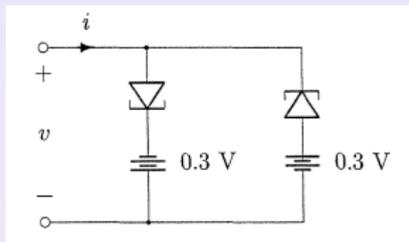


Figura: Elemento de resistência negativa com um par de *tunnel-diodes*.

A partir das Leis de Kirchhoff, pode-se mostrar que o circuito oscilador é modelado por

$$\ddot{v} + \epsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

onde $\epsilon = \sqrt{L/C}$ e $h'(v) = dh(v)/dv$. Suponha que $h(v) = -v + v^3/3$ (característica $v-i$ do elemento resistivo). Com isso, obtemos a famosa **equação de Van der Pol**:

$$\ddot{v} - \epsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$

A equação de Van der Pol foi utilizada para modelar um oscilador eletrônico empregado nos primeiros aparelhos de rádio.

5.4. Procedimentos

Escolhendo $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$, chegamos à equação de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado. Considere que $\epsilon = 0.2$. Note que $x^e = 0$ é o único ponto de equilíbrio, e verifique que $x^e = 0$ é do tipo foco instável. Esboce o retrato de fase através do **pplane** e note a presença de um **ciclo-limite estável**. Ressaltamos que a análise **local** pelo sistema linearizado não é capaz de prever o aparecimento do ciclo-limite (fenômeno **global**). Simule o sistema para diversas condições iniciais, comprovando pelo retrato de fase e pelo domínio do tempo que as soluções tendem em espiral para o ciclo-limite quando $t \rightarrow \infty$, oscilando periodicamente com mesma frequência e a mesma amplitude da solução periódica associada ao ciclo-limite (mas sem estar necessariamente em fase!). Neste sentido, a equação de Van der Pol corresponde a um oscilador periódico (não-linear) em que a **amplitude de oscilação independe da condição inicial!**

5.4. Procedimentos

3. Considere o seguinte sistema ecológico (presa-predador):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \left(1 - \frac{x_1}{\gamma} \right) - \frac{x_1 x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta \delta x_1 x_2}{\frac{x_1^2}{\alpha} + x_1 + 1} - \delta x_2\end{aligned}$$

onde x_1 é o número de presas, x_2 é o número de predadores, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, e $\alpha = 5.2$, $\beta = 2.0$, $\gamma = 3.5$, $\delta = 2.5$ são parâmetros constantes. Verifique pelo **pplane** que o sistema apresenta 3 pontos de equilíbrio: $(0; 0)$ (sela), $(3.5; 0)$ (sela) e outro próximo de $(1.4; 1.75)$ (foco instável). Observe a presença de um **ciclo-limite estável** e interprete o retrato de fase em termos do equilíbrio ecológico.

Obs: Da mesma maneira como um **ponto de equilíbrio** pode ser visto como um **equilíbrio estático**, um **ciclo-limite estável** pode ser visto como um **equilíbrio dinâmico** (fenômeno **não-linear!**).

4. Considere o pêndulo duplo. Verifique a característica caótica do sistema: pequenas incertezas nas condições iniciais levam a comportamentos futuros de longo prazo significativamente diferentes (sensibilidade às condições iniciais). Para isto, acesse:

- 1 https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum
- 2 http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/dpend_html

Objetivos:

Vamos introduzir o conceito de bifurcação e ver como esboçar o diagrama de bifurcação correspondente. Em seguida, classificaremos as bifurcações locais de sistemas não-lineares no plano. Por fim, analisaremos sistemas que ilustram os diversos tipos de bifurcação e veremos os efeitos qualitativos no retrato de fase.

6.1. Bifurcação

Vimos nos Labs 4 e 5 que o **comportamento qualitativo** de um sistema não-linear no plano ($n = 2$) é determinado pelos padrões exibidos em seu retrato de fase, que por sua vez depende dos tipos de seus pontos de equilíbrio e ciclos-limite.

Relembre do Lab 4 que um sistema (nominal) da forma $\dot{x} = f(x)$ é **estruturalmente estável** quando o comportamento qualitativo do seu retrato de fase é preservado sob pequenas perturbações no seu campo de vetores $f(x)$. Vamos agora analisar situações em que o sistema perde a propriedade de ser estruturalmente estável. Iremos nos concentrar na situação em que pequenas perturbações num parâmetro do sistema causam mudanças abruptas no comportamento qualitativo do retrato de fase. Tais mudanças são denominadas de **bifurcações**.

6.1. Bifurcação

Mais precisamente, considere um sistema não-linear autônomo no plano da forma

$$\dot{x} = f_{\mu}(x)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, D é um conjunto aberto, $\mu \in \mathbb{R}$ é um parâmetro que pode ser variado, e $f_{\mu}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 para cada $\mu \in \mathbb{R}$. Aqui, $\mu \in \mathbb{R}$ pode representar tanto um parâmetro físico do sistema (o valor de uma resistência R em um circuito elétrico, por exemplo) quanto um parâmetro de controle (a amplitude de um controle constante $u(t) = \mu$ em malha-aberta ou o ganho de um controlador em malha-fechada, por exemplo). Uma **bifurcação** é uma mudança abrupta nos tipos de pontos de equilíbrio e/ou ciclos-limite à medida que o parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$ sofre variações. Denominamos μ de **parâmetro de bifurcação**, e os valores $\mu = \mu^*$ nos quais tais mudanças abruptas ocorrem são denominados de **pontos de bifurcação**.

6.2. Classificação de Bifurcações

Uma bifurcação é comumente representada graficamente pelo **diagrama de bifurcação** no plano. Tal diagrama esboça uma medida da amplitude dos pontos de equilíbrios e/ou ciclos-limite em função do parâmetro de bifurcação $\mu \in \mathbb{R}$, e indica também o tipo dos pontos de equilíbrios e/ou ciclos-limite: **linhas cheias** representam **pontos de equilíbrio estáveis** (i.e. nó estável ou foco estável) e **ciclos-limite estáveis**; e **linhas tracejadas** representam **pontos de equilíbrio instáveis** (i.e. nó instável, foco instável ou sela) e **ciclos-limite instáveis**.

6.2. Classificação de Bifurcações

Temos a seguinte classificação de bifurcações (locais):

- (a) **Bifurcação sela-nó:** para $\mu > \mu^*$ há um ponto de equilíbrio do tipo sela e outro do tipo nó estável; para $\mu = \mu^*$ **a sela e o nó colidem** em um ponto de equilíbrio; e para $\mu < \mu^*$ a sela e o nó desaparecem
- (b) **Bifurcação transcritical:** há um ponto de equilíbrio estável e outro instável sempre que $\mu \neq \mu^*$, mas em $\mu = \mu^*$ estes **2 pontos de equilíbrio trocam de estabilidade** e ambos colidem em um ponto de equilíbrio

6.2. Classificação de Bifurcações

- (c) **Bifurcação de forquilha (pitchfork) supercrítica:** para $\mu < \mu^*$ há um ponto de equilíbrio estável; para $\mu > \mu^*$ há 3 pontos de equilíbrios, sendo 2 estáveis e 1 instável; e para $\mu = \mu^*$ estes 3 pontos de equilíbrio colidem em um ponto de equilíbrio

- (d) **Bifurcação de forquilha (pitchfork) subcrítica:** para $\mu < \mu^*$ há 3 pontos de equilíbrios, sendo 2 instáveis e 1 estável; para $\mu > \mu^*$ há um ponto de equilíbrio instável; e para $\mu = \mu^*$ os 3 pontos de equilíbrio colidem em um ponto de equilíbrio

6.2. Classificação de Bifurcações

- (e) **Bifurcação de Hopf supercrítica:** para $\mu < \mu^*$ há um foco estável; para $\mu > \mu^*$ este foco estável se torna instável e há o surgimento de um ciclo-limite estável

- (f) **Bifurcação de Hopf subcrítica:** para $\mu < \mu^*$ há um foco estável e 2 ciclos-limite, sendo um estável e outro instável; para $\mu > \mu^*$ o foco estável se funde com o ciclo-limite instável, resultando em um foco instável (mas um ciclo-limite estável continua existindo)

6.2. Classificação de Bifurcações

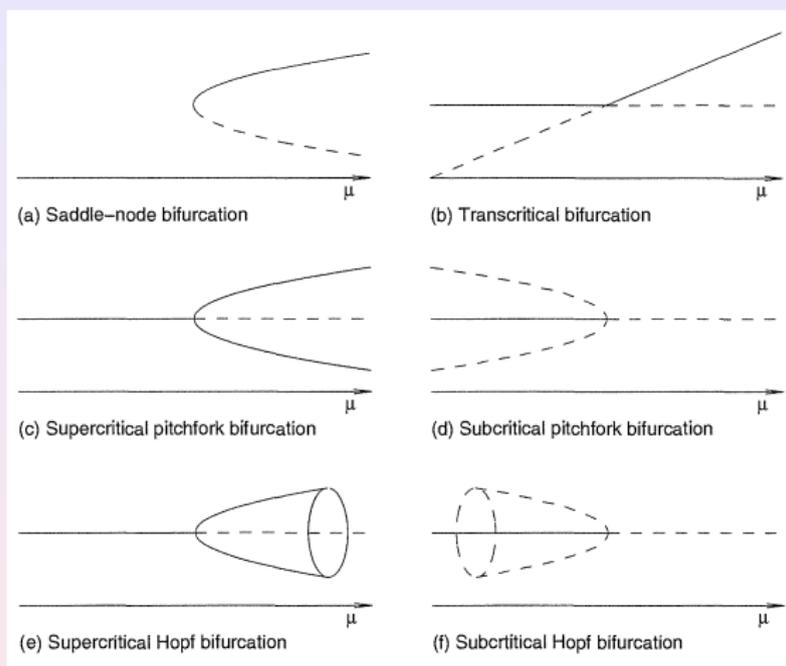


Figura: Diagramas de bifurcação com ponto de bifurcação $\mu = \mu^*$ (o ciclo-limite estável da bifurcação de Hopf subcrítica não é mostrado por simplicidade).

6.3. Exemplos

Nos exemplos abaixo, assumimos que $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1 (Bifurcação Sela-Nó): Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = \mu - x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ e $x^{e2} = (-\sqrt{\mu}, 0)$, para $\mu \geq 0$, pois:

$$\mu - (x_1^e)^2 = 0 \Rightarrow x_1^e = \pm\sqrt{\mu}$$

$$-x_2^e = 0 \Rightarrow x_2^e = 0$$

Ressaltamos que não há pontos de equilíbrio $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in \mathbb{R}^2$ quando $\mu < 0$. A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 (Bifurcação Sela-Nó)

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e2}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ é um nó estável e $x^{e2} = (-\sqrt{\mu}, 0)$ é do tipo sela. Portanto, ocorre uma bifurcação sela-nó no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

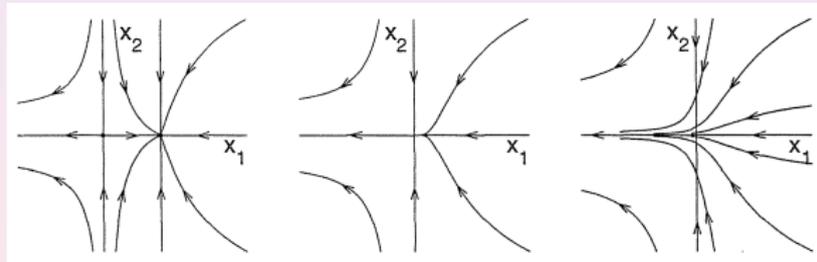


Figura: Retrato de fase do Exemplo 1 (bifurcação sela-nó) para $\mu > 0$ (esquerda), $\mu = \mu^* = 0$ (meio) e $\mu < 0$ (direita). Note que: (a) se $\mu > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^{e1} = (\sqrt{\mu}, 0)$ sempre que a condição inicial $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $x_{01} > -\sqrt{\mu}$; e (b) se $\mu < 0$, então não há pontos de equilíbrio e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$ para qualquer x_0 .

