

# DAS 5142 – Sistemas Dinâmicos

Prof. Hector Bessa Silveira

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Centro Tecnológico – CTC  
Departamento de Automação e Sistemas – DAS  
Sala 208  
E-mail: [hector.silveira@ufsc.br](mailto:hector.silveira@ufsc.br)  
Website: <http://hector.paginas.ufsc.br>

2016/1

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Relembre do Lab 1 que o modelo em espaço de estado (ou, simplesmente, **modelo de estado**) de um sistema dinâmico tem a seguinte forma:

$$dx(t)/dt = f(x(t), u, t)$$

$$y(t) = h(x(t), u, t)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,

$u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada (controle),

$y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída, e

$f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e

$h = (h_1, \dots, h_p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  são aplicações (vetoriais). A primeira equação do modelo de estado acima é denominada de **equação de estado** e, a segunda, de **equação de saída**.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Definição:** A **bola aberta** centrada em  $x \in \mathbb{R}^n$  e de raio (finito)  $\delta > 0$  é o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  definido por

$$B(x, \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \delta\}$$

onde  $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$  é a **norma euclidiana** do vetor  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto** (em  $\mathbb{R}^n$ ) se, para todo  $x \in D$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x, \delta) \subset D$ .

**Exemplos:**

- 1 A reta real  $\mathbb{R}$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}$
- 2 Todo intervalo aberto  $(a, b)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}$
- 3 O conjunto  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^2$

**Propriedade:** Os seguintes conjuntos são abertos em  $\mathbb{R}^n$ :

- 1 O próprio  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto vazio  $\phi$
- 2 Toda bola aberta  $B(x, \delta)$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\delta > 0$
- 3 A união **arbitrária** de conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$
- 4 A intersecção **finita** de conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Em várias situações práticas, a aplicação  $f$  que determina a equação de estado  $dx(t)/dt = f(x, u, t)$  não pode ser definida para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por exemplo, se  $f(x, u, t) = t^2 u + 1/x \in \mathbb{R}$  ( $n = 1$ ), então  $f$  só está definida para  $x \neq 0$ . Logo, o domínio de  $f$  é  $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , onde  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$  é aberto. Note que  $D$  é de fato aberto, pois  $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  (união de dois abertos).

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos supor que, no modelo de estado,  $f$  e  $h$  não dependem do tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u) \\ y(t) &= h(x(t), u) \end{aligned}$$

onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto**,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

## Exemplo: Motor CC

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u$$

$$y(t) = x_1(t)$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle),  $x_1(t) = \theta(t)$  é a posição angular do eixo em rad,  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  é a velocidade angular do eixo em rad/s, e  $y(t) = x_1(t)$  é a saída do sistema. Assim,  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$  é o vetor de estado e

$$dx(t)/dt = f(x(t), u) = (x_2(t), -x_2(t) + u)$$

$$y(t) = h(x(t), u) = x_1(t)$$

O motor CC pode ser controlado tanto em malha-aberta quanto em malha-fechada. Por exemplo, podemos escolher:

## Exemplo: Motor CC

- Malha-aberta:  $u = \alpha(t) \triangleq \sin(t)$
- Malha-fechada (realimentação):  $u = \alpha(x, t) \triangleq \overbrace{k(r(t) - x_1)}^{\text{controlador } P}$ ,  
onde  $r(t) = t$  (rampa) e  $k > 0$  é um ganho a ser ajustado

Substituindo os controles acima no modelo do motor, obtemos:

- Malha-aberta:

$$dx(t)/dt = f(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = (x_2(t), -x_2(t) + \sin(t)) \triangleq \bar{f}(x(t), t)$$

$$y(t) = h(x(t), u)|_{u=\alpha(t)} = x_1(t) \triangleq \bar{h}(x(t), t)$$

- Malha-fechada:

$$dx(t)/dt = f(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = (x_2(t), -x_2(t) + kt - kx_1(t)) \triangleq \hat{f}(x(t), t)$$

$$y(t) = h(x(t), u)|_{u=\alpha(x,t)} = x_1(t) \triangleq \hat{h}(x(t), t)$$

Note que, em ambos os casos (malha-aberta e malha-fechada), o modelo de estado resultante é da forma:

$$dx(t)/dt = \tilde{f}(x(t), t)$$

$$y(t) = \tilde{h}(x(t), t)$$

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Considere o seguinte modelo de estado

$$dx/dt = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto**,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Suponha que escolhemos uma entrada da forma  $u = \alpha(x, t)$ , onde  $\alpha: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação (vetorial). Assim, o sistema resultante é da forma:

$$dx/dt = f(x, \alpha(x, t)) \triangleq \hat{f}(x, t)$$

$$y = h(x, \alpha(x, t)) \triangleq \hat{h}(x, t)$$

com  $\hat{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\hat{h}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Note que:

- Quando  $u = \alpha(t)$ , então temos controle em malha-aberta (por exemplo,  $u = 0$  ou  $u = \sin(t)$ )
- Quando  $u = \alpha(x, t)$ , então temos controle por realimentação de estado (malha-fechada)

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Desse modo, podemos restringir o nosso estudo a equações de estado dadas por (voltaremos a considerar a equação de saída mais adiante)

$$dx/dt = f(x, t)$$

onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto** e  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tal equação de estado é denominada de **não-forçada**, e o sistema é chamado **não-autônomo**.

Ressaltamos que esta equação de estado pode corresponder tanto a sistemas em malha-aberta ( $u = \alpha(t)$ ) quanto a sistemas em malha-fechada ( $u = \alpha(x, t)$ ).

Quando

$$dx/dt = f(x),$$

ou seja, a aplicação  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  não depende do tempo  $t$ , dizemos que o sistema é **autônomo**.



# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Vamos agora analisar sistemas descritos por EDO's da forma (equação de estado)

$$dx/dt = f(x, t)$$

onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto** e  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Denominamos  $f$  de **campo de vetores** dependente do tempo (fixado  $t \geq 0$ , para cada vetor  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  a aplicação  $f$  associa o vetor  $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ ).

Estamos considerando que a equação de estado acima modela um sistema dinâmico real em que foi fixada uma entrada  $u = \alpha(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $t \geq 0$ . Em um sistema dinâmico real, temos que, para cada condição inicial  $x(t_0) \in D$  no instante inicial  $t_0 \geq 0$ , existe uma única solução  $x(t)$ , para  $t \geq t_0$ . Concluimos assim que o modelo acima deve preservar esta propriedade. Portanto, temos que determinar condições que o campo de vetores  $f$  do modelo deve satisfazer de modo a preservar a existência e unicidade de soluções do sistema real.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Considere a EDO

$$dx/dt = f(x, t) \quad (*)$$

onde  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto**.

**Definição:** Seja  $x_{t_0} \in D$  e  $t_0 \geq 0$ . Dizemos que uma curva diferenciável  $x: J \rightarrow D$  é uma **solução** de  $(*)$  com condição inicial  $x(t_0) = x_{t_0} \in D$  no instante inicial  $t_0 \geq 0$ , se  $J \subset [0, \infty)$  é um intervalo contendo  $t_0$  e  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , para todo  $t \in J$ . Dizemos que tal solução  $x: J \rightarrow D$  (com  $x(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ ) é **maximal** se, para qualquer outra solução  $\bar{x}: \bar{J} \rightarrow D$  de  $(*)$  com condição inicial  $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ , temos que  $\bar{J} \subset J$  e  $\bar{x}(t) = x(t)$ , para todo  $t \in \bar{J}$ .

**Obs:** Note que, **caso** uma solução **maximal exista**, então ela é **única** no seguinte sentido: se  $x: J \rightarrow D$  e  $\bar{x}: \bar{J} \rightarrow D$  são soluções maximais de  $(*)$  com as mesmas condições iniciais  $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$  em  $t_0$ , então  $J = \bar{J}$  e  $x(t) = \bar{x}(t)$ , para  $t \in J = \bar{J}$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Teorema de Existência e Unicidade de Soluções:** Suponha que  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial f / \partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  (matriz jacobiana) são contínuas na EDO  $(\star)$  acima. Então, dados  $x_{t_0} \in D$  e  $t_0 \geq 0$ , **existe** uma **única** solução maximal  $x: J \subset [0, \infty) \rightarrow D$  com condição inicial  $x(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ , que por sua vez só depende da restrição do domínio de  $f$  ao subconjunto  $D \times J \subset D \times [0, \infty)$ . Em particular, se  $\bar{x}: \bar{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$  é uma solução de  $(\star)$  para a condição inicial  $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ , então tal solução é **única** no seguinte sentido: se  $\tilde{x}: \tilde{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$  é uma outra solução de  $(\star)$  com a mesma condição inicial  $\tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ , então  $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t)$ , para  $t \in \bar{J} \cap \tilde{J}$ . Por este motivo, dizemos que  $\bar{x}: \bar{J} \subset [0, \infty) \rightarrow D$  é **a solução** de  $(\star)$  **no intervalo**  $\bar{J}$  para a condição inicial  $\bar{x}(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 1:** Relembre que (aqui,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto):

- Uma aplicação (vetorial)  $f = (f_1, \dots, f_n): D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua **se e somente se** cada função coordenada  $f_j: D \times \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $j = 1, \dots, n$ .
- A soma, diferença, produto, divisão (com quociente não-nulo) e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Dada uma aplicação  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , temos que  $\partial f / \partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  (matriz jacobiana) é contínua **se e somente se** as derivadas parciais  $\partial f_j / \partial x_k: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  existem e são contínuas, para  $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$ .
- Uma aplicação  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é denominada de **classe  $C^1$**  quando  $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  (matriz jacobiana) é contínua, ou seja, quando as derivadas parciais  $\partial f_j / \partial x_k: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  existem e são contínuas, para  $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 2:** Suponha que na EDO  $(\star)$  acima, o campo de vetores  $f$  não depende do tempo  $t$ , ou seja,  $dx/dt = f(x)$ , onde  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Então, as hipóteses do teorema anterior são atendidas, pois  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial f/\partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  são contínuas. Neste caso, pode-se verificar que: dados  $x_0 \in D$ ,  $t_0 \geq 0$  e  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $t_0 + T \geq 0$ , se  $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$  é a solução de  $dx/dt = f(x)$  no intervalo  $J = [t_0, b)$  para a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  no instante inicial  $t = 0$ , então  $\bar{x}: \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \rightarrow D$  definida por  $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ , para  $t \in \bar{J}$ , é a solução de  $dx/dt = f(x)$  no intervalo  $\bar{J} = [t_0 + T, b + T)$  para a condição inicial  $\bar{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$  em  $t_0 + T$ , onde  $t_0 < b \leq \infty$ . Por este motivo, dizemos que um sistema **autônomo** modelado por  $dx/dt = f(x)$  é **invariante no tempo**, e **sempre podemos considerar que  $t_0 = 0$** .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 3:** Considere a equação de estado