6.3. Exemplos

Exemplo 2 (Bifurcação Transcrítica): Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0, 0)$ e $x^{e2} = (\mu, 0)$, para $\mu \in \mathbb{R}$, pois:

$$\begin{aligned}\mu x_1^e - (x_1^e)^2 = x_1^e(\mu - x_1^e) = 0 &\Rightarrow x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \mu \\ -x_2^e = 0 &\Rightarrow x_2^e = 0\end{aligned}$$

A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu - 2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 (Bifurcação Transcrítica)

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e2}} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo: (a) quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é do tipo sela (instável) e $x^{e2} = (\mu, 0)$ é um nó estável; e (b) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é um nó estável e $x^{e2} = (\mu, 0)$ é do tipo sela (instável). Portanto, estes 2 pontos de equilíbrio trocam de estabilidade em $\mu = 0$. Desse modo, ocorre uma bifurcação transcrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

Exemplo 3 (Bifurcação de Forquilha Supercrítica): Considere

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0, 0)$, $x^{e2} = (\sqrt{\mu}, 0)$ e $x^{e3} = (-\sqrt{\mu}, 0)$, para $\mu > 0$, pois:

$$\begin{aligned}\mu x_1^e - (x_1^e)^3 &= x_1^e(\mu - (x_1^e)^2) = 0 \Rightarrow x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \pm\sqrt{\mu} \\ -x_2^e &= 0 \Rightarrow x_2^e = 0\end{aligned}$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \leq 0$ é $x^e = (0, 0)$.
A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu - 3x_1^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 (Bifurcação de Forquilha Supercrítica)

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e2,3}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo: (a) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é um nó estável, sendo o único ponto de equilíbrio; e (b) quando $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é do tipo sela (instável) e $x^{e2,3} = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$ são nós estáveis. Portanto, ocorre uma bifurcação de forquilha supercrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

Exemplo 4 (Bifurcação de Forquilha Subcrítica): Considere

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Note que os pontos de equilíbrio são $x^{e1} = (0, 0)$, $x^{e2} = (\sqrt{-\mu}, 0)$ e $x^{e3} = (-\sqrt{-\mu}, 0)$, para $\mu < 0$, pois:

$$\begin{aligned}\mu x_1^e + (x_1^e)^3 = x_1^e(\mu + (x_1^e)^2) = 0 &\Rightarrow x_1^e = 0 \text{ ou } x_1^e = \pm\sqrt{-\mu} \\ -x_2^e = 0 &\Rightarrow x_2^e = 0\end{aligned}$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \geq 0$ é $x^e = (0, 0)$.
A matriz jacobiana é dada por

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mu + 3x_1^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4 (Bifurcação de Forquilha Subcrítica)

Assim, as matrizes dos sistemas linearizados associados são dadas respectivamente por

$$A_1 = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e1}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{e2,3}} = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo: (a) quando $\mu < 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é um nó estável e $x^{e2,3} = (\pm\sqrt{-\mu}, 0)$ são do tipo sela (instáveis); e (b) para $\mu > 0$, temos que $x^{e1} = (0, 0)$ é do tipo sela (instável), sendo o único ponto de equilíbrio. Portanto, ocorre uma bifurcação de forquilha subcrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

Antes de apresentarmos exemplos da bifurcação de Hopf, relembramos os seguintes resultados de Cálculo:

Proposição: Seja $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que $dg(t)/dt \leq 0$ e $g(t) \geq c$, para todo $t \in J$, onde $c \in \mathbb{R}$ (finito!). Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \bar{g} \geq c,$$

onde $\bar{g} \in \mathbb{R}$ (finito!).

Proposição: Seja $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que $dg(t)/dt \geq 0$ e $g(t) \leq c$, para todo $t \in J$, onde $c \in \mathbb{R}$ (finito!). Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \bar{g} \leq c$$

onde $\bar{g} \in \mathbb{R}$ (finito!).

6.3. Exemplos

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica): Considere

$$\dot{x}_1 = x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1$$

Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, a solução do sistema para uma dada condição inicial $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$. Passando para coordenadas polares

$$r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \geq 0, \quad \theta(t) = \tan^{-1}(-x_2(t)/x_1(t)) \in [0, 2\pi)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{1}{2}(x_1(t)^2 + x_2(t)^2)^{-1/2} [2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t)] \\ &= (x_1(t)^2 + x_2(t)^2)^{-1/2} [x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t)] \\ &= \mu r(t) - r^3(t) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}(t) = 1$$

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, concluímos que $(r(t), \theta(t))$, $t \geq 0$, é a solução de

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

para a condição inicial $r(0) = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$, $\theta(0) = \tan^{-1}(\frac{-x_{02}}{x_{01}})$.
Desse modo, podemos reduzir nossa análise à seguinte EDO

$$\dot{r} = p(r) = \mu r - r^3, \quad r \geq 0$$

Note que os pontos de equilíbrio são $r^{e1} = 0$ (origem) e $r^{e2} = \sqrt{\mu} > 0$ (ciclo-limite), para $\mu > 0$, pois:

$$\mu r^e - (r^e)^3 = r^e(\mu - (r^e)^2) = 0 \Rightarrow r^e = 0 \text{ ou } r^e = \sqrt{\mu} > 0$$

Observe que o único ponto de equilíbrio para $\mu \leq 0$ é $r^e = 0$.

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

Suponha que $\mu < 0$. Então, dado $r(0) > 0$, temos que $r(t) > 0$ (pois $r(t)$ não pode cruzar o ponto de equilíbrio $r^e = 0$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) < 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela primeira proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \bar{r} \geq 0$$

Mas, $\bar{r} \geq 0$ é necessariamente um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$ (veja o Teorema da Seção 3.1 do Lab 3). Assim, mostramos que, dado $r(0) > 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \bar{r} = r^e = 0$$

ou seja, a origem $x^e = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema do tipo foco estável.

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

Agora, suponha que $\mu > 0$. Seja $0 < r(0) < \sqrt{\mu}$. Então, $0 < r(t) < \sqrt{\mu}$ (pois $r(t)$ não pode cruzar nem o ponto de equilíbrio $r^{e1} = 0$ nem o ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) = r(t)(\mu - r^2(t)) > 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela segunda proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \tilde{r} \leq \sqrt{\mu}$$

No entanto, $\tilde{r} \leq \sqrt{\mu}$ tem que ser um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$. Note que $\tilde{r} \neq r^{e1} = 0$, pois $r(t)$, $t \geq 0$, é uma função crescente pelo fato de $\dot{r}(t) > 0$. Desse modo, provamos que, dado $0 < r(0) < \sqrt{\mu}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \tilde{r} = r^{e2} = \sqrt{\mu}$$

ou seja, a origem $x^e = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio do sistema do tipo foco instável, e toda condição inicial não-nula no interior do ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$ tende ao mesmo em espiral.

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

Por fim, considere que $r(0) > \sqrt{\mu}$. Então, $r(t) > \sqrt{\mu}$ (pois $r(t)$ não pode cruzar o ciclo-limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$) com $\dot{r}(t) = p(r(t)) = \mu r(t) - r^3(t) = r(t)(\mu - r^2(t)) < 0$, para todo $t \geq 0$. Logo, pela primeira proposição acima, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \hat{r} \geq \sqrt{\mu} > 0$$

Mas, $\hat{r} \geq \sqrt{\mu} > 0$ tem que ser um ponto de equilíbrio de $\dot{r} = p(r)$. Assim, mostramos que, dado $r(0) > \sqrt{\mu}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \hat{r} = r^{e2} = \sqrt{\mu}$$

ou seja, o ciclo limite $r^{e2} = \sqrt{\mu}$ é estável. Portanto, concluímos que ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica no ponto de bifurcação $\mu^* = 0$.

Exemplo 5 (Bifurcação de Hopf Supercrítica)

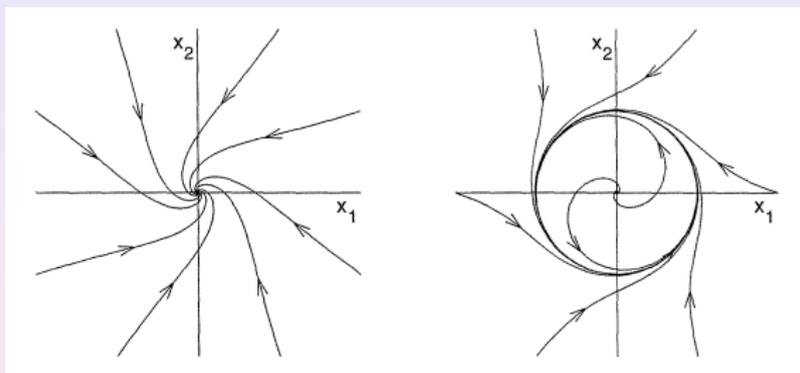


Figura: Retrato de fase do Exemplo 5 (bifurcação de Hopf supercrítica) para $\mu < 0$ (esquerda) e $\mu > 0$ (direita).

6.4. Procedimentos

1. Para cada um dos 5 exemplos acima, utilize o **pplane** para verificar o efeito qualitativo das bifurcações no retrato de fase do sistema. Esboce o diagrama de bifurcação correspondente. Considerando que $|\mu - \mu^*| \cong 0$, quais destas bifurcações pode sem consideradas **seguras** e quais podem ser consideradas **perigosas** em termos do comportamento em regime permanente ($t \rightarrow \infty$) do sistema?

2. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 [\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 [\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] + x_1\end{aligned}$$

Utilizando o **pplane**, verifique que este sistema apresenta uma bifurcação de Hopf subcrítica no ponto bifurcação $\mu^* = 0$. Esboce o diagrama de bifurcação correspondente.

Lab 7 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares

Objetivos:

Trataremos do problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares. Para isso, primeiramente vamos introduzir o conceito de modelo interno. Em seguida, estudaremos uma estrutura de controle que permite resolver o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação através de uma realimentação de estado. Por fim, aplicaremos as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

7.1. Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw\end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída com $m \geq p$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{q \times p}$ são matrizes **constantes**. Assuma que $r(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \geq 0$, é um dado **vetor de referência** escolhido, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

7.2. Modelo Interno

Vamos considerar que **cada componente** do vetor de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ e do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, é solução de uma **mesma** equação diferencial linear homogênea conhecida, ou seja,

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad t \geq 0$$

$$\underbrace{(D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)}_{=\beta(D)} w_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, q, \quad t \geq 0$$

para uma determinada condição inicial $r_i^{(k-1)}(0), \dots, r_i^{(1)}(0), r_i^{(0)}(0)$ e $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$, respectivamente, onde $D = d/dt$ é o operador diferencial, $k \geq 0$ é a ordem da equação diferencial, e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ são constantes reais. Portanto, a EDO

$$\beta(D)g(t) = 0$$

modela a dinâmica do vetor de referência $r(t)$ e do vetor de perturbação $w(t)$.

7.2. Modelo Interno

Ressaltamos que apesar do vetor de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, ser não-mensurável, estamos assumindo que conhecemos a equação diferencial $\beta(D)w_j(t) = 0$ que cada componente $w_j(t)$, $t \geq 0$, satisfaz. No entanto, a princípio as condições iniciais $w_j^{(k-1)}(0), \dots, w_j^{(1)}(0), w_j^{(0)}(0)$ são **desconhecidas**.

Obs: Podemos sempre escolher

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \boxed{\text{produto dos denominadores de } R_i(s) \text{ e } W_j(s)} \\ &= s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**

Exemplo 1: Suponha que $p = q = 1$ com $r(t) = A_1 t$ (rampa de coeficiente angular A_1) e $w(t) = B_1$ (degrau de amplitude B_1 desconhecida em princípio), $t \geq 0$. Então, $R(s) = A_1/s^2$, $W(s) = B_1/s$ e

$$\beta(s) = s^2$$

(e não $\beta(s) = s^2 \cdot s = s^3!$) pois

$$\beta(D)r(t) = D^2 r(t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\beta(D)w(t) = D^2 w(t) = 0, \quad t \geq 0$$

7.2. Modelo Interno

Exemplo 2: Suponha que $p = q = 2$ com

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2 t}_{\text{rampa}}), \quad t \geq 0$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_2 \sin(2t)}_{\text{senoide}}, \underbrace{B_3}_{\text{degrau}} + \underbrace{B_4 \sin(5t)}_{\text{senoide}}), \quad t \geq 0$$

onde $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ são constantes com B_1, B_2, B_3, B_4 desconhecidas em princípio. Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s^2$, $W_1(s) = B_1/s + 2B_2/(s^2 + 4)$, $W_2(s) = B_3/s + 5B_4/(s^2 + 25)$ e

$$\beta(s) = s^2(s^2 + 4)(s^2 + 25) = s^2(s^4 + 29s^2 + 100) = \boxed{s^6 + 29s^4 + 100s^2}$$

pois

$$\beta(D)g(t) = (D^6 + 29D^4 + 100D^2)g(t) = [D^2(D^2 + 4)(D^2 + 25)]g(t) = 0, \quad t \geq 0$$

para $g(t) = r_1(t), r_2(t), w_1(t), w_2(t), t \geq 0$.

7.2. Modelo Interno

Seja $g(t) = r_1(t), \dots, r_p(t), w_1(t), \dots, w_q(t)$, $t \geq 0$. É fácil ver que $g(t)$, $t \geq 0$, é solução da EDO

$$\beta(D)g(t) = (D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0)g(t) = 0$$

se e somente se $(g^{(0)}(t), g^{(1)}(t), \dots, g^{(k-1)}(t))' \in \mathbb{R}^k$, $t \geq 0$, é solução do sistema autônomo

$$\begin{bmatrix} \dot{g}^{(0)} \\ \dot{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{g}^{(k-2)} \\ \dot{g}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}}_{= M \in \mathbb{R}^{k \times k}} \begin{bmatrix} g^{(0)} \\ g^{(1)} \\ \vdots \\ g^{(k-2)} \\ g^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Logo, este sistema é a representação em espaço de estado da EDO acima.

7.2. Modelo Interno

Defina o sistema (p cópias bloco diagonal do sistema anterior)

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk})$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de estado, $y_m = x_m \in \mathbb{R}^{pk}$ é o vetor de saída, $e = r - y \in \mathbb{R}^p$ é a entrada deste sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

com $\beta(D) = D^k + \alpha_{k-1}D^{k-1} + \dots + \alpha_1D + \alpha_0$.

7.2. Modelo Interno

Denominamos o sistema acima de **modelo interno** (da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$). Pode-se verificar que o modelo interno é controlável, e que sua matriz de transferência é dada pela matriz bloco diagonal

$$G_m(s) = \begin{bmatrix} 1/\beta(s) & & & \\ & 1/\beta(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\beta(s) \end{bmatrix}$$

com $Y_m(s) = X_m(s) = G_m(s)E(s)$.

Obs: Considere que $\beta(D) = D$, ou seja, $\beta(s) = s$. Então $M = 0$ e $N = 1$, ou seja, $\dot{x}_m = e$ (A_m é a matriz nula e $B_m = I$). Logo:

$$x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + x_m(0).$$

7.3. Sistema Aumentado

Relembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew,$$

$$y = Cx + Fw$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m e$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m (r - Cx - Fw) = -B_m Cx + A_m x_m - B_m Fw + B_m r$$

Considere o vetor de estado **aumentado** $x_a = (x, x_m) \in \mathbb{R}^{n+pk}$.

Obtemos assim o **sistema aumentado**:

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r$$

$$y_a = y = \underbrace{[C \quad 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw$$

7.4. Estrutura de Controle

Considere a estrutura de controle em malha-fechada mostrada abaixo:

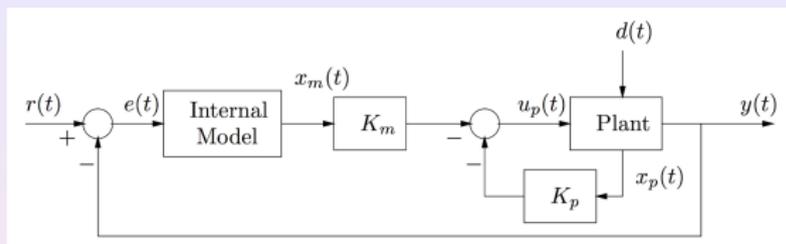


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

O próximo resultado apresenta condições para que esta estrutura de controle resolva o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Veremos que se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

7.4. Estrutura de Controle

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável, isto é, o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Então, a realimentação de estado

$$u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$$

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, soluciona o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0$$

para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, quando $r = w = 0$, temos que $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada.

7.4. Estrutura de Controle

Prova: Com base na Figura acima, no sistema aumentado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação

$u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ é dado por

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{= A_e = A_a - B_a K_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \end{bmatrix}}_{= B_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$

$$e = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 \end{bmatrix}}_{C_e = -C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{= x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{= D_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{= u_e}$$

Aqui, consideramos que $u_e(t) = (w(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{q+p}$ é o vetor de entrada e que $e(t) = r(t) - y(t) = C_e x_a(t) + D_e u_e(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída do sistema em malha-fechada.

7.4. Estrutura de Controle

Como o par (A_a, B_a) é controlável, podemos sempre encontrar uma matriz de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Portanto, $x_a = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada ($u_e = (w, r) = (0, 0)$). Em particular, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(A_e t) x_a(0) = 0$, para qualquer condição inicial $x_a(0) = (x(0), x_m(0)) \in \mathbb{R}^{n+pk}$.

Relembre que (resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo):

$$E(s) = \underbrace{C_e(sI - A_e)^{-1} x_a(0)}_{=E_0(s)} + \underbrace{G_e(s) U_e(s)}_{=E_{esn}(s)}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = C_e \exp(A_e t) x_a(0) = 0$$

para todo $x_a(0) \in \mathbb{R}^{n+pk}$. Assim, resta-nos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0$$

7.4. Estrutura de Controle

Temos que

$$G_e(s) = (G_{e_{ij}}(s)) = C_e(sI - A_e)^{-1}B_e + D_e, \text{ com } E(s) = G_e(s)U_e(s)$$

Pode-se mostrar que a função de transferência entre a j -ésima componente $u_{e_j}(t)$ da entrada $u_e(t)$ e a i -ésima componente $e_i(t)$ do erro $e(t)$ (assumindo que $u_{e_\ell}(t) = 0$ para $\ell \neq j$) é dada por

$$\frac{E_i(s)}{U_{e_j}(s)} = G_{e_{ij}}(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)}$$

onde $\eta_{ij}(s)$ é um polinômio em s . Portanto,

$$E_i(s) = \frac{\beta(s)\eta_{ij}(s)}{\det(sI - A_e)} U_{e_j}(s)$$

Concluimos então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{esn}(t) = \mathcal{G}_e(t) * u_e(t) = 0$$

pois algum fator do polinômio $\beta(s)$ cancelará os polos de $U_{e_j}(s)$ (relembre que os polos da matriz $A_e = A_a - B_a K_a$ não coincidem com nenhuma raiz de $\beta(s)$, por hipótese). Isto termina a prova.

7.4. Estrutura de Controle

Obs 1: A estrutura de controle da Figura acima é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta) e $K_a = [K_m \quad K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_e = A_a - B_a K_a$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s)$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 4.1 do Lab 4), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, K_a .

7.4. Estrutura de Controle

Obs 2: Para determinarmos uma matriz de ganho $K_a = [K_m \ K]$ que soluciona o problema de controle em questão, necessitamos apenas montar as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado e verificar se o par (A_a, B_a) é controlável. Caso o par (A_a, B_a) seja controlável, então basta determinarmos $K_a = [K_m \ K]$ de maneira que os polos da matriz $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE e não coincidam com as raízes de $\beta(s)$. Logo, o sistema aumentado é utilizado apenas para fins de cálculo de $K_a = [K_m \ K]$! Para controlarmos o sistema em malha-fechada, basta implementarmos o modelo interno e aplicarmos a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta.

7.4. Estrutura de Controle

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação:

- 1 A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**
- 2 Considere o **modelo interno**:

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$
$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk})$$

onde

7.4. Estrutura de Controle

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

- 3 Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável. Em caso afirmativo, determine uma matriz de ganho

$K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$, com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$.

- 4 Implemente o modelo interno e aplique a realimentação $u = -Kx - K_m x_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início desta seção.

7.5. Exemplo

Considere o sistema massa-mola ilustrado abaixo

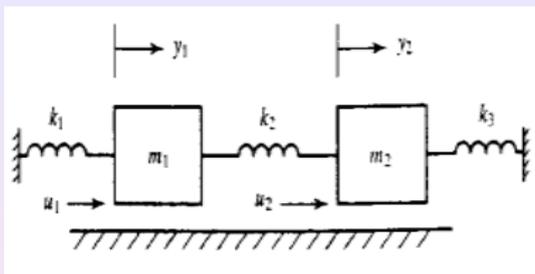


Figura: Sistema massa-mola.

o qual consiste de 2 blocos de massas m_1 e m_2 conectados por 3 molas com constantes de mola k_1, k_2, k_3 . As variáveis de controle são as forças u_1, u_2 aplicadas em cada bloco, e as variáveis de saída são os deslocamentos y_1 e y_2 de cada bloco. Por simplicidade, assumimos que não há atrito entre os blocos e a superfície.

Com base na 2ª Lei de Newton, temos que

$$m_1 \ddot{y}_1 = u_1 - k_1 y_1 - k_2 (y_1 - y_2)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = u_2 + k_2 y_1 - (k_1 + k_2) y_2$$

7.5. Exemplo

Vamos agora representar o sistema em modelo de estado.

Definindo o vetor de controle $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, o vetor de saída $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, e o vetor de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ com

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \dot{y}_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = \dot{y}_2$$

obtemos que

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{=u}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{=x}$$

7.5. Exemplo

Considere que há uma perturbação $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ na **entrada** do sistema, ou seja, $E = B$ com

$$\dot{x} = Ax + Bu + \underbrace{E}_{=B} w$$

$$y = Cx$$

e suponha que

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\underbrace{A_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{A_2 + A_3 \sin(5t)}_{\text{senoide}}), \quad t \geq 0$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) = (\underbrace{B_1}_{\text{degrau}}, \underbrace{B_2}_{\text{degrau}}), \quad t \geq 0$$

onde A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 são constantes com B_1, B_2 desconhecidas.

Assim, $R_1(s) = A_1/s$, $R_2(s) = A_2/s + 5A_3/(s^2 + 25)$,

$W_1(s) = B_1/s$, $W_2(s) = B_2/s$, e

$$\boxed{\beta(s) = s(s^2 + 25) = s^3 + 25s} \quad (k = 3)$$

7.5. Exemplo

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o modelo interno é dado por

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}}_{=A_m} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B_m} e$$

$$y_m = x_m \quad (C_m = I)$$

Logo, as matrizes A_a e B_a do sistema aumentado são, respectivamente,

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}_{10 \times 2}$$

7.6. Procedimentos

1. Considere a estrutura de controle da Figura da Seção 7.4 referente ao problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação. Para o sistema massa-mola acima, verifique se o sistema aumentado é controlável. Em caso afirmativo, encontre uma matriz de ganho $K_a = [K_m \quad K]$ de modo a posicionar os polos de malha-fechada em:

$$-2, -2, -10, -10, -11, -11, -12, -12, -13 \pm i$$

($n + pk = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ polos)

2. Assuma que as referências são $r_1(t) = 3$ (degrau) e $r_2(t) = 2 + 0.5 \sin(5t)$ para $t \geq 0$, e que as perturbações são $w_1(t) = 20$ e $w_2(t) = 30$, incidindo a partir de $t \geq 6$. Implemente a realimentação de estado $u = -K_a x_a = -Kx - K_m x_m$ no sistema massa-mola em malha-fechada supondo que $x(0) = 0$, e verifique se o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$ foi de fato resolvido. Analise os resultados de simulação obtidos (referência, perturbação, saída, erro, controle).

Lab 8 – Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação para Sistemas Lineares com Observador de Estado

Objetivos:

Continuaremos a tratar o problema de rastreamento de referência e rejeição de perturbação para sistemas lineares visto no Lab 7, mas agora considerando que os estados da planta não podem ser realimentados devido a restrições práticas. Para isso, utilizaremos um observador de estado. Aplicaremos então as técnicas de controle vistas num sistema massa-mola e analisaremos os resultados de simulação obtidos.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Relembre a estrutura de controle analisada na Seção 7.4 do Lab 7 para o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação:

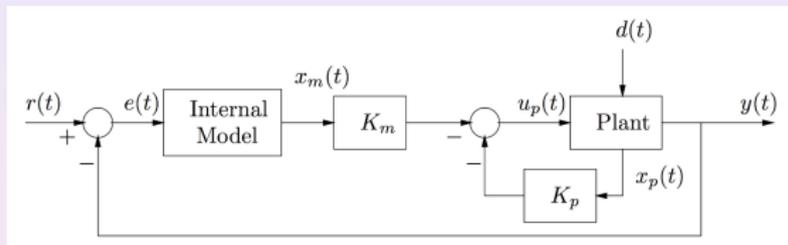


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

No entanto, agora consideraremos que o vetor de estado $x(t)$ da planta não está disponível, ou seja, não pode ser realimentado devido a restrições práticas.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Mostraremos na sequência que a estrutura de controle acima resolve o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação se realimentarmos uma estimativa $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, ou seja, se utilizarmos uma realimentação da forma $u = -K\hat{x} - K_mx_m$.