$$dx/dt = f(x, u)$$

onde  $x \in D$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto,  $u \in \mathbb{R}^m$  é vetor de controle e  $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ , ou seja,  $\partial f/\partial x: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial f/\partial u: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  são aplicações contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma  $u = \alpha(x, t)$ , onde  $\alpha: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\partial \alpha/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  são aplicações contínuas. Então, o sistema resultante é dado por

$$dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \alpha(x, t))$$

com  $\bar{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial \bar{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuas pela regra da cadeia. Logo, o sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 4:** Considere o modelo de estado

$$dx/dt = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

onde  $x \in D$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto,  $u \in \mathbb{R}^m$  é vetor de controle,  $y \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída e  $h: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Assuma que as aplicações  $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial f/\partial x: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  são contínuas. Suponha que escolhemos uma entrada da forma  $u = \alpha(t)$ , onde  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua. Então, a equação de estado do sistema resultante é dada por

$$dx/dt = \tilde{f}(x, t) \triangleq f(x, u(t))$$

com  $\tilde{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial \tilde{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínuas. Logo, a equação de estado do sistema resultante satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Portanto, dados  $x_{t_0} \in D$  e  $t_0 \geq 0$ , existe uma **única** solução  $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$  no intervalo  $J = [t_0, b)$  para a condição inicial  $x(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ , que por sua vez só depende da entrada  $u(t) = \alpha(t)$ , para  $t \in J = [t_0, b)$ , onde  $t_0 < b \leq \infty$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 4 (continuação):** Em particular, escolhida uma entrada contínua  $u(t) = \alpha(t)$ ,  $t \geq 0$ , para o modelo de estado anterior

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

e dada uma condição inicial  $x(t_0) = x_{t_0} \in D$  em  $t_0 \geq 0$ , existe uma **única** saída  $y(t) = h(x(t), u(t))$ ,  $t \in J = [t_0, b)$ , que por sua vez só depende da entrada  $u(t) = \alpha(t)$ , para  $t \in J = [t_0, b)$ . Logo, tal modelo de estado está de acordo com a definição de **vetor de estado de um sistema dinâmico** vista no Lab 1:

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &\in D, \\ u(t) &= \alpha(t), \quad t \in J = [t_0, b) \end{aligned} \right\} \longrightarrow y(t), \quad t \in J = [t_0, b)$$



# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 4 (continuação):** Ainda no modelo de estado anterior

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

suponha que escolhemos uma entrada da forma  $u = \alpha(t)$ , onde  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua. Então, o modelo de estado do sistema resultante é dado por

$$dx/dt = \tilde{f}(x, t) \triangleq f(x, u(t)), \quad y = h(x, u(t))$$

com  $\tilde{f}: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\partial\tilde{f}/\partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  contínuas. Sejam  $x_0 \in D$ ,  $t_0 \geq 0$  e  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $t_0 + T \geq 0$ . Defina  $\bar{u}(t) = u(t - T) = \alpha(t - T)$ , para  $t \geq t_0 + T$ . Considere o modelo de estado

$$dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \bar{u}(t)), \quad \bar{y} = h(x, \bar{u}(t))$$

onde  $\bar{f}: D \times [t_0 + T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 4 (continuação):** Pode-se verificar que, se  $x: J = [t_0, b) \rightarrow D$  é a solução de  $dx/dt = \tilde{f}(x, t) = f(x, u(t))$  no intervalo  $J = [t_0, b)$  para a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  em  $t_0$ , onde  $t_0 < b \leq \infty$ , então:

- 1  $\bar{x}: \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \rightarrow D$  definida por  $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ , para  $t \in \bar{J}$ , é a solução de  $dx/dt = \bar{f}(x, t) \triangleq f(x, \bar{u}(t))$  no intervalo  $\bar{J} = [t_0 + T, b + T)$  para a condição inicial  $\bar{x}(t_0 + T) = x(t_0) = x_0$  em  $t_0 + T$
- 2 Para o sistema resultante, existe uma **única** saída  $y(t) = h(x(t), u(t))$ ,  $t \in J = [t_0, b)$ , que por sua vez só depende da entrada  $u(t) = \alpha(t)$ , para  $t \in J = [t_0, b)$ . E, além disto, a saída  $\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  é **única**, satisfaz  $\bar{y}(t) = y(t - T)$  e só depende da entrada  $\bar{u}(t) = u(t - T)$ , para  $t \in \bar{J}$ .

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs 4 (continuação):** Portanto, mostramos que o modelo de estado considerado

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

corresponde a um sistema **invariante no tempo** no sentido da definição vista no Lab 1:

**Se**

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ u(t) &= \alpha(t), \quad t \in J = [t_0, b) \end{aligned} \right\} \longrightarrow y(t), \quad t \in J = [t_0, b)$$

**então**

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(t_0 + T) &= x_0, \\ \bar{u}(t) &= u(t - T), \quad t \in \bar{J} = [t_0 + T, b + T) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \bar{y}(t) = y(t - T), \quad t \in \bar{J}$$

Desse modo, em tais modelos de estado **sempre podemos considerar** que  $t_0 = 0$ .

**Obs 5:** Os resultados das **Obs 3 e 4** acima permanecem válidos quando a entrada  $u(t) = \alpha(t)$ ,  $t \geq 0$ , é **contínua por partes**.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Exemplo 1 (não-unicidade de soluções):** Considere a EDO

$$\dot{x} = 3x^{2/3} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Seja  $t_0 = 0$  o instante inicial. Note que  $x(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , é uma solução desta EDO com condição inicial  $x(0) = 0$  em  $t_0 = 0$ . E, dado  $c > 0$ , observe que  $x_c(t)$ ,  $t \geq 0$ , definida por

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq c \\ (t - c)^3, & \text{se } t > c \end{cases}$$

também é solução desta EDO com condição inicial  $x(0) = 0$ . Logo, existem infinitas soluções da EDO acima quando a condição inicial é nula em  $t_0 = 0$  (e não existe solução maximal com  $x(0) = 0$ !).

Portanto, um modelo descrito por esta EDO não permite determinar (prever) a solução do sistema real quando a condição inicial é nula. Isto ocorre, por exemplo, se aplicamos a realimentação  $u = 3x^{2/3}/(\cos(x) + 2)$  em um sistema modelado por  $\dot{x} = \bar{f}(x, u) = (\cos(x) + 2)u$ .

Note que, apesar da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da EDO acima ser contínua,  $f$  não é diferenciável em  $x = 0$  e, portanto, não satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Exemplo 2 (tempo de escape finito):** Considere a EDO

$$\dot{x} = 1 + x^2 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Note que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é infinitamente diferenciável e, assim, as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções são satisfeitas para  $f$ . Seja  $t_0 = 0$ . Note que  $x(t) = \tan(t)$ , para  $0 \leq t < \pi/2$ , é uma solução desta EDO para a condição inicial  $x(0) = 0$  em  $t_0 = 0$  (e, assim, é a solução no intervalo  $J = [0, \pi/2)$  para  $x(0) = 0$  em  $t_0 = 0$ ). Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} x(t) = +\infty \quad (\text{tempo de escape finito em } t_e = \pi/2)$$

Desse modo, a solução maximal com condição inicial nula em  $t_0 = 0$  não pode estar definida no instante  $t_e = \pi/2$  e, portanto, concluímos que  $x(t) = \tan(t)$ , para  $t \in J = [0, \pi/2)$ , é a solução maximal quando a condição inicial é nula em  $t_0 = 0$ .

**Mais exemplos:** (no quadro)

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Definição:** Suponha que  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\partial f / \partial x: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$  são aplicações contínuas. Dizemos que o campo de vetores  $f$  da EDO  $dx/dt = f(x, t)$  é **completo** se, para quaisquer  $x_{t_0} \in D$  e  $t_0 \geq 0$ , temos que a solução maximal correspondente  $x: J \rightarrow D$  (com  $x(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ ) é tal que  $J = [0, \infty)$ , ou seja, cada solução maximal está definida para todo  $t \in [0, \infty)$ .

**Teorema:** Considere que o campo de vetores  $f: D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  da EDO  $dx/dt = f(x, t)$  é completo. Denote por  $\phi: [0, \infty) \times D \times [0, \infty) \rightarrow D$  o **fluxo** associado ao campo de vetores  $f$ , ou seja, dados  $x_{t_0} \in D$  e  $t_0 \geq 0$ ,  $\phi(\cdot; x_{t_0}, t_0): [0, \infty) \rightarrow D$  é igual à solução maximal da EDO com condição inicial  $x(t_0) = x_{t_0}$  em  $t_0$ . Então, dados  $x_{t_0} \in D$ ,  $t_2, t_1, t_0 \geq 0$ , temos que:

$$\phi(t_0; x_{t_0}, t_0) = x_{t_0}$$

$$\phi(t_2; \phi(t_1; x_{t_0}, t_0), t_1) = \phi(t_2; x_{t_0}, t_0)$$

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Teorema (continuação):** Em particular, temos que 2 **soluções distintas** da EDO  $dx/dt = f(x, t)$  **nunca podem se cruzar no mesmo instante de tempo.**

**Ilustração do cruzamento de soluções:** (no quadro)

**Prova (do resultado de cruzamento acima):** Considere 2

soluções distintas:  $x: [0, \infty) \rightarrow D$  com condição inicial

$x(t_0) = x_{t_0} \in D$  em  $t_0 \geq 0$ , e  $\bar{x}: [0, \infty) \rightarrow D$  com condição inicial

$\bar{x}(\bar{t}_0) = \bar{x}_{\bar{t}_0} \in D$  em  $\bar{t}_0 \geq 0$ . A demonstração é por contradição.

Assim, suponha que existe  $t_1 \geq 0$  tal que

$\phi(t_1; x(t_0), t_0) = \phi(t_1; \bar{x}(t_0), \bar{t}_0)$ , ou seja, as soluções se cruzam no instante de tempo  $t_1$ . Então, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t; x(t_0), t_0) = \phi(t; \underbrace{\phi(t_1; x(t_0), t_0)}_{=\phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0)}, t_1) \\ &= \phi(t; \phi(t_1; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0), t_1) = \phi(t; \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{t}_0) = \bar{x}(t) \end{aligned}$$

ou seja, as 2 soluções são idênticas, o que contradiz a hipótese de que elas são distintas.

# 1. Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

**Obs:** Considere um sistema autônomo da forma  $dx/dt = f(x)$ , onde  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Suponha que o campo de vetores  $f$  é completo. A partir do teorema acima e da **Obs 2** apresentada anteriormente, pode-se mostrar que as **órbitas desse sistema (autônomo!) nunca podem se cruzar no retrato de fase** (e cada órbita não pode cruzar sobre si mesma, a menos que seja uma órbita fechada, ou seja, corresponda a uma solução periódica no tempo).