Primeiramente, lembre que a **planta** é modelada por (n estados, m entradas, p saídas e q perturbações)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew, \\ y &= Cx + Fw\end{aligned}$$

e que o **modelo interno** é dado por

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_me$$

onde $e = r - y = r - (Cx + Fw)$ é o erro de rastreamento. Logo,

$$\dot{x}_m = A_mx_m + B_m(r - Cx - Fw) = -B_mCx + A_mx_m - B_mFw + B_mr$$

Com isso, lembre que o **sistema aumentado** é dado por:

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u + \begin{bmatrix} E \\ -B_m F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} r$$

$$y_a = y = \underbrace{[C \ 0]}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \end{bmatrix}}_{=x_a} + Fw$$

Agora, considere o **observador de estado**:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Seja $\xi = x - \hat{x}$ o erro de estimação. Note que, na presença de uma perturbação $w \neq 0$ sobre a planta, não temos que $\dot{\xi} = (A - LC)\xi$, mas sim que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + Ew - ((A - LC)\hat{x} + Bu + Ly) \\ &= Ax + Bu + Ew - (A - LC)\hat{x} - Bu - L \underbrace{(Cx + Fw)}_{=y} \\ &= (A - LC)\xi + (E - LF)w \end{aligned}$$

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

No entanto, isto não causa nenhuma dificuldade técnica adicional, pois o próximo resultado estabelece condições para que a realimentação (do estado estimado \hat{x} e do estado do modelo interno x_m)

$$u = -K\hat{x} - K_mx_m$$

resolva o problema de controle através do projeto independente das matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação) e L (observador). Veremos que novamente se trata de um **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Polos** (veja a Seção 2.4 da Teoria).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Teorema: Suponha que o sistema aumentado é controlável (i.e. o par (A_a, B_a) é controlável) e que a planta é observável (i.e. o par (A, C) é observável). Escolha as matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Então, o observador de estado

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

e a realimentação

$$u = -K\hat{x} - K_m x_m$$

onde $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, solucionam o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição de perturbação $w(t)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = r(t) - y(t) = 0$$

para qualquer condição inicial $\tilde{x}(0) = (x(0), x_m(0), \hat{x}(0)) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ do sistema em malha-fechada. Além disso, quando $r = w = 0$, temos que $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Prova: Seja $\tilde{x} = (x_a, \hat{x}) = (x, x_m, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n+pk}$ o vetor de estado do sistema em malha-fechada com o observador. Com base no sistema aumentado, no observador de estado e no fato de que $e = r - y = r - y_a$, temos que o modelo de estado do sistema em malha-fechada com a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK_m & -BK \\ -B_mC & A_m & 0 \\ LC & -BK_m & A - LC - BK \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_mF & B_m \\ E - LF & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{=u_e} \\ e &= \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\tilde{C}_e} \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -F & I \end{bmatrix}}_{=\tilde{D}_e} \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Agora, considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_m \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}$$

Note que $T^{-1} = T$ e $\tilde{x} = T^{-1}z = Tz$. Nas novas coordenadas $z = T\tilde{x}$, o sistema em malha-fechada é dado por:

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_m \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\tilde{x}} = T(\tilde{A}_e\tilde{x} + \tilde{B}_e u_e) = T\tilde{A}_e\tilde{x} + T\tilde{B}_e u_e = T\tilde{A}_e T^{-1}z + T\tilde{B}_e u_e \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK_m & -BK \\ -B_m C & A_m & 0 \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=T\tilde{A}_e T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_m \\ \xi \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B_m F & B_m \\ LF & 0 \end{bmatrix}}_{=T\tilde{B}_e} u_e, \end{aligned}$$

$$e = \tilde{C}_e\tilde{x} + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e T^{-1}z + \tilde{D}_e u_e = \tilde{C}_e z + \tilde{D}_e u_e$$

com

$$A_a - B_a K_a = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_m \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$$

Concluimos então que os polos da matriz \tilde{A}_e é igual à união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$ (**princípio da separação**).

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Por hipótese, (A_a, B_a) é controlável e (A, C) é observável. Logo, podemos encontrar matrizes de ganho $K_a \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ de modo a posicionar arbitrariamente os polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE, mas de forma que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$. Portanto, $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada ($u_e = (w, r) = (0, 0)$), e o restante da prova é análogo ao Teorema da Seção 7.4 do Lab 7. Isto conclui a demonstração.

Obs: A estrutura de controle com o observador de estado é **robusta**. De fato, a partir da demonstração acima, percebemos que os resultados do teorema permanecem válidos para qualquer perturbação nas matrizes A, B, C (planta), L (observador) e $K_a = [K_m \quad K]$ (realimentação) que mantenha polos de $A_a - B_a K_a$ e de $A - LC$ no SPE e sem coincidirem com as raízes de $\beta(s)$. Pelo resultado de **continuidade dos autovalores** de uma matriz (veja a Seção 4.1 do Lab 4), asseguramos que isto será atendido para pequenas perturbações em A, B, C, L, K_a .

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

Algoritmo para Solucionar o Problema de Rastreamento de Referência com Rejeição de Perturbação com Observador de Estado:

- 1 A partir dos vetores de referência $r(t) = (r_1(t), \dots, r_p(t))$ e de perturbação $w(t) = (w_1(t), \dots, w_q(t))$, $t \geq 0$, determine $\beta(s) =$ produto dos denominadores de $R_i(s)$ e $W_j(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, mas tomando o cuidado para se **eliminar as redundâncias!**
- 2 Considere o **modelo interno**:

$$\dot{x}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{= A_m \in \mathbb{R}^{pk \times pk}} x_m + \underbrace{\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}}_{= B_m \in \mathbb{R}^{pk \times p}} e$$
$$y_m = x_m \quad (C_m = I \in \mathbb{R}^{pk \times pk})$$

onde

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

- 3 Considere as matrizes A_a e B_a do **sistema aumentado**:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_m C & A_m \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

e verifique se o par (A_a, B_a) é controlável e o par (A, C) é observável. Em caso afirmativo, determine matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+pk)}$ (realimentação), com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times pk}$, e $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (observador) de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ e $A - LC$ estejam no SPE, mas que não coincidam com nenhuma raiz de $\beta(s)$.

8.1. Estrutura de Controle com Observador de Estado

- 4 Implemente o modelo interno e o observador de estado

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

e aplique a realimentação $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ na planta, conforme a estrutura de controle ilustrada na Figura do início da Seção 7.4 do Lab 7. Assim, substituindo-se $u = -K\hat{x} - K_mx_m$ no observador acima, concluímos que o controlador resultante é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK)\hat{x} + Ly - BK_mx_m \\ u &= -K\hat{x} - K_mx_m\end{aligned}$$

Isto resolve o problema de rastreamento da referência $r(t)$ com rejeição da perturbação $w(t)$. Ressaltamos que os polos de malha-fechada será a união (com repetição) dos polos de $A_a - B_a K_a$ com os polos de $A - LC$, ou seja, as matrizes de ganho $K_a = [K \quad K_m]$ (realimentação) e L (observador) são projetadas independentemente (**princípio da separação**).

8.2. Procedimentos

1. Considere novamente o sistema massa-mola da Seção 7.5 do Lab 7. Refaça os procedimentos da Seção 7.6 do Lab 7, mas agora considerando um observador de estado. Determine a matriz de ganho L de modo que os polos do observador (i.e. da matriz $A - LC$) sejam posicionados em: $-10, -10, -12, -12$.
2. Modifique as referências $r_1(t)$ e $r_2(t)$ com o objetivo de se diminuir o sobressinal na saída e a amplitude dos sinais de controle em relação ao item anterior. **Dica:** escolha, por exemplo, $r_1(t) = 3(1 - e^{-t})$, $r_2(t) = 2(1 - e^{-t}) + 0.5 \sin(5t)$, e reproje o modelo interno e o controlador para que os polos referentes à realimentação (i.e. da matriz $A_a - B_a K_a$) sejam posicionados em: $-4, -4, -10, -10, -12, -12, -14, -14, -16 \pm i, -18 \pm i/2$.

Lab 9 – Controle Linear de Sistemas Não-Lineares: Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Objetivos:

Vamos abordar o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares. Utilizando a mesma estrutura de controle linear vista no Lab 7, recairemos num problema de estabilização de um ponto de equilíbrio via sistema linearizado. Veremos que o ponto de equilíbrio a ser estabilizado depende das amplitudes da referência e da perturbação, e que o controlador linear projetado não assegura estabilidade assintótica global.

9.1. Definição do Problema de Controle

Considere uma planta modelada por (n estados, m entradas, $p = m$ saídas e q perturbações)

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

onde $x \in D$ é o vetor de estado, $D \subset \mathbb{R}^n$ é **aberto**, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída com $p = m$, $w \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação **não-mensurável**, e

$f: D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: D \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^1 .

Assuma que tanto o **vetor de referência** $r(t) = \bar{r} \in \mathbb{R}^m$ quanto o **vetor de perturbação** $w(t) = \bar{w} \in \mathbb{R}^q$, $t \geq 0$, são do tipo degrau, e considere o **erro de rastreamento**

$$e(t) = r(t) - y(t) = \bar{r} - y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0.$$

O problema de **rastreamento de referência e rejeição de perturbação** é encontrar um controlador tal que em **malha-fechada** o vetor de saída $y(t)$ da planta rastreie assintoticamente o vetor de referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

9.1. Definição do Problema de Controle

O rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ será atingido através da estabilização de um ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ do sistema em que a saída de equilíbrio $y^e = h(x^e, \bar{w})$ coincide com \bar{r} . Assim, o par $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ deve satisfazer:

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

$$\bar{r} = y^e = h(x^e, \bar{w})$$

Desse modo, percebemos que os pares $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ que satisfazem as equações acima dependem das amplitudes \bar{r} e \bar{w} , ou seja, $x^e = x^e(\bar{r}, \bar{w}) \in D$ e $u^e = u^e(\bar{r}, \bar{w}) \in \mathbb{R}^m$ com

$$0 = f(x^e(\bar{r}, \bar{w}), u^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x^e(\bar{r}, \bar{w}), \bar{w})$$

9.2. Estrutura de Controle

Para resolvermos o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau para sistemas não-lineares, vamos considerar a mesma estrutura de controle em malha-fechada do Lab 7:

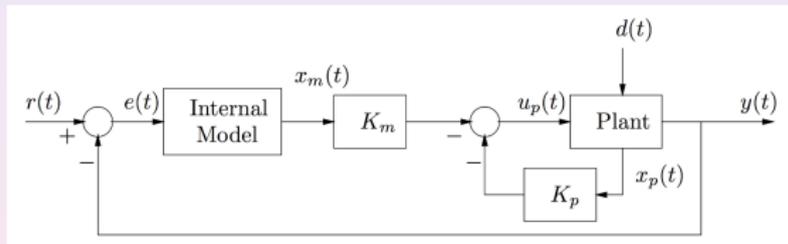


Figura: Estrutura de controle em malha-fechada com a realimentação de estado $u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t)$, onde $d(t) = w(t)$ é a perturbação externa, $u_p(t) = u(t)$, $x_p(t) = x(t)$ e $K_p = K(t)$. O modelo interno pode ser implementado com amp-ops considerando $x_m(0) = 0$ (condição inicial nula).

9.2. Estrutura de Controle

Como a referência $r(t)$ e o perturbação $w(t)$ são do tipo degrau, temos que $\beta(s) = s$. Assim, $A_m = 0$, $B_m = I$, e o modelo interno é dado por (veja o Lab 7):

$$\dot{x}_m = e$$

ou seja, para $x_m(0) = 0$,

$$x_m(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

Fixe $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$, e suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x^e, \bar{w})$$

Obs: Relembre que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

significa que (x^e, u^e) é um ponto de equilíbrio da planta quando $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$, e que

$$0 = \bar{r} - h(x^e, \bar{w})$$

significa que $y^e = h(x^e, \bar{w}) = \bar{r}$

Agora, considere o **sistema aumentado** com vetor de estado $x_a = (x, x_m) \in D \times \mathbb{R}^m$ (relembre que $e = r - y$ e $y = h(x, w)$):

$$\dot{x} = f(x, u, \bar{w})$$

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

$$y = h(x, \bar{w})$$

Logo, $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema aumentado, para **qualquer** $x_m^e \in \mathbb{R}^m$.