## 2. Sistemas Lineares

Neste capítulo, vamos estudar **sistemas lineares invariantes no tempo** (**LTI** – Linear Time-Invariant) modelados por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor (coluna) de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $y \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída, e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (matriz quadrada de ordem  $n$ ),  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  (matriz  $n \times m$ ),  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  (matriz  $p \times n$ ) e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  (matriz  $p \times m$ ) são **matrizes constantes**. Salvo menção contrária, de agora em diante iremos assumir que a entrada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , é **contínua por partes**. Como

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u), \quad y = Cx + Du = h(x, u)$$

com  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  ( $\partial f / \partial x = A$ ,  $\partial f / \partial u = B$ ,  $\partial h / \partial x = C$ ,  $\partial h / \partial u = D$ ), concluímos pelas **Obs 4 e 5** acima que o sistema é de fato **invariante no tempo** e, assim, sempre podemos (**e iremos**) considerar que  $t_0 = 0$ .

## 2. Sistemas Lineares

Mostraremos na sequência que um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

é de fato linear, ou seja, o princípio da superposição é satisfeito.

Definimos, para cada  $t \geq 0$ , a matriz quadrada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Temos que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I \text{ (matriz identidade)}, \quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$$

Relembre que se

$$\alpha(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad t \geq 0$$

onde  $\beta(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $t \geq 0$ , é uma aplicação contínua, então

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \beta(t), \quad t \geq 0$$

## 2. Sistemas Lineares

Dada uma condição inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  (em  $t_0 = 0$ ), temos que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

é uma solução do sistema no intervalo  $J = [0, \infty)$  para a condição inicial  $x_0$ , pois  $x(0) = e^{A \cdot 0}x_0 = Ix_0 = x_0$  e, para  $t \geq 0$ ,

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau,$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau + \overbrace{e^{At}e^{-At}}^{=I} Bu(t)$$

$$= A \left[ e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \right] + Bu(t)$$

$$= Ax(t) + Bu(t)$$

## 2. Sistemas Lineares

Portanto, concluímos pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

é a solução do sistema no intervalo  $J = [0, \infty)$  para a condição inicial  $x(0) = x_0$ . Assim, a saída  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= \underbrace{Ce^{At}x_0}_{=y_0(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t)}_{=y_{esn}(t)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Resposta Total} = \underbrace{\text{Resposta Entrada Nula}}_{\text{linear em } x(t_0)} + \underbrace{\text{Resposta Estado Nulo}}_{\text{linear em } u(t)}$$

**Propriedade de Decomposição**

## 2. Sistemas Lineares

Logo, o **princípio da superposição** é satisfeito:

**Se**

$$\left. \begin{array}{l} x_a(0), \\ u_a(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y_a(t), t \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} x_b(0), \\ u_b(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y_b(t), t \geq 0$$

**então** ( $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ )

$$\left. \begin{array}{l} x_c(0) = k_1 x_a(0) + k_2 x_b(0), \\ u_c(t) = k_1 u_a(t) + k_2 u_b(t), t \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow y_c(t) = k_1 y_a(t) + k_2 y_b(t), t \geq 0$$

Concluimos assim que todo sistema modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

é de fato um **sistema linear invariante no tempo (LTI)**.

**Importante:** Como as soluções do modelo acima estão definidas em todo o intervalo  $J = [0, \infty)$ , **não há tempo de escape finito!**

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Considere o sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Relembre que, fixada a condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e escolhida uma entrada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , contínua por partes, a saída  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t) \\ &= \underbrace{Ce^{At}x_0}_{= y_0(t)} + \underbrace{\int_{0^-}^t \overbrace{[Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D]}^{\mathcal{G}(t-\tau)} u(\tau) d\tau}_{= y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t)*u(t) \text{ (convolução!)}} \end{aligned}$$

onde  $\delta(t)$  é o impulso unitário centrado em  $t = 0$ . Denominamos  $\mathcal{G}(t) = Ce^{At}B + \delta(t)D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $t \geq 0$ , de **matriz resposta ao impulso** do sistema.

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Ao aplicarmos a transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  em ambos os lados de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

obtemos que

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

onde

$$X(s) = (X_1(s), \dots, X_n(s))' = \mathcal{L}\{x(t)\} = (\mathcal{L}\{x_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{x_n(t)\})'$$

$$U(s) = (U_1(s), \dots, U_m(s))' = \mathcal{L}\{u(t)\} = (\mathcal{L}\{u_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{u_m(t)\})'$$

$$Y(s) = (Y_1(s), \dots, Y_p(s))' = \mathcal{L}\{y(t)\} = (\mathcal{L}\{y_1(t)\}, \dots, \mathcal{L}\{y_p(t)\})'$$

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Portanto,

$$(sl - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

e, assim,

$$X(s) = (sl - A)^{-1}x(0) + (sl - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sl - A)^{-1}x(0) + [C(sl - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Mas, para  $t \geq 0$ ,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{= y_0(t)} + \underbrace{\int_{0^-}^t \overbrace{[Ce^{A(t-\tau)}B + \delta(t-\tau)D]}^{\mathcal{G}(t-\tau)} u(\tau) d\tau}_{= y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t)*u(t) \text{ (convolução!)}}$$



## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Concluimos então que (relembre que  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ):

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}, \quad t \geq 0$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{= Y_0(s)} + \overbrace{\left[ C(sI - A)^{-1}B + D \right] U(s)}^{= G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}} \\ = Y_{esn}(s) = G(s)U(s)$$

onde

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \in \mathbb{R}^{p \times m} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

é denominada de **matriz de transferência** do sistema. Logo, para  $x_0 = 0$  (condições iniciais nulas), temos

$$Y(s) = Y_{esn}(s) = G(s)U(s)$$

ou seja,

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix}}_{=Y(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}}_{=G(s) = (G_{ij}(s)) = \mathcal{L}\{\mathcal{G}(t)\}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}}_{=U(s)}$$

com

$$\mathcal{G}(t) = (g_{ij}(t)) = Ce^{At}B + \delta(t)D = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & \dots & g_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{p1}(t) & \dots & g_{pm}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Portanto,

$$\frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = G_{ij}(s) = \mathcal{L}\{g_{ij}(t)\}$$

é a **função de transferência** entre a  $j$ -ésima entrada  $u_j(t)$  e a  $i$ -ésima saída  $y_i(t)$  do sistema quando as demais entradas  $u_k(t)$  são identicamente nulas ( $k \neq j$ ), e  $g_{ij}(t)$  é a **resposta ao impulso** correspondente.

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

**Obs:** Relembre de Álgebra Linear que, dada uma matriz quadrada  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $\det(M) \neq 0$ , então a matriz inversa  $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existe e é determinada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Adj}(M)$$

onde  $\text{Adj}(M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz adjunta de  $M$ :  $\text{Adj}(M) = C'$ , com  $C = (c_{ij})$  e  $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ , onde  $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  é a submatriz obtida de  $M$  ao se eliminar a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

Em particular, quando  $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  com  $\det(M) \neq 0$ , então

$$M^{-1} = \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Relembre que a matriz de transferência é dada por

$$G(s) = (G_{ij}(s)) = C(sl - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sl - A)} C \text{Adj}(sl - A)B + D$$

Temos que cada elemento da matriz  $\text{Adj}(sl - A)$  é um polinômio em  $s$  de grau menor ou igual a  $n - 1$ , e o polinômio  $\det(sl - A)$  tem grau  $n$ . Portanto, cada elemento  $G_{ij}(s)$  de  $G(s)$  é uma função de transferência racional da forma  $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ , onde  $p_{ij}(s)$  e  $q_{ij}(s)$  são polinômios em  $s$  com  $\text{grau}(p_{ij}(s)) \leq \text{grau}(q_{ij}(s)) \leq n$ .

Note que:

- 1 Não há cancelamentos polo-zero num certo elemento  $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$  da matriz de transferência  $G(s)$  **se e somente se**  $q_{ij}(s) = \det(sl - A)$  (com  $\text{grau}(q_{ij}(s)) = n$ )
- 2 Se  $D = 0$ , então  $\text{grau}(p_{ij}(s)) < \text{grau}(q_{ij}(s))$  (sem transferência direta) em **cada** elemento  $G_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$  de  $G(s)$

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Dizemos que  $p \in \mathbb{C}$  é um **polo** da matriz da transferência  $G(s)$  quando  $p$  é um polo de **algum** elemento de  $G(s)$ . Assim, cada polo de cada elemento de  $G(s)$  é um polo da matriz de transferência  $G(s)$ . Como os autovalores da matriz  $A$  são as raízes de  $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$ , concluímos que **todo polo** da matriz de transferência  $G(s)$  é um **autovalor** da matriz  $A$ . No entanto, nem todo autovalor de  $A$  é um polo de  $G(s)$  devido a possíveis cancelamentos polo-zero nos elementos de  $G(s)$ .

Além disso, como  $x(t) = e^{At}x_0$ ,  $t \geq 0$ , é a solução da equação de estado  $\dot{x} = Ax$  ( $u = 0$ ) para a condição inicial  $x(0) = x_0$ , onde  $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A)\} = e^{At}$ ,  $t \geq 0$ , decorre que todo polo de  $X(s)$  (para  $u = 0$ ) é um autovalor da matriz  $A$ . Assim, por simplicidade, de agora em diante denominaremos os autovalores da matriz  $A$  de **polos**.

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

A noção de **zeros** de uma matriz de transferência  $G(s)$  é mais difícil de ser colocada, e não será vista no nosso curso. Isto será abordado na disciplina *Controle Multivariável*. Para maiores detalhes, veja o livro do Chen.

**Exemplo 1:** Considere o sistema ( $n = 2$  estados,  $m = 1$  entrada e  $p = 2$  saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= x\end{aligned}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine a solução  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , para a condição inicial  $x_0 = [1 \ 0]'$  considerando entrada nula ( $u = 0$ ). Encontre também a matriz de transferência  $G(s)$  e determine seus polos.

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

**Solução:** Note que

$$C = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos que  $x(t) = e^{At}x_0$ ,  $t \geq 0$ , com

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}, \quad t \geq 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 2s + 1}_{= (s+1)^2 = \det(sI - A)}} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At}, \quad t \geq 0$$

Logo,

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Por fim,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)^2} \\ s \\ \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Os polos de  $G(s)$  são  $p_1 = p_2 = -1$ , coincidindo com os polos da matriz  $A$ . Note que não tivemos cancelamentos polo-zero em  $G_{11}(s)$  e em  $G_{21}(s)$ .



## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

**Exemplo 2:** Para o sistema ( $n = 3$  estados,  $m = 1$  entrada e  $p = 2$  saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2.25 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} x$$

temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{(s+3)}^2}{(s+2)\cancel{(s+3)}^2} \\ \frac{5\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{5}{(s+3)^2} \end{bmatrix}$$

Os polos de  $A$  são  $p_1 = -2, p_{2,3} = -3$ , coincidindo com os polos de  $G(s)$ . No entanto, observe que houve um cancelamento polo-zero em  $G_{11}(s)$  e em  $G_{21}(s)$ .

## 2.1. Transformada de Laplace, Matriz de Resposta Impulsiva e Matriz de Transferência

**Exemplo 3:** Para o sistema SISO ( $m = p = 1$ ) com  $n = 2$  estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x$$

temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}$$

Os polos de  $A$  são  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -3$ , mas a função de transferência  $G(s)$  possui somente um polo em  $p = -3$  devido a um cancelamento polo-zero.

## 2.2. Estabilidade

Considere um sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

**Definição (Estabilidade Interna):** Assume que  $u = 0$  (entrada nula). Dizemos que  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio **estável** do sistema quando, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \text{ para } t \geq 0$$

Quando  $x^e = 0$  não é estável, dizemos que  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio **instável**. Dizemos que  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema quando  $x^e = 0$  é estável e, além disso, dada qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x(0) = 0$ .

**Definição (Estabilidade Externa):** Assuma que  $x(0) = 0$  (condição inicial nula). Dizemos que o sistema acima é **BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) estável** quando, para qualquer entrada limitada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , temos que a **resposta estado nulo**  $y(t) = y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t) * u(t)$ ,  $t \geq 0$ , é limitada. Quando o sistema não é BIBO estável, dizemos que o mesmo é **BIBO instável**. Isto significa que existe ao menos uma entrada limitada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , para a qual a resposta estado nulo  $y(t) = y_{esn}(t) = \mathcal{G}(t) * u(t)$ ,  $t \geq 0$ , **não é limitada**.

**Obs:** Relembre que uma aplicação  $v: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$  é **limitada** quando existe  $0 < M_v < \infty$  tal que

$$\|v(t)\| \leq M_v, \text{ para todo } t \geq 0$$

**Teorema:** Considere um sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Então:

- 1 O ponto de equilíbrio  $x^e = 0$  é instável caso a matriz  $A$  possua **algum** polo (autovalor) com parte real positiva (i.e. no SPD)
- 2 O ponto de equilíbrio  $x^e = 0$  é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** a matriz  $A$  possui **todos** os polos (autovalores) com parte real negativa (i.e. estão no SPE)
- 3 O sistema é BIBO estável **se e somente se** cada elemento  $G_{ij}(s)$  da matriz de transferência  $G(s)$  é BIBO estável, ou seja, todos os polos de  $G(s)$  estão no SPE

## 2.2. Estabilidade

**Obs 1:** Relembre que todo polo de  $G(s)$  é um polo (autovalor) da matriz  $A$ . Portanto: (a) se  $G(s)$  possui algum polo no SPD, então o sistema é BIBO instável e  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio instável; e (b) se todos os polos da matriz  $A$  estão no SPE, então o  $x^e = 0$  é globalmente assintoticamente estável e, além disso, o sistema é BIBO estável. No entanto, um sistema pode ser BIBO estável mas  $x^e = 0$  não ser globalmente assintoticamente estável (devido a cancelamentos polo-zero nos elementos de  $G(s)$ ).

**Obs 2:** Relembre que a solução de  $\dot{x} = Ax$  para a condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0$$

com

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A)\} = e^{At}, \quad t \geq 0$$

Portanto, quanto mais afastados da origem estiverem os polos da matriz  $A$  no SPE, mais rápida será a convergência da solução  $x(t)$  para  $x^e = 0$ .

## 2.2. Estabilidade

**Exemplo:** Considere (novamente) o sistema ( $n = 2$  estados,  $m = 1$  entrada e  $p = 2$  saídas)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x \quad (\text{i.e. } C = I)$$

Temos que

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A) = s(s + 2) + 1 = (s + 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow p_{1,2} = -1 \in \text{SPE}$$

Logo,  $x^e = 0$  é globalmente assintoticamente estável e, portanto, o sistema é BIBO estável. A BIBO estabilidade também pode ser verificada diretamente (os polos de  $G(s)$  são  $p_{1,2} = -1 \in \text{SPE}$ ):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s + 1)^2} \\ \frac{s}{(s + 1)^2} \end{bmatrix}$$

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

Considere (novamente) um sistema LTI ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

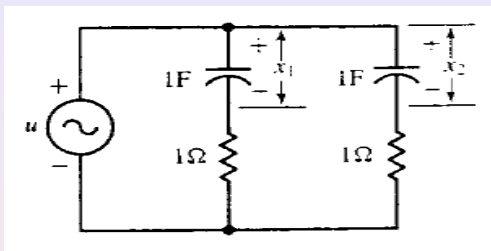
$$y = Cx + Du$$

**Definição:** Dizemos que o sistema é **controlável** quando, cada condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e cada estado final  $x_T \in \mathbb{R}^n$ , existe uma entrada  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que a solução  $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  do sistema para a condição inicial  $x(0) = x_0$  satisfaz  $x(T) = x_T$ , para algum  $T > 0$ . Isto significa que sempre podemos levar o sistema de todo estado inicial para qualquer estado final desejado em tempo finito através de uma entrada adequada. Dizemos que o sistema é **não-controlável** quando ele não for controlável.

**Definição:** Dizemos que o sistema é **observável** quando, para todo estado inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  desconhecido, existe  $T > 0$  tal que o conhecimento da entrada  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e da saída  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  no intervalo de tempo  $[0, T]$  é suficiente para determinado de maneira única o estado inicial  $x(0)$ . Dizemos que o sistema é **não-observável** quando ele não for observável.

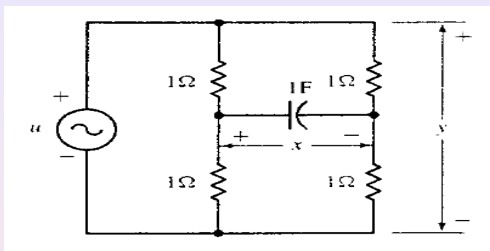


## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade



**Figura:** Exemplo de um circuito elétrico **não-controlável**: a tensão de entrada  $u(t)$  nunca é capaz de transferir as variáveis de estado  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  para estados finais distintos  $x_1(T) \neq x_2(T)$  a partir das condições iniciais  $x_1(0) = x_2(0)$  (capacitores em paralelo).

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade



**Figura:** Exemplo de um circuito elétrico **não-observável**: quando  $u = 0$ , temos que  $y = 0$  devido à simetria do circuito. Assim, mesmo conhecendo  $u(t) = y(t) = 0$ , para  $t \geq 0$ , não temos como determinar de maneira única a tensão inicial  $x(0)$  do capacitor.

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

Para um sistema LTI ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

definimos a **matriz de controlabilidade** por

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]_{n \times nm}$$

e a **matriz de observabilidade** por

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{np \times n}$$

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

**Teorema:** Considere um sistema LTI ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Então:

- 1 O sistema é controlável **se e somente se**  $\text{posto}(\mathcal{C}) = n$  (posto completo de linha). Neste caso, dizemos simplesmente que o par  $(A, B)$  é controlável, pois a matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$  só depende das matrizes  $A$  e  $B$ .
- 2 O sistema é observável **se e somente se**  $\text{posto}(\mathcal{O}) = n$  (posto completo de coluna). Neste caso, dizemos simplesmente que o par  $(A, C)$  é observável, pois a matriz de observabilidade  $\mathcal{O}$  só depende das matrizes  $A$  e  $C$ .
- 3 O par  $(A, C)$  é observável **se e somente se** o par  $(A', C')$  é controlável (**dualidade**)
- 4 Quando o sistema é SISO ( $m = p = 1$ ), temos que o sistema é controlável e observável **se e somente se** não há cancelamentos polo-zero na função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

**Obs 1:** Note que, quando  $m = 1$  (uma única entrada), o sistema é controlável **se e somente se**  $\det(C) \neq 0$ . E, quando  $p = 1$  (uma única saída), o sistema é observável **se e somente se**  $\det(O) \neq 0$ .

**Obs 2:** Temos os seguintes comandos no Matlab:

- 1  $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D) \Rightarrow$  define o modelo de estado  
 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$
- 2  $G = \text{tf}(\text{sys}) \Rightarrow$  calcula a matriz de transferência  
 $G = C(sI - A)^{-1}B + D$
- 3  $\text{minreal}(G) \Rightarrow$  realiza os possíveis cancelamentos polo-zero na matriz de transferência  $G$
- 4  $\text{zpk}(G) \Rightarrow$  coloca cada elemento de  $G$  na forma fatorada
- 5  $MC = \text{ctrb}(A, B) \Rightarrow$  calcula a matriz de controlabilidade  $C$
- 6  $MO = \text{obsv}(A, C) \Rightarrow$  calcula a matriz de observabilidade  $O$
- 7  $\text{svd}(M) \Rightarrow$  calcula os valores singulares de uma matriz  $M$ . O número de valores singulares não-nulos é igual a  $\text{posto}(M)$ . Utilizar o comando  $\text{svd}$  para calcular o posto de uma matriz  $M$  é numericamente mais robusto do que determinar o posto de  $M$  diretamente pelo comando  $\text{rank}(M)$ .

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

**Exemplo 1 (Sistema Plataforma – usado no estudo de sistemas de suspensão de automóveis):**

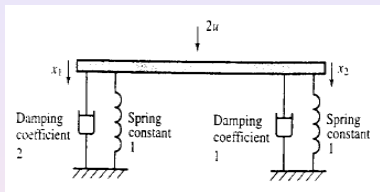


Figura: Sistema plataforma.

A equação de estado deste sistema é dada por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u$$

Como

$$C = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C) = 2 \quad (\det(C) = -0.25)$$

concluimos que o sistema é controlável.

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

**Exemplo 2:** Considere um sistema SISO ( $m = p = 1$ ) com  $n = 4$  estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} x$$

Temos que

$$C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(C)}_{(\det(C)=36)} = 4$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{posto}(\mathcal{O})}_{(\det(\mathcal{O})=1)} = 4$$

Assim, o sistema é controlável e observável.

## 2.3. Controlabilidade e Observabilidade

**Exemplo 3:** Considere (novamente) o sistema SISO ( $m = p = 1$ ) com  $n = 2$  estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = 0.5(x_1 + x_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{=C} x$$

Temos que

$$C = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C) = 2 \quad (\det(C) = 10)$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(O) = 1 \quad (\det(O) = 0)$$

Portanto, o sistema é controlável, mas não é observável.