9.2. Estrutura de Controle

Para resolvermos o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$ do tipo degrau, basta encontrarmos uma realimentação de estado $u = \alpha(x, x_m)$ para o sistema aumentado, onde $\alpha: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 e $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é tal que $\alpha(x^e, x_m^e) = u^e$, de modo que $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ seja um um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável do sistema aumentado em malha-fechada**

$$\dot{x} = f(x, u, \bar{w})|_{u=\alpha(x, x_m)} = f(x, \alpha(x, x_m), \bar{w})$$

$$\dot{x}_m = \bar{r} - h(x, \bar{w})$$

$$y = h(x, \bar{w})$$

Note que $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é de fato um ponto de equilíbrio do sistema aumentado em malha-fechada, pois

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w}) = f(x^e, \alpha(x^e, x_m^e), \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x^e, \bar{w})$$

Além disso, perceba que se $(x^e, x_m^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ for assintoticamente estável, então asseguramos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), \bar{w}) = h(x^e, \bar{w}) = r$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração do ponto de equilíbrio (x^e, x_m^e) , resolvendo assim **localmente** em torno de (x^e, x_m^e) o problema de rastreamento da referência $r(t) = \bar{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \bar{w}$.

9.2. Estrutura de Controle

O sistema aumentado linearizado no ponto de equilíbrio $(x^e, x_m^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, onde $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ é **arbitrário**, tem como vetor de estado $x_{a\delta} = (x_\delta, x_{m\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e é dado por (note que o mesmo coincide com o sistema aumentado do Lab 7 com $A_m = 0$, $B_m = I$):

$$\dot{x}_{a\delta} = \begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{x}_{m\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B_a} u_\delta + \begin{bmatrix} E \\ -F \end{bmatrix} w_\delta$$

$$y_{a\delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_\delta \\ x_{m\delta} \end{bmatrix}}_{=x_{a\delta}} + F w_\delta$$

onde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e, \bar{w}), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e, \bar{w}), \quad E = \frac{\partial f}{\partial w}(x^e, u^e, \bar{w})$$
$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e, \bar{w}), \quad F = \frac{\partial h}{\partial w}(x^e, \bar{w})$$

Obs: Perceba que o sistema linearizado da planta

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

no ponto de equilíbrio $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é dado por

$$x_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta$$

$$y_\delta = Cx_\delta$$

considerando que $w(t) = \bar{w}$, $t \geq 0$. Assim, as matrizes A_a e B_a acima do sistema aumentado linearizado são determinadas a partir da linearização da planta.

9.2. Estrutura de Controle

O próximo resultado apresenta condições para que a estrutura de controle mostrada na Figura acima resolva o problema de rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau através da estabilização da origem $x_{a\delta} = (x_\delta, x_{m\delta}) = (0, 0)$ do sistema aumentado linearizado por uma realimentação linear de estado da forma $u_\delta = -K_a x_{a\delta} = -K x_\delta - K_m x_{m\delta}$. **A ideia central é: $u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m$ assegura que a linearização do sistema aumentado em malha-fechada coincide com o sistema aumentado linearizado em malha-fechada.**

9.2. Estrutura de Controle

Teorema: Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u, w)$$

$$y = h(x, w)$$

e sejam $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{w} \in \mathbb{R}^q$ as amplitudes **nominais** da referência $r(t)$ e da perturbação $w(t)$ do tipo degrau, respectivamente.

Suponha que $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$ é tal que

$$0 = f(x^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x^e, \bar{w})$$

Considere o sistema aumentado linearizado associado e suponha que o par (A_a, B_a) é controlável. Escolha uma matriz de ganho $K_a = [K \quad K_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de forma que todos os polos de $A_a - B_a K_a$ estejam no SPE.

9.2. Estrutura de Controle

Teorema (continuação): Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_m x_m$$

é tal que:

- 1 A matriz de ganho $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é invertível
- 2 Seja $x_m^e \in \mathbb{R}^m$ tal que $u^e = \alpha(x^e, x_m^e) = -Kx^e - K_m x_m^e$, i.e. $x_m^e = -(K_m)^{-1}(u^e + Kx^e)$. Então, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 > 0$ em que, para qualquer $(\tilde{r}, \tilde{w}) \in B_{\delta_3}(\bar{r}) \times B_{\delta_4}(\bar{w})$ (i.e. para pequenas variações da amplitude de $r(t) = \tilde{r}$ e $w(t) = \tilde{w}$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), existe um **único** ponto de equilíbrio $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) \in B_{\delta_1}(x^e) \times B_{\delta_2}(x_m^e) \subset D \times \mathbb{R}^m$ assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = f(x, u, \tilde{w})|_{u=\alpha(x, x_m)} = f(x, -Kx - K_m x_m, \tilde{w})$$

$$y = h(x, \tilde{w})$$

e satisfazendo

$$y^e = h(\tilde{x}^e, \tilde{r}) = \tilde{r}$$

quando $r(t) = \tilde{r}$ e $w(t) = \tilde{w}$, $t \geq 0$.

9.2. Estrutura de Controle

Teorema (continuação): Em particular, para tal ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e) = (\tilde{x}^e(\tilde{r}, \tilde{w}), \tilde{x}_m^e(\tilde{r}, \tilde{w}))$ correspondente a $(\tilde{r}, \tilde{w}) \in B_{\delta_3}(\bar{r}) \times B_{\delta_4}(\bar{w})$ (pequenas variações da amplitude de $r(t) = \tilde{r}$ e $w(t) = \tilde{w}$ em relação aos valores nominais \bar{r} e \bar{w} , respectivamente), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \tilde{r}$$

para toda condição inicial $(x(0), x_m(0))$ pertencente à região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$, resolvendo assim **localmente** em torno de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ o problema de rastreamento da referência $r(t) = \tilde{r}$ com rejeição da perturbação $w(t) = \tilde{w}$ do tipo degrau.

Obs: Note que

$$u(t) = -Kx(t) - K_m x_m(t) = -Kx - \underbrace{K_m \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{termo integral!}}, \quad t \geq 0$$

Além disso, ressaltamos que tal controlador linear não assegura que a região de atração de $(\tilde{x}^e, \tilde{x}_m^e)$ seja igual a $D \times \mathbb{R}^m$.

9.3. Procedimentos

1. Considere o pêndulo simples controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

onde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o controle (torque) e $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$ é a saída. Já vimos que os pontos de equilíbrio são $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com

$x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$ e $u^e = mg\ell \sin(\delta)$, onde $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$ pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que $m = k = 0.1$, $g = 10$, $\ell = 1$. Assim, $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$. Assuma que $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$. Verifique por simulação que: (a) $(\delta, 0)$ não é ponto de equilíbrio para $u = 0$; e (b) ao aplicarmos a entrada constante $u(t) = u^e = \sin(\delta)$, $t \geq 0$, temos que $x^e = (\delta, 0)$ é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$ são $-0.5 \pm j2.6$), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo, $x(0) = (3.12, 0)$ não pertence à região de atração).

9.3. Procedimentos

2. Considere que há uma perturbação $w(t)$ do tipo degrau **na entrada** do pêndulo, ou seja,

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u, w)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} u + \frac{1}{ml^2} w = f_2(x_1, x_2, u, w)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2, w)$$

Assuma que o valor nominal de $w(t)$ é $\bar{w} = 0$, e que o valor nominal para a referência $r(t)$ do tipo degrau é $\bar{r} = x_1^e = \delta$. Assim, $y^e = h(x_1^e, x_2^e, \bar{w}) = x_1^e = \delta$, e $(x_1^e, x_2^e, u^e) = (\delta, 0, \sin(\delta))$ satisfaz

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e, u^e, \bar{w})$$

$$0 = \bar{r} - h(x_1^e, x_2^e, \bar{w})$$

9.3. Procedimentos

Determine as matrizes de ganho $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e $K_m \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$ de modo que a realimentação linear de estado

$$u = \alpha(x, x_m) = -Kx - K_mx_m$$

assegure que a saída $y(t) = \theta(t)$ do pêndulo rastreie assintoticamente referências $r(t) = \tilde{r}$ com rejeição de perturbações $w(t) = \tilde{w}$ do tipo degrau, ao menos quando $\tilde{r} \cong \bar{r} = 0$ e $\tilde{w} \cong \bar{w} = 0$ (pequenas amplitudes da referência e da perturbação em relação aos valores nominais). Simule e analise os resultados obtidos (referência, perturbação, erro, controle, saída, estados), considerando: (a) diferentes conjuntos de polos para $A_a - B_a K_a$ (polos rápidos e lentos); (b) grandes e pequenas amplitudes de $r(t)$ e $w(t)$; e (c) diversas condições iniciais.

Lab 10 – Controlador Antiwindup e Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Objetivos: Vamos inicialmente lembrar o efeito windup e o controlador antiwindup. Em seguida, veremos como anular o efeito de certas não-linearidades estáticas através de um compensador não-linear. Por fim, projetaremos um controlador PI com antiwindup e um compensador de não-linearidade estática para controlar o modelo de um motor CC com saturação no atuador e zona morta.

10.1. Controlador Antiwindup

Em todo sistema de controle, o atuador apresenta saturação devido a limitações físicas. Por exemplo, uma válvula satura quando está completamente aberta ou fechada, e a saída de um amp-op é limitada por valores máximos e mínimos de tensão.

Considere um sistema realimentado através de um controlador PI e com saturação no atuador mostrado abaixo:

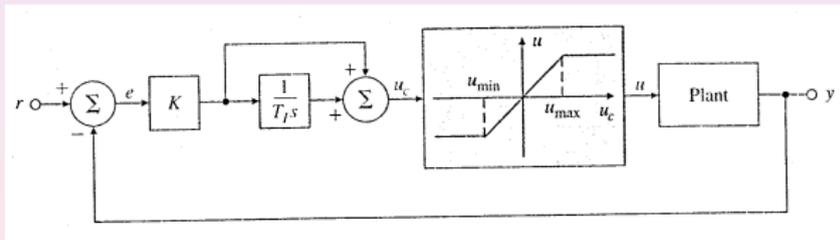


Figura: Sistema realimentado com saturação no atuador.

10.1. Controlador Antiwindup

Suponha que uma referência do tipo degrau faz com que o sinal do atuador sature em $u(t) = u_{max}$. Assim, o integrador continuará a integrar (**windup**) o erro $e(t)$, e o sinal de controle $u_c(t)$ continuará a crescer. Com isso, a entrada $u(t)$ da planta ficará trancada em seu valor máximo $u(t) = u_{max}$, ou seja, **a planta estará efetivamente em malha-aberta**. Desse modo, o erro permanecerá grande até que a saída $y(t)$ da planta exceda o valor da referência (i.e. sobressinal), quando então o erro $e(t)$ muda de sinal e o efeito acumulativo do integrador é revertido (**antiwindup**). O aumento no sinal de controle $u_c(t)$ em nada ajuda, pois a entrada da planta está trancada em $u(t) = u_{max}$. No entanto, a amplitude de $u_c(t)$ pode se tornar relativamente grande se a saturação do atuador durar bastante tempo. Concluimos, assim, que será preciso um erro negativo (i.e. um sobressinal) considerável e uma resposta transitória relativamente deteriorada para produzir o erro **antiwindup** necessário para trazer o sinal de controle $u_c(t)$ de volta à faixa linear do atuador (onde não há saturação).

10.1. Controlador Antiwindup

A solução para esse problema é um **controlador antiwindup**, o qual “desliga” a ação integral quando o atuador satura. Duas configurações **antiwindup** equivalentes são mostradas abaixo para um controlador PI: a de cima é para fins didáticos, pois é mais simples de entender; e a de baixo é para fins práticos, pois é mais simples de implementar.

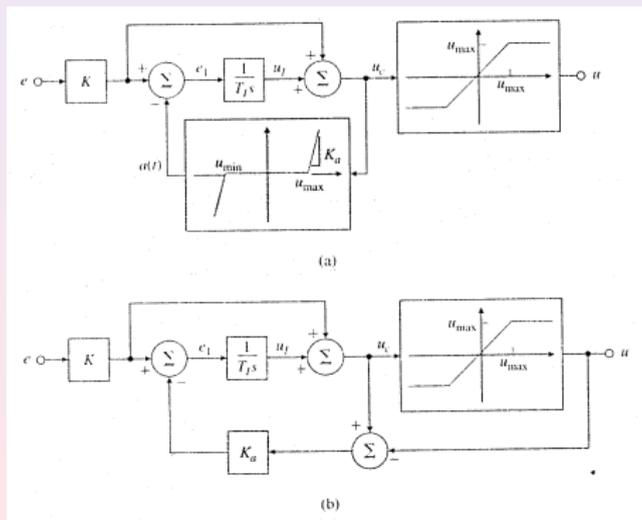


Figura: Controlador PI com **antiwindup**: (a) configuração didática; (b) configuração prática (o Bloco Saturação faz parte do Controlador!)