Ressaltamos que este sistema SISO não poderia ser controlável e observável, pois há um cancelamento polo-zero em sua função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}$$



## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

De agora em diante, vamos considerar sistemas LTI modelados por ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx$$

ou seja,  $D = 0$  (sem transmissão direta entre o vetor de entrada e o vetor de saída). Considere a **realimentação (linear) de estado**

$$u = r - Kx \quad (\text{ou seja, } u(t) = r(t) - Kx(t) \in \mathbb{R}^m, \text{ para } t \geq 0)$$

onde  $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$  é a nova entrada (vetor de referência ou uma nova realimentação de estado) e  $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz **constante**. Note que a  $i$ -ésima componente do controle  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$  é dada por

$$u_i(t) = r_i(t) - \sum_{j=1}^n k_{ij}x_j = r_i(t) - (k_{i1}x_1(t) + \dots + k_{in}x_n(t)), \quad t \geq 0$$

para  $i = 1, \dots, m$ . Denominamos  $K$  de **matriz de ganho** ou, simplesmente, de **ganho de realimentação**.

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

Substituindo tal realimentação no modelo de estado acima, obtemos o sistema em **malha-fechada**

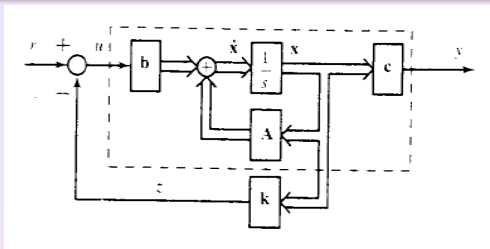
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Logo, a matriz de transferência em **malha-fechada** é dada por

$$G_{MF}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G_{MF}(s)R(s)$$

Desse modo, todo polo de  $G_{MF}(s)$  é um polo (autovalor) da matriz  $A - BK$ , ou seja, uma realimentação de estado  $u = r - Kx$  desloca os polos da matriz de transferência em **malha-aberta**  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  para os polos de  $G_{MF}(s)$ . No entanto, pode-se demonstrar que uma **realimentação de estado** da forma  $u = r - Kx$  **não afeta os zeros** de  $G(s)$ , ou seja,  $G(s)$  e  $G_{MF}(s)$  possuirão os **mesmos zeros** caso não ocorra nenhum cancelamento polo-zero em  $G_{MF}(s)$ .

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado



**Figura:** Sistema em malha-fechada com a realimentação (linear) de estado  $u = r - Kx$ .

**Definição (Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos):** Encontrar uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que os todos pólos da matriz  $(A - BK)$  do sistema em malha-fechada sejam posicionados arbitrariamente no plano complexo, onde  $u = r - Kx$  é a realimentação de estado. Em particular, se todos os pólos de  $(A - BK)$  forem posicionados no SPE, então asseguramos que  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada e que a matriz de transferência  $G_{MF}(s)$  é BIBO estável.

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

O próximo resultado garante que a controlabilidade é preservada por uma realimentação de estado da forma  $u = r - Kx$ :

**Teorema 1:** O par  $(A, B)$  é controlável **se e somente se** o par  $(A - KB, B)$  é controlável, onde  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é qualquer matriz constante.

Este resultado abaixo assegura que o **Problema de Estabilização por Realimentação de Estado com Imposição de Pólos** sempre tem solução para sistemas controláveis:

**Teorema 2:** Os pólos da matriz  $A - BK$  podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  **se e somente se** o par  $(A, B)$  é controlável.

**Obs:** Veremos como determinar uma matriz  $K$  adequada na Seção 2.7.

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

**Exemplo:** Considere o sistema SISO ( $m = p = 1$ ) com  $n = 2$  estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=C} x$$

Temos que

$$C = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C) = 2 \quad (\det(C) = 2)$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(O) = 2 \quad (\det(O) = -10)$$

Logo, o sistema é controlável e observável. Temos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s}{(s - 3.449)(s + 1.449)}$$

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

**Exemplo (continuação):** Agora, considere a realimentação de estado

$$u = r - \underbrace{[3 \quad 1]}_{=K} x = r - 3x_1 - x_2$$

Assim, o sistema em malha-fechada é dado por

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A-BK} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} r, \quad y = \underbrace{[1 \quad 2]}_{=C} x$$

Temos que

$$\mathcal{C}_{MF} = [B \quad (A - BK)B]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}_{MF}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}_{MF}) = 2)$$

$$\mathcal{O}_{MF} = \begin{bmatrix} C \\ C(A - BK) \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}_{MF}) = 1 \quad (\det(\mathcal{O}_{MF}) = 0)$$

Logo, o sistema em malha-fechada é controlável (como tinha que ser pelo Teorema 1 acima), mas não é observável.

## 2.4. Estabilização por Realimentação de Estado

**Exemplo (continuação):** Como o sistema é SISO, sabemos que terá que ocorrer um cancelamento polo-zero na função de transferência em malha-fechada (veja o Teorema da Seção 2.3). De fato, a função de transferência em malha-fechada é dada por

$$G_{MF}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{2s}{s(s-1)} = \frac{2}{(s-1)}$$

**Concluimos assim que uma realimentação de estado da forma  $u = r - Kx$  pode fazer com que um sistema observável se torne não-observável em malha-fechada.**

## 2.5. Estimador de Estado

Definimos na seção anterior o conceito de realimentação de estado:

$$u = r - Kx$$

Relembre que isto significa que

$$u(t) = r(t) - Kx(t), \quad t \geq 0$$

**Sempre que escolhemos uma dada realimentação de estado, fica implícito que estamos assumindo que todas as variáveis de estado  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  do vetor de estado  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^n$  podem ser realimentadas, ou seja, todas elas podem ser medidas por sensores.** No entanto, isto nem sempre será possível, pois: (a) podemos não ter acesso direto a certas variáveis de estado (a corrente num certo indutor, por exemplo); (b) os sensores necessários podem não estar disponíveis para uso ou serem em número insuficiente (precisamos de dois tacogeradores, mas só temos um disponível, por exemplo); e/ou (c) os sensores que precisamos são muito caros.



## 2.5. Estimador de Estado

Uma alternativa para tal problema é a seguinte: projetarmos um dispositivo que estime as variáveis de estado que não podem ser medidas diretamente. Tal sistema é denominado de **estimador de estado** ou **observador de estado**. Denotaremos por  $\hat{x}$  uma certa estimação do vetor de estado  $x$ .

Considere um sistema LTI ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx$$

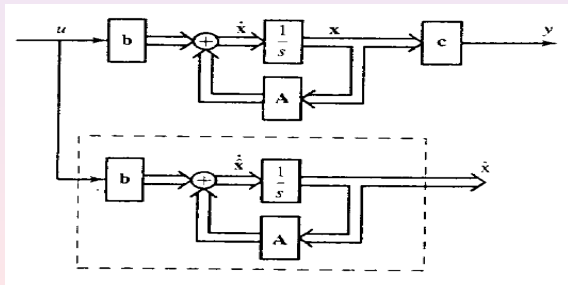
Assuma que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  são conhecidas e que tanto a entrada  $u(t)$  quanto a saída  $y(t)$  podem ser medidas, para  $t \geq 0$ . No entanto, consideramos que o vetor de estado  $x(t)$  não pode ser medido. O problema é então obtermos uma estimação adequada  $\hat{x}(t)$  do vetor estado  $x(t)$ , para  $t \geq 0$ .

## 2.5. Estimador de Estado

Uma ideia bem simples é definirmos um **estimador de estado de malha-aberta** como uma réplica da equação de estado sistema original:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

Assim, se  $\hat{x}(0) = x(0)$ , então, para qualquer entrada aplicada  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , teremos que  $\hat{x}(t) = x(t)$ , para  $t \geq 0$ . Desse modo, o problema passa a ser determinarmos a condição inicial  $x(0)$ .



**Figura:** Estimador de estado de malha-aberta, o qual pode ser implementado através de amp-ops, por exemplo.

## 2.5. Estimador de Estado

Suponha que o sistema original é observável. Logo, podemos determinar  $x(0)$  a partir de  $u(t)$  e  $y(t)$ , para  $t$  pertencente a um certo intervalo, digamos  $t \in [0, t_1]$ . Assim, é possível calcularmos  $x(t_2)$  a partir da expressão analítica explícita da solução  $x(t)$  (veja a Seção 2.1), onde  $t_2 \geq t_1$ , e então escolhemos  $\hat{x}(t_2) = x(t_2)$ . Com isso,  $\hat{x}(t) = x(t)$ , para  $t \geq t_2$ , ou seja, teremos uma estimação exata do vetor de estado  $x(t)$ . Concluimos então que se o sistema original for observável, então o estimador de estado de malha-aberta acima soluciona o problema de estimação.

No entanto, tal estimador de malha-aberta apresenta algumas limitações. Primeiramente, toda vez que formos utilizar o estimador, sua condição inicial terá que ser determinada a partir da propriedade de observabilidade do sistema original.

## 2.5. Estimador de Estado

Além disso, ao considerarmos o erro de estimação

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , temos que o mesmo é solução da seguinte equação de estado

$$\dot{e} = x - \hat{x} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu) = A(x - \hat{x}) = Ae$$

Note que  $e = 0$  é um ponto de equilíbrio. Assim, se

$e(t_2) = x(t_2) - \hat{x}(t_2) = 0$  (i.e.  $x(t_2) = \hat{x}(t_2)$ ), então  $e(t) = 0$ , ou seja,  $\hat{x}(t) = x(t)$ , para  $t \geq t_2$ . Mas, na prática, sempre teremos que  $\hat{x}(t_2) \neq x(t_2)$  devido a pequenas perturbações/ruídos externos. O problema então se agrava quando a matriz  $A$  possui algum polo com parte real positiva, de modo que  $e = 0$  é um ponto de equilíbrio instável (relembre que  $e(t) = \exp(At)e(t_2)$ ,  $t \geq t_2$ ). Em tal caso, mesmo que tenhamos  $\hat{x}(t_2) \cong x(t_2)$ , poderemos ter uma magnitude relativamente grande para o erro de estimação  $e(t)$  no decorrer do tempo.

## 2.5. Estimador de Estado

Estas restrições podem ser facilmente contornadas se injetarmos a saída  $y(t)$  do sistema no estimador de estado de malha-aberta através do acréscimo de um termo de correção da forma  $L(y - C\hat{x})$ , onde  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é uma matriz **constante**:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Ressaltamos que, como  $y = Cx$ , podemos considerar que  $\hat{y} = C\hat{x}$  é uma estimacão da saída  $y$ . Assim, o termo de correção adicionado  $L(y - C\hat{x})$  corresponde a multiplicarmos o erro de estimacão da saída  $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$  pela matriz (de ganho)  $L$ . Com tal modificacão, temos que a dinâmica do erro de estimacão do estado  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  é dada pela seguinte equacão de estado:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})] \\ &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})] \\ &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e\end{aligned}$$

## 2.5. Estimador de Estado

Desse modo, mostramos que estimador de estado definido por

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

assegura que

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

onde  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  é o erro de estimação. Suponha que a matriz  $L$  foi escolhida de modo que todos os polos da matriz  $A - LC$  estão no SPE. Assim,  $e = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Em particular, dada qualquer condição inicial  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  para o erro de estimação, teremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0,$$

ou seja, o erro de estimação  $e(t)$  converge assintoticamente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.5. Estimador de Estado

Portanto, mesmo que em um certa situação prática seja possível determinarmos uma estimação adequada da condição inicial  $x(0)$  do sistema, sempre teremos que  $\hat{x}(0) \neq x(0)$  devido a pequenas perturbações/ruídos externos. No entanto, isto não será problema, pois o estimador de estado acima garante que  $\hat{x}(t) \cong x(t)$  para  $t \geq 0$  suficientemente grande. Além disso, em situações reais em que não temos a mínima ideia de qual seria uma estimação adequada da condição inicial  $x(0)$  do sistema, sempre poderemos escolher  $\hat{x}(0) = 0$ , pois teremos  $\hat{x}(t) \cong x(t)$  para  $t \geq 0$  suficientemente grande.

## 2.5. Estimador de Estado

Considere uma planta (sistema LTI) modelada por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\star)$$

$$y = Cx$$

Assuma que as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são conhecidas e que tanto a entrada  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  quanto a saída  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  podem ser medidas, para  $t \geq 0$ .

Denominamos o sistema

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

de **estimador de estado assintótico** (ou **observador de estado assintótico** ou, simplesmente, **observador**) da planta  $(\star)$  acima quando, para qualquer erro de estimação inicial  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . A matriz  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é denominada de **matriz de ganho do observador**. De acordo com a exposição anterior, este sistema corresponderá a um observador caso todos os polos da matriz  $A - LC$  estejam no SPE, pois  $\dot{e} = (A - LC)e$ . O próximo resultado estabelece que isto será atingido sempre que a planta  $(\star)$  for observável.



## 2.5. Estimador de Estado

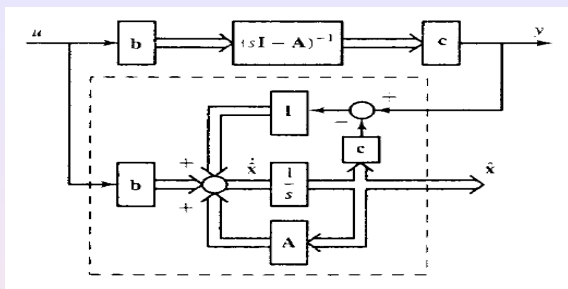


Figura: Planta (acima) com seu observador (abaixo).

**Teorema:** Todos os polos da matriz  $A - LC$  podem ser posicionados arbitrariamente no plano complexo pela escolha adequada de uma matriz constante  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$  **se e somente** o par  $(A, C)$  é observável.

**Obs:** Veremos como determinar uma matriz  $L$  adequada na Seção 2.7.

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Considere uma planta modelada por ( $n$  estados,  $m$  entradas e  $p$  saídas)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Relembre da Seção 2.5. que, fixada uma realimentação de estado  $u = r - Kx$ , temos que o sistema em malha-fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

e que todos os polos da matriz  $A - BK$  podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par  $(A, B)$  for controlável.

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Relembre também da Seção 2.6. que, caso o vetor de estado  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  da planta não puder ser realimentado (medido), podemos utilizar o observador (assintótico)

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

para obtermos uma estimação  $\hat{x}(t)$  de  $x(t)$ , sendo que todos os polos de  $A - LC$  ( $\dot{e} = (A - LC)e$ , com  $e = x - \hat{x}$ ) podem ser arbitrariamente posicionados no SPE quando o par  $(A, C)$  for observável.

Surge então a seguinte pergunta: Na situação em que o vetor de estado  $x(t)$  da planta não pode ser realimentado (medido), o que acontece se realimentarmos o estado estimado  $\hat{x}(t)$  no lugar de  $x(t)$ , ou seja, se aplicarmos na planta

$$u = r - K\hat{x} \quad ?$$

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Isto é ilustrado na Figura abaixo. Tal estrutura de controle é denominada de **configuração controlador-observador**. Note que o vetor de estado deste sistema é  $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$ .

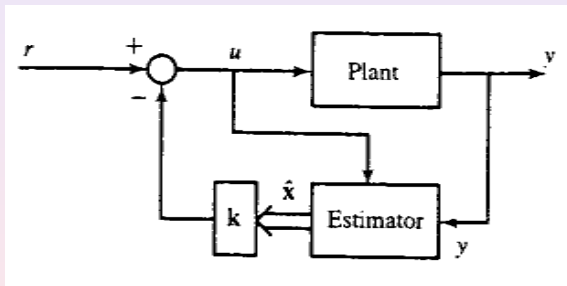


Figura: Configuração controlador-observador.

Vamos responder na sequência a pergunta que acabamos de levantar.

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Temos a planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

e o observador

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Substituindo  $y = Cx$  no observador, substituindo

$$u = r - K\hat{x}$$

em ambos, e definindo o vetor de estado  $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{2n}$ , obtemos assim o modelo de estado da configuração controlador-observador:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{=\tilde{B}} r,$$

$$y = \underbrace{[C \ 0]}_{=\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}$$

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Vamos agora representar o sistema controlador-observador em novas coordenadas  $z = T\tilde{x}$ , onde  $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  é invertível. Isto permitirá responder nossa pergunta de maneira fácil e direta.

Considere a mudança (linear) de coordenadas

$$z = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{=T} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}}_{=\tilde{x}}$$

Note que  $T^{-1} = T$ . Nas novas coordenadas  $z = T\tilde{x}$ , o modelo de estado do sistema controlador-observador é dado por :

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \dot{z} = T\dot{\tilde{x}} = T(\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r) = T\tilde{A} \underbrace{\tilde{x}}_{=T^{-1}z} + T\tilde{B}r = T\tilde{A}T^{-1}z + T\tilde{B}r \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}}_{=T\tilde{A}T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{=T\tilde{B}} r, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} = \tilde{C}T^{-1}z \\ &= \underbrace{[C \ 0]}_{=\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}}_{=z}\end{aligned}$$

Relembre de Álgebra Linear que como a matriz  $T\tilde{A}T^{-1}$  é bloco triangular, temos que o conjunto dos autovalores de  $T\tilde{A}T^{-1}$  é igual à união (com repetição) do conjunto dos autovalores de  $A - BK$  com o conjunto dos autovalores de  $A - LC$ .

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

Relembre também que os autovalores das matrizes  $\tilde{A}$  e  $T\tilde{A}T^{-1}$  coincidem, pois

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - T\tilde{A}T^{-1}) &= \det(\lambda \underbrace{TT^{-1}}_{=I} - T\tilde{A}T^{-1}) = \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) \\ &= \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) = \det((\lambda I - A) \underbrace{T^{-1}T}_{=I}) \\ &= \det(\lambda I - A)\end{aligned}$$

Mostramos assim que os autovalores da matriz  $\tilde{A}$  do sistema controlador-compensador são a união (com repetição) dos autovalores das matrizes  $A - BK$  e  $A - LC$ .



## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

**Suponha que a planta é controlável e observável.** Concluimos então que (agora chegamos na resposta da pergunta levantada):

- (a) Os autovalores da matriz  $\tilde{A}$  do sistema controlador-compensador podem ser arbitrariamente posicionados SPE por uma escolha **independente** das matrizes de ganho  $K$  e  $L$ :  $K$  corresponde ao controlador  $u = r - K\hat{x}$  (realimentação baseada no estado estimado para os autovalores de  $A - BK$ ) e  $L$  corresponde ao observador  $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$  (para os autovalores de  $A - LC$ ). Isto assegurará que  $\tilde{x} = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e, assim,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \hat{x}(t)) = 0$  para qualquer  $\tilde{x}(0) = (x(0), \hat{x}(0))$  (com  $r = 0$ ). Em particular,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  (com  $r = 0$ ).

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

- (b) O projeto das matrizes de ganho  $K$  e  $L$  para o posicionamento dos polos da matriz  $\tilde{A}$  no SPE é realizado **como se** o vetor de estado  $x(t)$  da planta pudesse ser efetivamente medido e utilizássemos o controlador  $u = r - Kx$  na planta (o sistema em malha-fechada seria  $\dot{x} = (A - BK)x + Br$ ,  $y = Cx$ ), e **como se** o observador  $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$  para a planta fosse independente de tal realimentação de estado! Tal propriedade é denominada de **princípio da separação**.

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

(c) Para o sistema controlador-observador, lembre que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r, \quad y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Assim, percebemos que a dinâmica do erro de estimação  $e = x - \hat{x}$  é dada por  $\dot{e} = (A - LC)e$ , ou seja, a mesma independe do vetor de estado  $x(t)$  e do ganho  $K$ . Suponha que os polos de  $A - LC$  são rápidos, ou seja, estão relativamente longe da origem (no SPE!). Assim, para  $t \geq 0$  suficientemente grande, tudo se passa como se  $e(t) = 0$ , ou seja,  $\hat{x}(t) = x(t)$  (estimação exata). Consequentemente, para  $t \geq 0$  grande, percebemos que tudo se passa como se

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br, \quad y = Cx$$

o que coincide com o modelo em malha-fechada da planta com a realimentação de estado  $u = r - Kx$ ! **Uma prática comum é escolhermos os pólos de  $A - LC$  em torno de cinco vezes mais rápidos que os polos de  $A - BK$  (SPE!)**

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

- (d) Pode-se demonstrar que a matriz de transferência do sistema controlador-observador é dada por

$$G(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B, \quad \text{com } Y(s) = G(s)R(s)$$

o que coincide a matriz de transferência da planta em malha-fechada com a realimentação de estado  $u = r - Kx$  (veja a Seção 2.4.)! Justificativa: a matriz de transferência pressupõe que a condição inicial do sistema controlador-observador é nula, ou seja,  $\hat{x}(0) = x(0) = 0$ . Logo,  $e(0) = 0$  e, assim,  $e(t) = 0, t \geq 0$ . Desse modo, a relação entre  $R(s)$  e  $Y(s)$  é determinada por (veja o Item (c) acima)

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br, \quad y = Cx$$

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

**Exemplo:** Considere a planta SISO ( $m = p = 1$ ) com  $n = 2$  estados e

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{=C} x = x_1$$

Os autovalores de  $A$  são:  $\pm\sqrt{20}$ . Logo, a origem  $x = 0$  é instável ( $u = 0$ ). Devemos então projetar um controlador que estabilize o sistema em malha-fechada. Temos que

$$C = [B \quad AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C) = 2 \quad (\det(C) = -1)$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(O) = 2 \quad (\det(O) = 1)$$

Logo, o sistema é controlável e observável, e assim, podemos posicionar arbitrariamente os polos de  $A - BK$  e  $A - LC$  no SPE para uma escolha adequada de  $K$  e  $L$ .