10.1. Controlador Antiwindup

Nessas configurações, enquanto **não há saturação** do atuador, o **controlador antiwindup** funciona **exatamente** como o **PI original**. Mas, assim que o **atuador satura**, a malha de realimentação em torno do integrador se torna ativa, agindo para que a entrada $e_1(t)$ do integrador seja relativamente pequena. Durante tal intervalo de tempo, o integrador essencialmente se torna um **compensador atraso de fase (estável) de primeira ordem**. Para vermos isso, note que a configuração prática apresenta acima é equivalente ao seguinte diagrama de blocos:

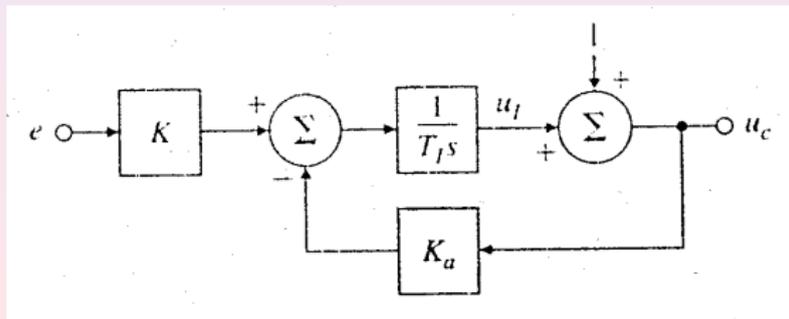


Figura: Controlador PI com **antiwindup**: diagrama de blocos equivalente.

10.1. Controlador Antiwindup

A partir desse diagrama de blocos equivalente, é fácil ver que

$$U_c(s) = \underbrace{\frac{Ks + 1/T_I}{s + K_a/T_I}}_{\text{atraso de fase}} E(s) + \frac{K_a/T_I}{s + K_a/T_I} \frac{u_{max}}{s}$$

Ressaltamos que esta equação só é válida enquanto o atuador permanecer saturado em $u(t) = u_{max}$. O **ganho antiwindup** $K_a > 0$ deve ser grande o suficiente para que o **controlador antiwindup** mantenha a entrada $e_1(t)$ do integrador em valores relativamente pequenos sob todas as condições do erro. Na prática, é comum tomar $K_a = 1/T_I$ (ao menos como uma primeira escolha, procurando-se então refinar o valor de K_a por tentativa e erro através de simulações).

10.1. Controlador Antiwindup

O efeito do controlador **antiwindup** é reduzir tanto o sobressinal quanto o esforço de controle num sistema realimentado. A implementação da configuração **antiwindup** é uma necessidade prática em aplicações com ação integral implementada no controlador. A não utilização desta técnica pode levar a uma deterioração significativa no desempenho do sistema em malha-fechada e, inclusive, à instabilidade (a saturação é um elemento não-linear)! Relembre que, quando há **saturação**, a **planta fica efetivamente em malha-aberta** com uma entrada constante $u(t) = u_{max}$, e a **ação integral** do controlador **se comporta como um sistema (BIBO) instável em malha-aberta** tendo o erro $e(t)$ como entrada. O propósito do **controlador antiwindup** é ativar uma malha de realimentação em torno do integrador quando há saturação, de modo que o controlador resultante seja **estável** e o efeito acumulativo do integrador seja revertido (**antiwindup**) mais rapidamente.

10.2. Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Uma **não-linearidade estática** é um sistema que é não-linear e estático. Relembre que um sistema é **estático (sem memória)** quando a saída $z(t)$ do sistema no instante de tempo t só depende na entrada $x(t)$ do sistema no mesmo instante t , ou seja, a descrição matemática da relação entrada-saída do sistema é dada algebricamente por (não há estado!)

$$z(t) = f(x(t))$$

Não-linearidades estáticas estão sempre presentes na prática como, por exemplo, na saturação em atuadores, zona morta em motores, folgas (backlash) em sistemas mecânicos, relé, histerese, etc. Estas e outras não-linearidade estáticas serão vistas em mais detalhes no Lab 11.

10.2. Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Quando a função $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ acima é **sobrejetiva**, ou seja, para qualquer $z \in B$ existe $x \in A$ com $z = f(x)$, então podemos anular o efeito da não-linearidade estática através um **compensador não-linear** que implementa **uma** função inversa **pela direita** $f^{-1}: B \rightarrow A$ de f , pois neste caso teremos

$$(f \circ f^{-1})(z) = f(f^{-1}(z)) = f(x) = z, \quad \text{para todo } z \in B$$

Tal compensador é denominado de **compensador de não-linearidade estática**. Isto é ilustrado abaixo:



Figura: Compensação da não-linearidade estática $z = f(x)$ com $f: A \rightarrow B$ sobrejetiva, onde: Planta = Não-Linearidade Estática + Processo, $u_c(t)$ é o sinal de controle, $u(t)$ é o sinal do atuador e $u_e(t)$ é a **entrada efetiva** no processo. Aqui, assumimos que $u_c(t) \in B$, para todo $t \geq 0$. **Importante:** Quando consideramos saturação no atuador, então: Planta = Bloco Saturação + Não-Linearidade Estática + Processo.

10.2. Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Ressaltamos que, quando $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva, poderão existir **diversas** inversas pela direita de f , ou seja, $f^{-1}: B \rightarrow A$ não é necessariamente única. No entanto, se f for **bijetiva** (sobrejetiva e injetiva), então f^{-1} é **única**.

Exemplo 1: Considere a não-linearidade estática

$$z = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

onde z é a vazão de saída e $x \geq 0$ é a abertura de uma válvula. Note que $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é bijetiva. Logo, a função inversa pela direita de f é a função $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$x = f^{-1}(z) = z^2, \quad z \geq 0$$

e o efeito da não-linearidade estática da válvula por ser anulada por um compensador. Verificação: $f(f^{-1}(z)) = f(z^2) = \sqrt{z^2} = z$, para todo $z \geq 0$.

10.2. Compensação de Não-Linearidades Estáticas

Exemplo 2: A zona morta de um motor é uma não-linearidade estática que é descrita pela função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$z = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq \delta \\ -\delta + x, & \text{se } x > \delta \\ \delta - x, & \text{se } x < \delta \end{cases}$$

Note que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Logo, o efeito da zona morta pode ser anulado por um compensador de não-linearidade estática. Neste caso, **uma** inversa pela direita de f é a função $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$x = f^{-1}(z) = \begin{cases} \delta + z, & \text{se } z \geq 0 \\ -\delta + z, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Verificação: $f(f^{-1}(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

1. Seja

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

o modelo linearizado de um tanque num certo ponto de equilíbrio. Assuma que foi projetado um controlador PI com $K = 2$ e $1/T_I = 4$. Suponha que a saturação no atuador é de ± 1 . Para uma referência do tipo degrau, simule o sistema em malha-fechada com e sem o controlador antiwindup, comparando e analisando os resultados obtidos. Escolha $r(t) = 0.1, 0.45, 1, 2$, e $K_a = 1, 4, 10, 20$.

2. Considere que um motor CC é modelado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.8}{s + 1}$$

onde $u(t)$ é a tensão de entrada no motor e $y(t)$ é a velocidade angular do eixo do motor. Assuma que o motor apresenta uma zona morta de $\delta = 0.5V$. Determine uma compensação para anular o efeito de tal não-linearidade estática. Simule o motor em malha-aberta com e sem o compensador da zona morta, analisando os resultados obtidos. Escolha $u(t) = 0.1$ e $u(t) = 1$.

10.3. Procedimentos

3. No item anterior, projete um PI para que em malha-fechada sejam atendidos os seguintes requisitos: (i) rastreamento de referência com rejeição de perturbação do tipo degrau; (ii) sem sobressinal; e (iii) $t_{MF}(5\%) = t_{MA}(5\%)/2$. Suponha que a saturação no atuador é de $\pm 10V$. Simule o motor em malha-fechada sem o controlador antiwindup e sem a compensação da zona morta, considerando que $r(t) = 0.1, 1, 5, 10$. Analise os resultados obtidos. Note que, na ausência da compensação de zona morta, a saída em malha-fechada apresenta um atraso no tempo quando $r(t) = 0.1$. Explique tal comportamento.

Agora, implemente o controlador antiwindup e a compensação da zona morta, analisando e comparando os resultados obtidos.

Escolha inicialmente $K_a = 1/T_I$, e então procure aprimorar o valor de K_a por tentativa e erro através de simulações.

Dica: no **controlador antiwindup**, tome $u_{max} = 10 - 0.5 = 9.5$. Justifique esta escolha.

Lab 11 – Oscilações Periódicas em Malha-Fechada pelo Método da Função Descritiva

Objetivos: Veremos como determinar a provável existência de oscilações periódicas na entrada de uma não-linearidade estática de um sistema realimentado. Isto será realizado com base no método da função descritiva. Compararemos as previsões fornecidas pelo método da função descritiva com os resultados de simulação, considerando as seguintes não-linearidades estáticas: relé, saturação e zona morta.

11.1. Método da Função Descritiva

Considere o sistema realimentado abaixo, onde $r(t) = A$ é uma referência do tipo degrau de amplitude A , $z = f(x)$ é uma não-linearidade estática e $G(s)$ é a função de transferência de um sistema linear.

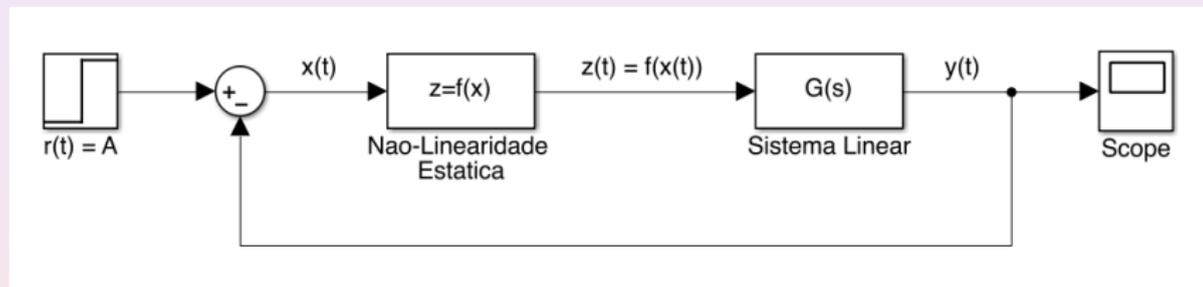


Figura: Sistema linear $G(s)$ realimentado com a não-linearidade estática $z = f(x)$.

11.1. Método da Função Descritiva

Assumimos que:

- 1 A não-linearidade estática é descrita por $z = f(x)$
- 2 A entrada $x(t)$ da não-linearidade estática é senoidal:

$$x(t) = a \sin(\omega t), \quad \text{com } a > 0, \omega > 0$$

- 3 A não-linearidade estática é uma função ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$ (rebatimento diagonal do gráfico)
- 4 A função de transferência $G(s)$ é racional, estritamente própria (mais pólos do que zeros) e com todos os polos no SPE, exceto por um possível pólo simples (sem multiplicidade) em $s = 0$. Além disso, assumimos que $G(s)$ tem um comportamento passa-baixas com

$$G(jk\omega) \cong 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

- 5 $r(t) = 0$ ($A = 0$)

11.1. Método da Função Descritiva

Pelas duas primeiras hipóteses, temos que $z(t) = f(x(t))$ é uma função periódica no tempo com frequência fundamental ω , e sua série de Fourier é dada por

$$z(t) = f(x(t)) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) dt, \quad \text{com } T = 2\pi/\omega$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) \sin(k\omega t) dt$$

A terceira hipótese implica que: (i) $a_k = 0$, para $k \geq 0$; e (ii)

$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} z(t) \sin(k\omega t) dt$, para $k \geq 1$. Portanto,

$$z(t) = f(x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

11.1. Método da Função Descritiva

Consequentemente,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k |G(jk\omega)| \sin(k\omega t + \angle G(jk\omega))$$

Decorre então da quarta hipótese que

$$y(t) \cong b_1 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

No entanto, $x(t) = -y(t)$ pela quinta hipótese. Relembre que $\gamma = |\gamma|e^{j\angle\gamma} \in \mathbb{C}$, $e^{j(\omega t + \theta)} = \cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)$. Logo:

$$\begin{aligned} 0 &= x(t) + y(t) = a \sin(\omega t) + b_1 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \\ &\Rightarrow a e^{j\omega t} + b_1 G(j\omega) e^{j\omega t} = [a + b_1 G(j\omega)] e^{j\omega t} = 0 \end{aligned}$$

Concluimos então que (**equação do balanço harmônico**):

$$1 + \Psi(a)G(j\omega) = 0$$

onde (mudando a variável de integração de t para $\theta = \omega t$ em b_1)

$$\Psi(a) = \frac{b_1}{a} = \frac{2}{a\pi} \int_0^{\pi} f(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

é chamada **função descritiva** da não-linearidade estática $z = f(x)$.

11.1. Método da Função Descritiva

A equação do balanço harmônico

$$1 + \Psi(a)G(j\omega) = 0$$

é uma **condição necessária** (mas não suficiente!) para que a entrada $x(t) = a \sin(\omega t)$ da não-linearidade estática apresente uma oscilação periódica de frequência $\omega > 0$ e amplitude $a > 0$ quando $r(t) = A = 0$.

O **método da função descritiva** estabelece então que (mesmo quando $r(t) = A \cong 0$):

- 1 Se a equação do balanço harmônico possui uma solução (a_s, ω_s) , então é **provável** que $x(t)$ oscile periodicamente com amplitude próxima de $a_s > 0$ e frequência próxima de $\omega_s > 0$. Havendo mais de uma solução, a amplitude e frequência de oscilação que **esperamos** (i.e. não temos como garantir!) que $x(t)$ apresente poderá depender da condição inicial
- 2 Se a equação do balanço harmônico não possui solução, então é **provável** que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas

Obs 1: Note que a equação do balanço harmônico é equivalente a

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\Psi(a)}$$

Logo, podemos resolver a equação do balanço harmônico graficamente: basta traçarmos o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ para $\omega > 0$ e o gráfico de $-1/\Psi(a) \in \mathbb{R}$ para $a > 0$. As interseções destes 2 gráficos no plano complexo correspondem a soluções da equação do balanço harmônico. Não havendo nenhuma interseção, então é provável que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas.

11.1. Método da Função Descritiva

Obs 2: Como $\Psi(a)$ é real para todo $a > 0$, temos que a equação do balanço harmônico é equivalente as 2 equações reais

$$\begin{aligned}1 + \Psi(a)\operatorname{Re}[G(j\omega)] &= 0 \\ \operatorname{Im}[G(j\omega)] &= 0\end{aligned}$$

Desse modo, a princípio poderemos resolver a equação do balanço harmônico **analiticamente** quando $G(s)$ é de ordem relativamente baixa. Resolvemos a segunda equação acima para $\omega > 0$, encontrando assim as possíveis frequências de oscilação $\omega > 0$. Em seguida, substituímos na primeira equação acima cada ω obtido, e então resolvemos para $a > 0$. Desse modo, concluímos que: (i) as possíveis frequências de oscilação $\omega > 0$ só dependem de $G(s)$, ou seja, as mesmas independem da não-linearidade estática $z = f(x)$; e (ii) as possíveis amplitudes de oscilação $a > 0$ dependem de $z = f(x)$ e de $G(s)$.

Obs 3: As equações

$$1 + \Psi(a)\text{Re}[G(j\omega)] = 0$$

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0$$

também nos permitem resolver **graficamente** a equação do balanço harmônico. Primeiramente, determine o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ para $\omega > 0$, e encontre as possíveis frequências $\omega > 0$ em que o diagrama cruza o eixo horizontal, ou seja, $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$. Em seguida, determine $\text{Re}[G(j\omega)]$ para tais frequências ω através do diagrama de Nyquist. Agora, calcule $\Psi(a) = -1/\text{Re}[G(j\omega)]$. Por fim, determine pelo gráfico de $\Psi(a)$ os possíveis valores $a > 0$ em que $\Psi(a) = -1/\text{Re}[G(j\omega)]$.

11.1. Método da Função Descritiva

Obs 4: O resultados anteriores para o sistema realimentado da Figura acima podem ser generalizados para a estrutura de controle dada abaixo:

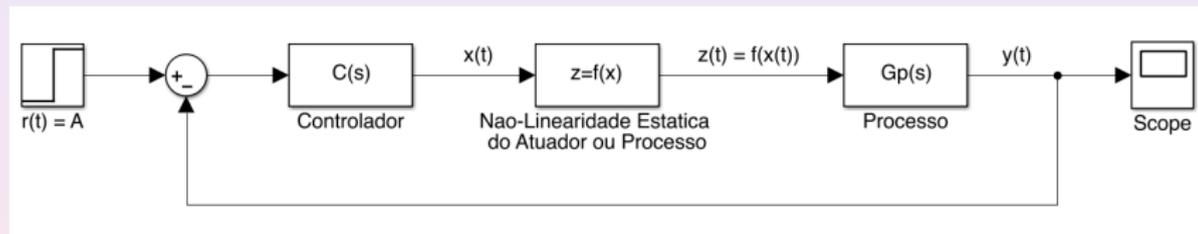


Figura: Sistema realimentado com controlador $C(s)$, não-linearidade estática $z = f(x)$ do atuador ou processo, e processo modelado pela função de transferência $G_p(s)$.

11.1. Método da Função Descritiva

Obs 4 (continuação): Ao tomarmos $G(s) = C(s)G_p(s)$, o método da função descritiva estabelece que (para $r(t) = A \cong 0$):

- 1 Se a equação do balanço harmônico

$$1 + \Psi(a)G(j\omega) = 1 + \Psi(a)C(j\omega)G_p(j\omega) = 0$$

possui uma solução (a_s, ω_s) , então é **provável** que a **entrada** $x(t)$ **da não-linearidade estática** oscile periodicamente com amplitude próxima de $a_s > 0$ e frequência próxima de $\omega_s > 0$, podendo assim gerar desgastes no atuador e/ou no processo. Havendo mais de uma solução para a equação do balanço harmônico, a amplitude e frequência de oscilação que **esperamos** (i.e. não temos como garantir!) que $x(t)$ apresente poderá depender da condição inicial. Em particular, se (a_s, ω_s) é uma solução da equação do balanço harmônico, então é razoável **esperarmos** que a **saída** $y(t)$ (do processo!) oscile periodicamente com frequência próxima de $\omega_s > 0$ e amplitude próxima de $a_s\Psi(a_s)|G(j\omega_s)|$, podendo assim gerar desgastes no processo e/ou comprometer o desempenho.

Obs 4 (continuação):

- ② Quando não há solução para a equação do balanço harmônico, então é **provável** que $x(t)$ (assim como $y(t)$) não apresente oscilações periódicas. Desse modo, em situações práticas, a ideia é projetar o controlador $C(s)$ da modo a atender as especificações desejadas e assegurar que a equação do balanço harmônico não tenha solução. Em geral, primeiramente projetamos o controlador $C(s)$ através de técnicas lineares para atender aos requisitos de desempenho desejados, desconsiderando a não-linearidade estática. Em seguida, alteramos os parâmetros/estrutura de $C(s)$ para que a equação do balanço harmônico

$$1 + \Psi(a)C(j\omega)G_p(j\omega) = 0$$

a qual leva em conta a não-linearidade estática $z = f(x)$ através da sua função descritiva $\Psi(a)$, não tenho solução.

11.2. Determinação da Função Descritiva

Exemplo 1: Considere que a não-linearidade estática é um relé:

$$z = f(x) = \begin{cases} -M, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ M, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Assim, a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi f(a \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi M \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{2M}{a\pi} [\cos(\pi) - \cos(0)] \\ &= \frac{4M}{a\pi} \end{aligned}$$

11.2. Determinação da Função Descritiva

Exemplo 2: Considere que a não-linearidade estática é a função saturação:

$$z = f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| < \Delta \\ \Delta, & \text{se } |x| \geq \Delta \end{cases}$$

Pode-se mostrar que a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi f(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < a \leq \Delta \\ \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}(\Delta/a) + \frac{\Delta}{a} \sqrt{1 - (\Delta/a)^2} \right] \leq 1, & \text{se } a > \Delta \end{cases} \end{aligned}$$

11.2. Determinação da Função Descritiva

Exemplo 3: Considere que a não-linearidade estática é a zona morta:

$$z = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq \delta \\ -\delta + x, & \text{se } x > \delta \\ \delta - x, & \text{se } x < \delta \end{cases}$$

Pode-se mostrar que a função descritiva é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi f(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < a \leq \delta \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}(\delta/a) + \frac{\delta}{a} \sqrt{1 - (\delta/a)^2} \right] < 1, & \text{se } a > \delta \end{cases} \end{aligned}$$

11.3. Exemplo

Considere

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

com as seguintes não-linearidades estáticas: relé com $M = 1$, e saturação com $\Delta = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\&= \frac{(-j\omega)(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{(-j\omega)(-j\omega+1)(-j\omega+2)} \times \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\&= \frac{(-j\omega)(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \\&= \frac{-j(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \\&= \frac{-3\omega - j(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4+5\omega^2+4)}\end{aligned}$$

11.3. Exemplo

Resolvendo a equação do balanço harmônico com $\omega > 0$ (veja a **Obs 2**):

$$\text{Im}(G(j\omega)) = 0 \Rightarrow -(2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2}}$$

$$1 + \Psi(a)\text{Re}(G(j\omega))|_{\omega=\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow 1 + \Psi(a) \frac{-3\omega}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)} \Big|_{\omega=\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\Psi(a) = 6}$$

• Para o relé com $M = 1$ (veja o **Exemplo 1**):

$$\Psi(a) = \frac{4}{a\pi} = 6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3\pi}}$$

Desse modo, **esperamos** (i.e. não temos como garantir) que a entrada $x(t)$ da não-linearidade estática oscile com uma frequência próxima de $\omega = \sqrt{2} \cong 1.41\text{rad/s}$ e uma amplitude próxima de $a = \frac{2}{3\pi} \cong 0.21$.

• Para a saturação com $\Delta = 1$ (veja o **Exemplo 2**): $\Psi(a) \leq 1$, para todo $a > 0$. Portanto, não há solução para $\Psi(a) = 6$ e, assim, **esperamos** que $x(t)$ não apresente oscilações periódicas.

11.3. Procedimentos

1. Para o exemplo da seção anterior, simule $G(s)$ em malha-fechada com o relé e também com a saturação (separadamente), considerando que $r(t) = 0.5, 1, 2, 5$. Verifique se $x(t)$ oscila ou não periodicamente de acordo com a previsão fornecida pelo método da função descritiva.
2. Com base no método da função descritiva, investigue a provável existência de oscilações periódicas em $x(t)$ considerando

$$G(s) = \frac{-s}{s^2 + 0.8s + 8}$$

e que as não-linearidades estáticas são: a saturação com $\Delta = 1$, e a zona morta com $\delta = 1$. Simule $G(s)$ em malha-fechada com estas não-linearidades estáticas (separadamente) para $r(t) = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 3, 3.5$. Verifique se $x(t)$ oscila ou não periodicamente de acordo com a previsão fornecida pelo método da função descritiva. Resposta: $\omega \cong 2.83 \cong 2\sqrt{2}$ e $\Psi(a) = 0.8$ (pelo diagrama de Nyquist); $a \cong 1.455$ para a saturação, e $a \cong 6.34$ para a zona morta (pelo gráfico de $\Psi(a)$).

Objetivos: Faremos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos quânticos em dimensão finita. Primeiramente, vamos revisar certos resultados de Álgebra Linear, para então apresentarmos os principais postulados da mecânica quântica em dimensão finita. Em seguida, veremos como analisar matematicamente partículas de spin-1/2. Por fim, ilustraremos alguns dos principais aspectos de sistemas quânticos tomando como exemplo partículas de spin-1/2.