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

**Exemplo (continuação):** Note que  $y = x_1$ . Suponha que a variável de estado  $x_2$  não pode ser medida. Pelo propriedade da separação, podemos projetar as matrizes de ganho  $K$  (da realimentação do estado estimado) e  $L$  (do observador) de maneira independente e como se pudéssemos aplicar a realimentação de estado  $u = r - Kx$  na planta. Considere que:

- Os polos desejados referentes à realimentação, i.e. para a matriz  $A - BK$  do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado  $u = r - Kx$ , são:  $-1.8 \pm j2.4$
- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz  $A - LC$  de  $\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly$ , são:  $-8, -8$

Uma escolha adequada é (mostraremos na Seção 2.7 os cálculos realizados na determinação de  $K$  e  $L$ ):

$$K = [29.6 \quad 3.6], \quad L = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

## 2.6. Realimentação de Estado Baseada nos Estados Estimados

**Exemplo (continuação):** Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8$$

Como o estado  $x_2$  não pode ser realimentado (medido), devemos utilizar a configuração controlador-observador com:

- Controlador:  $u = r - K\hat{x} = r - 29.6\hat{x}_1 - 3.6\hat{x}_2$  (realimentação do estado estimado)
- Observador:  $\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly$

Logo, os polos da configuração controlador-observador são:

$-1.8 \pm j2.4, -8, -8 \in \text{SPE}$ . Assim,  $\tilde{x} = (x, \hat{x}) = 0$  é globalmente assintoticamente estável.

**Simulações:** veja o arquivo

ExemploControladorObservador.mdl no Moodle

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

### 1. Caso SISO ( $m = p = 1$ )

- **Determinação de  $K = [k_1 \ \dots \ k_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$**

- 1 Verifique que par  $(A, B)$  é controlável ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ )
- 2 Seja  $\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$   
(polinômio característico de  $A$ )
- 3 Seja  $v_n = B$  e calcule  $v_{i-1} = Av_i + a_{i-1}B \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = n, \dots, 2$   
(vetores coluna)
- 4 Defina a matriz  $T = [v_1 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- 5 Sejam  $p_1, \dots, p_n$  os polos desejados para  $A - BK$ . Assim, o polinômio característico de  $A - BK$  é dado por  
 $\det(sI - (A - BK)) = (s - p_1) \cdots (s - p_n) =$   
 $s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0$
- 6 Defina o vetor  $\overline{K} = [d_0 - a_0 \ \dots \ d_{n-1} - a_{n-1}]$
- 7 Escolha  $K = \overline{K} T^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Isto garante que os polos de  $A - BK$  são  $p_1, \dots, p_n$



## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

### 1. Caso SISO ( $m = p = 1$ )

#### • Determinação de $L = [\ell_1 \ \dots \ \ell_n]' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (por dualidade)

- 1 Verifique que par  $(A, C)$  é observável ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ )
- 2 Sejam  $p_1, \dots, p_n$  os polos desejados para  $A - LC$
- 3 Seja  $\tilde{A} = A'$  e  $\tilde{B} = C'$ . Assim, o par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  é controlável
- 4 Siga o procedimento acima de modo a determinar  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tal que os polos de  $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$  sejam  $p_1, \dots, p_n$  (relembre que  $\det(sI - A) = \det(sI - A')$ )
- 5 Escolha  $L = \tilde{K}' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Isto garante que os polos de  $A - LC$  são  $p_1, \dots, p_n$ , pois  $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})' = (\tilde{A})' - (\tilde{K})'(\tilde{B})' = A - LC$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

### 2. Caso MIMO

- **Determinação de  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$**

- 1 Verifique que par  $(A, B)$  é controlável ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ )
- 2 Sejam  $p_1, \dots, p_n$  os polos desejados para  $A - BK$
- 3 Escolha quaisquer  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $N \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  (vetor coluna) de modo que o par  $(A - BM, BN)$  seja controlável
- 4 Sejam  $A_1 = A - BM \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_1 = BN \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Assim, o par  $(A_1, B_1)$  é controlável
- 5 Siga o procedimento anterior do caso SISO de modo a determinar  $K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tal que os polos de  $A_1 - B_1 K_1$  sejam  $p_1, \dots, p_n$
- 6 Escolha  $K = M + NK_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Isto garante que os polos de  $A - BK$  são  $p_1, \dots, p_n$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Obs:** No Passo 3 acima, o **probabilidade** de escolhermos  $M, N$  de modo que o par  $(A - BM, BN)$  seja **não-controlável** é igual a **zero**, ou seja, a **probabilidade** do par  $(A - BM, BN)$  ser **controlável** para um “chute aleatório” de  $M, N$  é igual a **um**. Existem métodos para se determinar a matriz de ganho  $K$  no caso MIMO que não envolvem “chutes aleatórios”. No entanto, isto não será visto no nosso curso, mas sim na disciplina *Controle Multivariável*. O comando **place** do Matlab utiliza um algoritmo de otimização para determinar  $K$ , com a restrição de que a multiplicidade de cada polo não seja superior ao número  $m$  de entradas.

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

### 2. Caso MIMO

- **Determinação de  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  (por dualidade)**

- 1 Verifique que par  $(A, C)$  é observável ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )
- 2 Sejam  $p_1, \dots, p_n$  os polos desejados para  $A - LC$
- 3 Seja  $\tilde{A} = A'$  e  $\tilde{B} = C' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Assim, o par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  é controlável
- 4 Siga o procedimento anterior de modo a determinar  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que os polos de  $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$  sejam  $p_1, \dots, p_n$
- 5 Escolha  $L = \tilde{K}' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Isto garante que os polos de  $A - LC$  são  $p_1, \dots, p_n$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Obs:** Quando  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável, sabemos que podemos posicionar arbitrariamente os polos de  $A - BK$  (realimentação) e de  $A - LC$  (observador) no SPE para uma escolha adequada das matrizes de ganho  $K$  e  $L$ , respectivamente. No entanto, uma dificuldade técnica é como escolher tais polos (de maneira geral temos vários polos a serem posicionados). Por exemplo, os polos de  $A - BK$ , referentes à realimentação  $u = -Kx$ , influenciam no regime transitório de  $x(t)$  (oscilação e taxa de convergência) e também no esforço de controle (magnitude e energia de  $u(t) = -Kx(t)$ ). O método denominado **Controle Ótimo** posiciona os polos de  $A - BK$  e determina a matriz de ganho  $K$  de modo a minimizar uma certa função custo, a qual corresponde a uma ponderação entre a energia do vetor de estado  $x(t)$  e a energia da realimentação  $u(t) = -Kx(t)$ .

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Obs (continuação):** Por outro lado, os polos de  $A - LC$ , referentes ao observador, determinam o regime transitório do erro de estimação  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , mas também influenciam na atenuação/amplificação de ruídos externos. O **Filtro de Kalman** posiciona os polos de  $A - LC$  e determina a matriz de ganho  $L$  do observador de modo a minimizar o efeito de tais ruídos no sistema. Tanto **Controle Ótimo** quanto o **Filtro de Kalman** não serão vistos no nosso curso, mas sim na disciplina *Controle Multivariável*.

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 1:** Considere novamente a planta SISO do exemplo da Seção 2.6:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u, \quad y = \underbrace{[1 \ 0]}_{=C} x = x_1$$

Relembre que:

- Os polos desejados referentes ao controlador, i.e. para a matriz  $A - BK$  do sistema em malha-fechada com a realimentação de estado  $u = r - Kx$ , são:  $-1.8 \pm j2.4$
- Os polos desejados referentes ao observador, i.e. para a matriz  $A - LC$  da dinâmica  $\dot{e} = (A - LC)e$  do erro, são:  $-8, -8$

Vamos agora determinar  $K$  e  $L$  através dos procedimentos apresentados acima.

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 1 (continuação):** Começaremos calculando  $K$ :

- 1 Já verificamos na Seção 2.6 que o sistema é controlável
- 2  $\det(sI - A) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_0$  (polinômio característico de  $A$ )
- 3 Considere

$$v_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = Av_2 + a_1B = AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 4 Considere  $T = [v_1 \ v_2] = I$
- 5 Os polos desejados para  $A - BK$  são:  $-1.8 \pm j2.5$ . Assim, o polinômio característico de  $A - BK$  é dado por  $\det(sI - (A - BK)) = (s - (-1.8 + j2.4))(s - (-1.8 - j2.4)) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + d_1s + d_0$
- 6 Defina o vetor  $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [29.6 \ 3.6]$
- 7 Escolha  $K = \bar{K}T^{-1} = \bar{K} = [29.6 \ 3.6]$



## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 1 (continuação):** Agora, calcularemos  $L$ :

① Já verificamos na Seção 2.6 que o sistema é observável

② Sejam

$$\tilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③  $\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A) = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_0$

④ Considere

$$v_2 = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \tilde{A}v_2 + a_1\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⑤ Considere  $T = [v_1 \ v_2] = I$

⑥ Os polos desejados para  $A - LC$  são:  $-8, -8$ . Assim, o polinômio característico de  $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$  é dado por  $\det(sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})) = (s - (-8))(s - (-8)) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + d_1s + d_0$

⑦ Defina o vetor  $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [84.6 \ 16]$

⑧ Calcule  $\tilde{K} = \bar{K}T^{-1} = \bar{K} = [84.6 \ 16]$ , e então escolha  $L = \tilde{K}' = [84.6 \ 16]'$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 1 (continuação):** Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.8 \pm j2.4$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -8$$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 2:** Considere que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Temos que

$$\mathcal{C} = [B \quad AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{C}) = 2 \quad (\det(\mathcal{C}) = 100)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \quad (\det(\mathcal{O}) = -1)$$

Logo,  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável. Considere que os polos desejados para  $A - BK$  são  $\{-4, -4\}$ , e que os polos desejados para  $A - LC$  são  $\{-12, -12\}$ .