12.1. Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n

Sejam

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)' \in \mathbb{C}^n$$

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)' \in \mathbb{C}^n$$

onde $\psi_1, \phi_1, \dots, \psi_n, \phi_n \in \mathbb{C}$. Então:

Norma: $\|\psi\| = \sqrt{|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2} \geq 0$

Vetor unitário: quando $\|\psi\| = 1$

Produto interno: $\langle \psi, \phi \rangle = \psi_1^* \phi_1 + \dots + \psi_n^* \phi_n \in \mathbb{C}$

Vetores ortogonais: quando $\langle \psi, \phi \rangle = 0$

Conjunto ortonormal: Um conjunto $S \subset \mathbb{C}^n$ é **ortonormal** quando: (i) cada vetor de S é unitário ($\|\psi\| = 1$); e (ii) vetores distintos de S são ortogonais ($\langle \psi, \phi \rangle = 0$)

12.1. Revisão de Álgebra Linear em \mathbb{C}^n

Seja $\widehat{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz quadrada complexa de ordem n . Então:

Matriz transposta conjugada: $\widehat{Q}^\dagger = (q_{ji}^*)$

Matriz hermitiana: quando $\widehat{Q} = \widehat{Q}^\dagger$

Matriz unitária: quando $\widehat{Q}^\dagger \widehat{Q} = I$, ou seja, $\widehat{Q}^\dagger = \widehat{Q}^{-1}$

Propriedades:

- 1 Suponha que \widehat{Q} é uma matriz hermitiana. Temos que os autovalores de \widehat{Q} são **reais** e, se ψ e ϕ são autovetores de \widehat{Q} associados a autovalores **distintos**, então $\langle \psi, \phi \rangle = 0$. Além disso, \mathbb{C}^n possui uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de \widehat{Q} . Em particular, todo vetor $\psi \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito como
$$\psi = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad \text{com } a_i = \langle v_i, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n$$
e $\|\psi\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$.
- 2 Se \widehat{Q} é um matriz unitária, então $\|\widehat{Q}\psi\| = \|\psi\|$ (preservação da norma)

12.2. Postulados da Mecânica Quântica

Observável: grandeza física que pode ser medida por um experimento no qual os resultados possíveis são números reais como, por exemplo, posição, velocidade e spin de uma partícula

- 1 Todo vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ representa um estado possível do sistema quântico. Se $k \in \mathbb{C}$ é unitário ($|k| = 1$), então $k\psi$ e ψ representam o mesmo estado do sistema. Além disso, todo estado possível do sistema é representado por um vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$ e por seus múltiplos unitários, e somente por eles.
- 2 O espaço de estado de um sistema composto por dois subsistemas é $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{mn}$ (produto tensorial).
- 3 A cada observável Q (com um número finito de resultados possíveis) está associado uma matriz hermitiana $\hat{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$). Quando o sistema está no estado correspondente ao vetor unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então o valor esperado de Q , no sentido usual de probabilidade, é dado por $\langle \psi, \hat{Q}\psi \rangle \in \mathbb{R}$.

12.2. Postulados da Mecânica Quântica

- 4 As medições possíveis de um observável Q são os autovalores (reais) de \hat{Q} . Se o resultado de Q é α (real), então **imediatamente** após a medição o estado do sistema corresponderá ao autovetor unitário $\psi_\alpha \in \mathbb{C}^n$ de \hat{Q} associado ao autovalor α (**colapso do estado**). Quando o sistema está no estado unitário $\psi \in \mathbb{C}^n$, então a probabilidade de medirmos o valor α é dada por $|\langle \psi_\alpha, \psi \rangle|^2 \in \mathbb{R}$ (e, se de fato medirmos α , teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_\alpha$)
- 5 Caso o sistema esteja **isolado** e **não seja perturbado** por nenhum experimento, a dinâmica do estado do sistema é determinada pela **equação de Schrödinger**

$$j\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = \hat{H} \psi(t)$$

onde $\hbar = h/2\pi$, h é a constante de Planck e H é o observável correspondente à energia total do sistema (**Hamiltoniano**).

Consequências

- Técnicas de controle por realimentação não podem ser aplicadas diretamente
- Controle em malha-aberta
- Controle em malha-fechada pode ser realizado considerando o efeito das medições no sistema: o sistema em malha-fechada é modelado por equações diferenciais estocásticas no caso de tempo contínuo, e por equações a diferenças estocásticas no caso de tempo discreto (cadeias de Markov)

12.3. Partículas de Spin-1/2

Descrição

- Exemplos de partículas de spin-1/2: elétron, próton
- Medições possíveis: $\pm 1/2$
- Espaço de estado: \mathbb{C}^2
- $\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z)
- $\psi_+ = (1 \ 0)'$, $\psi_- = (0 \ 1)'$: base ortonormal
- ψ_+, ψ_- são autovetores de \hat{S}_z :

$$\hat{S}_z \psi_+ = +\frac{1}{2} \psi_+$$

$$\hat{S}_z \psi_- = -\frac{1}{2} \psi_-$$

12.3. Partículas de Spin-1/2

Descrição (continuação)

- Estado unitário geral (**spinor**): $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \in \mathbb{C}^2$, onde

$$\alpha = \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\beta = \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: **amplitudes de probabilidade**
- $|\alpha|^2 = |\langle \psi_+, \psi \rangle|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $+1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição:
 $\psi \rightsquigarrow \psi_+$
- $|\beta|^2 = |\langle \psi_-, \psi \rangle|^2 = 1 - |\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ quando o sistema está no estado ψ . Se de fato medirmos $-1/2$, então teremos o colapso do estado imediatamente após a medição: $\psi \rightsquigarrow \psi_-$

12.3. Partículas de Spin-1/2

Importância

- **Qubit (quantum bit)**: análogo quântico do bit usual da teoria de computação clássica
- Partículas de spin-1/2: modelo de qubit (**informação**). O estado quântico ψ_- corresponde ao bit clássico 0, e ψ_+ ao bit clássico 1. No entanto, a **superposição** $\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_-$ pode assumir um número infinito de estado quânticos e não há uma correspondência direta com bits clássicos!
- Teoria da computação quântica e da informação quântica: computadores quânticos processando algoritmos quânticos são mais eficientes computacionalmente que computadores clássicos
- IBM: implementou a primeira plataforma de computação quântica, a qual utiliza um processador quântico de 5 qubits
⇒ <http://www.research.ibm.com/quantum>

12.3. Partículas de Spin-1/2

Duas partículas de spin-1/2 (2 qubits)

- Espaço de estado: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$

- Estado unitário geral:

$$\psi = \alpha[\psi_{++}] + \beta[\psi_{+-}] + \gamma[\psi_{-+}] + \delta[\psi_{--}] \in \mathbb{C}^4, \text{ onde}$$

$$\alpha = \langle \psi_{++}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle \psi_{+-}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\gamma = \langle \psi_{-+}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \delta = \langle \psi_{--}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula
- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula
- $|\gamma|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $+1/2$ para a segunda partícula
- $|\delta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ para a primeira partícula e $-1/2$ para a segunda partícula

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Considere uma partícula de spin-1/2. Vimos na seção anterior que

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção z , e que todo spinor pode ser escrito como

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_-$$

Agora, considere a matriz hermitiana correspondente ao momento angular de spin na direção x :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\psi_+^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})', \quad \psi_-^{(x)} = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2})'$$

é uma base ortonormal de autovetores de \hat{S}_z :

$$\hat{S}_x\psi_+^{(x)} = +\frac{1}{2}\psi_+^{(x)}, \quad \hat{S}_x\psi_-^{(x)} = -\frac{1}{2}\psi_-^{(x)}$$

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Desse modo, todo spinor pode ser escrito como (mudança de base ortonormal)

$$\psi = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- = \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\alpha_x} \psi_+^{(x)} + \underbrace{\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)}_{=\beta_x} \psi_-^{(x)}$$

onde:

$$\alpha = \langle \psi_+, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta = \langle \psi_-, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\alpha_x = \langle \psi_+^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \beta_x = \langle \psi_-^{(x)}, \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1 \quad (= \|\psi\|)$$

Assim:

- $|\alpha|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z (quando a partícula está no estado ψ)
- $|\beta|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção z
- $|\alpha_x|^2$: probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção x
- $|\beta_x|^2$: probabilidade de medirmos $-1/2$ na direção x

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 1: Suponha que o estado quântico de uma partícula de spin-1/2 é

$$\psi = \psi_+$$

ou seja, $\alpha = 1, \beta = 0$. Logo, se formos medir o spin da partícula na direção z , então é certo que vamos obter $+1/2$, i.e. com probabilidade igual a 1. No entanto, como

$$\alpha_x = \beta_x = 1/\sqrt{2}$$

se formos medir o spin da partícula na direção x , então vamos obter $+1/2$ com probabilidade $|\alpha_x|^2 = 1/2$, e $-1/2$ com probabilidade $|\beta_x|^2 = 1/2$, ou seja, temos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$.

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 1 (continuação): Assuma que de fato medimos $+1/2$ na direção x (a partícula estava no estado $\psi = \psi_+$). Então, imediatamente após tal medição, o estado quântico da partícula passou a ser $\psi_+^{(x)}$ (colapso do estado: $\psi = \psi_+ \rightsquigarrow \psi_+^{(x)}$!), ou seja, $\alpha_x = 1, \beta_x = 0$ e, portanto, $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Desse modo, se neste momento formos medir o spin da partícula na direção z (que agora está no estado $\psi_+^{(x)}$), então teremos 50% de chance de obter $+1/2$ ou $-1/2$! Concluímos assim que **a medição do spin da partícula na direção x alterou significativamente a probabilidade das possíveis medições do spin da partícula na direção z : a probabilidade de medirmos $+1/2$ na direção z passou de 100% para 50%!**

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2: Suponha que a dinâmica de uma partícula de spin-1/2 é determinada pela seguinte **equação de Schrödinger** (enquanto a partícula não é perturbada por nenhum experimento/medição)

$$j\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = \hat{H} \psi(t)$$

onde

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assuma que o spinor inicial da partícula é dado por

$$\psi(0) = \alpha(0)\psi_+ + \beta(0)\psi_- \in \mathbb{C}^2$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Então, a dinâmica $\psi(t)$, $t \geq 0$, do spinor é:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-\frac{j}{\hbar} \hat{H} t} \psi(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{j}{\hbar} \hat{H} t)^k}{k!} \right) \psi(0) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-jt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{jt/\hbar} \end{pmatrix} \psi(0) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)} \psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)} \psi_- \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2 (continuação): Note que $\psi(t)$ é de fato um vetor unitário, já que

$$\|\psi(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = \|\psi(0)\| = 1$$

Isto era esperado, pois pode-se mostrar que, sempre que \hat{H} for uma matriz hermitiana, então $e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}$ será uma matriz unitária para todo $t \geq 0$. Em particular,

$$\|\psi(t)\| = \|e^{-\frac{j}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0)\| = \|\psi(0)\| = 1$$

Mostramos acima que

$$\psi(t) = \underbrace{\alpha(0)e^{-jt/\hbar}}_{=\alpha(t)}\psi_+ + \underbrace{\beta(0)e^{jt/\hbar}}_{=\beta(t)}\psi_- \in \mathbb{C}^2$$

Logo, concluímos que as **amplitudes de probabilidade** $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}$ de $\psi(t)$ são calculadas a partir da solução da **equação de Schrödinger**, que é uma **EDO determinística!** Em outras palavras, **as amplitudes de probabilidade seguem uma lei determinística ao longo do tempo!**

12.4. Ilustração dos Aspectos de Sistemas Quânticos

Exemplo 2 (continuação): Por fim, ressaltamos que

$$|\alpha(t)|^2 = |\alpha(0)e^{-jt/\hbar}|^2 = |\alpha(0)|^2$$

$$|\beta(t)|^2 = |\beta(0)e^{jt/\hbar}|^2 = |\beta(0)|^2$$

ou seja, as amplitudes de probabilidades iniciais foram preservadas. No entanto, como (veja o Exemplo 1 acima)

$$|\alpha_x(t)|^2 = \left| \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} + \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2$$

$$|\beta_x(t)|^2 = \left| \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{\alpha(0)e^{-jt/\hbar} - \beta(0)e^{jt/\hbar}}{\sqrt{2}} \right|^2$$

isto não ocorre para as amplitudes de probabilidade $|\alpha_x(t)|^2$ e $|\beta_x(t)|^2$.

Livros:

- 1 Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, 2010. Capítulos 1 e 2
- 2 David J. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics”, 2nd Edition, Prentice-Hall, 2005. Capítulos 1 a 4
- 3 Jim Baggott, “The Quantum Story: A History in 40 Moments”, Oxford University Press, 2011.

Paradoxo EPR:

https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox

Teorema de Bell:

https://en.wikipedia.org/wiki/Bell's_theorem