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 2 (continuação):** Começaremos calculando  $K$ :

- 1 Já verificamos que  $(A, B)$  é controlável
- 2  $\det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1s + a_0$  (polinômio característico de  $A$ )
- 3 Considere

$$v_2 = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad v_1 = Av_2 + a_1B = AB + B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 4 Considere  $T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$
- 5 Os polos desejados para  $A - BK$  são:  $-4, -4$ . Assim, o polinômio característico de  $A - BK$  é dado por  $\det(sI - (A - BK)) = (s+4)(s+4) = s^2 + 8s + 16 = s^2 + d_1s + d_0$
- 6 Defina o vetor  $\bar{K} = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [16 - 5\sqrt{2} \ 7]$
- 7 Escolha  $K = \bar{K}T^{-1} = [0.8929 \ 0.7]$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 2 (continuação):** Agora, calcularemos  $L$ :

- 1 Já verificamos que  $(A, C)$  é observável
- 2 Sejam

$$\tilde{A} = A' = \begin{bmatrix} 0 & -5\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 3  $\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - A) = s^2 + s + 5\sqrt{2} = s^2 + a_1s + a_0$
- 4 Considere

$$v_2 = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \tilde{A}v_2 + a_1\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 5 Considere

$$T = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

### Exemplo 2 (continuação):

- Os polos desejados para  $A - LC$  são:  $-12, -12$ . Assim, o polinômio característico de  $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$  é dado por  $\det(sI - (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})) = (s + 12)(s + 12) = s^2 + 24s + 144 = s^2 + d_1s + d_0$
- Defina o vetor  $\bar{K} = [d_0 - a_0 \quad d_1 - a_1] = [144 - 5\sqrt{2} \quad 23]$
- Calcule  $\tilde{K} = \bar{K}T^{-1} = [23 \quad 113.9289]$ , e então escolha  $L = \tilde{K}' = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}$

Verificação:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -23 & 1 \\ -121 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\gamma I - (A - LC)) = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = -12$$

## 2.7. Determinação das Matrizes de Ganho $K$ e $L$ para Imposição de Polos

**Exemplo 3:**

## 2.8. Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação

Veja o Lab 7.



## 2.9. Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação com Observador de Estado

Veja o Lab 8.

## 3. Controle Linear de Sistemas Não-Lineares

Este capítulo trata de técnicas de controle linear para sistemas não-lineares. Veremos como os controladores vistos no Capítulo 2 podem ser utilizados em sistemas não-lineares.

### 3.1. Estabilidade de Lyapunov

No decorrer de toda esta seção, consideremos sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

onde  $x \in D$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^1$  (i.e. a aplicação  $\partial f / \partial x: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  (matriz jacobiana) é contínua). Relembre do Lab 3 que  $x^e \in D$  é um **ponto de equilíbrio** (ou **ponto de operação**) do sistema se a solução do sistema para a condição inicial  $x(0) = x^e$  em  $t_0 = 0$  permanece em  $x^e$  para todo tempo futuro, ou seja,  $x(t) = x^e$ , para  $t \geq 0$ , é a solução do sistema para  $x(0) = x^e$  em  $t_0 = 0$ .

Relembramos também os próximos 2 resultados do Lab 3:

**Proposição:** Temos que  $x^e \in D$  é um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$  **se e somente se**  $f(x^e) = 0$  (ou seja,  $\dot{x} = 0$ ).

## 3.1. Estabilidade de Lyapunov

**Teorema:** Considere o sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Seja  $x(0) = x_0 \in D$  uma dada condição inicial (em  $t_0 = 0$ ). Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$ , então  $\bar{x} \in D$  é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja,  $f(\bar{x}) = 0$ .

**Definição (Estabilidade de Lyapunov):** Seja  $x^e \in D$  um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Então:

- 1 Dizemos que  $x^e$  é **estável** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0) - x^e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| < \epsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

- 2 Dizemos que  $x^e$  é **instável** quando  $x^e$  não é estável.
- 3 Dizemos que  $x^e$  é **(localmente) assintoticamente estável** quando  $x^e$  é estável e, além disso, existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\|x(0) - x^e\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e$$

- 4 Dizemos que  $x^e$  é **globalmente assintoticamente estável** quando: (a)  $D = \mathbb{R}^n$ , (b)  $x^e$  é estável, e (c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e$  para qualquer  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.1. Estabilidade de Lyapunov

**Obs:** Para sistemas lineares da forma  $\dot{y} = Ay$ , com  $y \in \mathbb{R}^n$ , temos que a origem  $y^e = 0$  é (localmente) assintoticamente estável **se e somente se**  $y^e = 0$  é globalmente assintoticamente estável.

Assim, para sistema lineares, só faz sentido em se falar de estabilidade assintótica global. Relembre do Capítulo 2 que: (a)  $y^e = 0$  é globalmente assintoticamente estável **se e somente se** todos os polos (autovalores) da matriz  $A$  estão no SPE; e (b) se a matriz  $A$  possui algum polo no SPD, então  $y^e = 0$  é instável.

**Definição:** Seja  $x^e \in D$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema  $\dot{x} = f(x)$ . A **região (ou domínio) de atração** de  $x^e$  é o conjunto  $R_A(x^e)$  formado por todas as condições iniciais cujas soluções convergem assintoticamente para  $x^e$ , ou seja,

$$R_A(x^e) = \{x(0) \in D \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e\}$$

Note que  $x^e \in R_A(x^e)$ . Pode-se mostrar que  $R_A(x^e)$  é um conjunto aberto. Note também que, se  $x^e$  é globalmente assintoticamente estável, então  $R_A(x^e) = \mathbb{R}^n$ .

## 3.1. Estabilidade de Lyapunov

O próximo resultado estabelece condições que permitem concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $x^e \in D$  de um sistema não-linear  $\dot{x} = f(x)$  a partir da determinação da estabilidade da origem do sistema linearizado associado. Relembre do Lab 4 que o sistema linearizado associado é dado por

$$y = \underbrace{\left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^e} \right]}_{=A} y = Ay$$

## 3.1. Estabilidade de Lyapunov

**Teorema (Método Indireto de Lyapunov):** Seja  $x^e \in D$  um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$ , e considere a matriz do sistema linearizado associado

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e}$$

Então:

- 1 Se todos os polos (autovalores) da matriz  $A$  estão no SPE, então  $x^e$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema  $\dot{x} = f(x)$ .
- 2 Se ao menos um polo da matriz  $A$  está no SPD, então  $x^e$  é um ponto de equilíbrio instável.

**Obs 1:** Para sistemas lineares ou não-lineares no plano ( $n = 2$ ), esse resultado estabelece que: (a) um ponto de equilíbrio  $x^e$  do tipo nó estável ou foco estável é de fato assintoticamente estável; e (b) um ponto de equilíbrio  $x^e$  do tipo nó instável, foco instável ou sela é de fato instável. Isto justifica a nomenclatura utilizada nos Labs 3 e 4.

## 3.1. Estabilidade de Lyapunov

**Obs 2:** Caso a matriz  $A$  do sistema linearizado possua algum polo em cima do eixo imaginário, então nada podemos concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x^e$  pelo Método Indireto de Lyapunov.

**Exemplo:** Considere o sistema não-linear de 3ª ordem:

$$\dot{x}_1 = -x_2x_3 + 1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_3 - x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_3^2(1 - x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

O único ponto de equilíbrio é  $x^e = (1, 1, 1)$ , pois: (i)  $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3^2(1 - x_3) = 0$  implica que  $x_3 = 0$  ou  $x_3 = 1$ ; (ii) para termos  $f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2x_3 + 1x_3 = 0$  é exigido que  $x_3 = 1$  e, conseqüentemente  $x_2 = 1$ ; (iii)  $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2 = 0$  implica que  $x_1 = 1$ .

## 3.1. Estabilidade de Lyapunov

**Exemplo (continuação):** Agora, linearizando em  $x^e = (1, 1, 1)$ :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e}$$
$$= \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 2x_3 - 3x_3^2 \end{array} \right] \Bigg|_{x=(1,1,1)} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Os autovalores da matriz  $A$  são:  $-1$ ,  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . Logo,  $x^e = (1, 1, 1)$  é (localmente) assintoticamente estável. Ressaltamos que a linearização por si só não permite concluir se a estabilidade assintótica é local ou global, nem determinar (ou estimar) a região de atração.



## 3.2. Ponto de Equilíbrio

Ao longo do restante deste capítulo, vamos considerar equações de estado da forma

$$dx/dt = f(x, u)$$

onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é **aberto**,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle e  $f: D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . Dizemos que o par  $(x^e, u^e)$  é um **ponto de equilíbrio (ou ponto de operação)** do sistema se  $x(t) = x^e$ ,  $t \geq 0$ , é a solução constante do sistema para a condição inicial  $x(0) = x^e$  e entrada constante  $u(t) = u^e$ ,  $t \geq 0$ .

De maneira análoga ao caso autônomo, temos:

**Proposição:** O par  $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$  é um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  **se e somente se**  $f(x^e, u^e) = 0$ .

**Teorema:** Considere o sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ . Seja  $x(0) = x_0 \in D$  uma dada condição inicial (em  $t_0 = 0$ ) e considere que escolhemos uma entrada contínua  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u} \in \mathbb{R}^m$ . Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \in D$ , então  $(\bar{x}, \bar{u}) \in D \times \mathbb{R}^m$  é um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ , ou seja,  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

## 3.2. Ponto de Equilíbrio

**Exemplo:** Considere o pêndulo simples controlado

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

onde  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é o controle (torque) e  $y = x_1 = \theta \in \mathbb{R}$  é a saída.

Para encontramos todos os pontos de equilíbrio

$(x^e, u^e) = ((x_1^e, x_2^e), u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  deste sistema, resolvemos:

$$0 = f_1(x_1^e, x_2^e, u^e) = x_2^e \Rightarrow x_2^e = 0$$

$$0 = f_2(x_1^e, x_2^e, u^e) = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1^e) - \frac{k}{m} x_2^e + \frac{1}{ml^2} u^e \Rightarrow u^e = mgl \sin(x_1^e)$$

Logo, os pontos de equilíbrio são  $(x^e, u^e)$  com

$x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$  e  $u^e = mgl \sin(\delta)$ , onde  $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$

pode ser **arbitrariamente escolhido**.

**Exemplo (continuação):** Isto significa que, se aplicarmos a entrada constante  $u(t) = u^e = mgl \sin(\delta)$ ,  $t \geq 0$ , e a condição inicial do pêndulo for  $x(0) = x^e = (\delta, 0)$  (i.e. ângulo inicial  $\delta$  e velocidade angular inicial nula), então o pêndulo permanecerá parado no ângulo  $\delta \in [0, 2\pi)$ , ou seja,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\delta, 0)$ , para todo  $t \geq 0$ .

### 3.3. Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

onde  $h: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  é de classe  $C^1$ . Suponha que  $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$  é um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja,  $f(x^e, u^e) = 0$ . Definimos então a **saída de equilíbrio**  $y^e = h(x^e) \in \mathbb{R}^p$ .

A expansão em série de Taylor de  $f$  em relação ao ponto de equilíbrio  $(x^e, u^e)$  é dada por

$$f(x, u) = \underbrace{f(x^e, u^e)}_{=0} + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x^e, u=u^e} (x - x^e) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x^e, u=u^e} (u - u^e) + \text{TOS}$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$f(x, u) \cong \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta} + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x^e, u=u^e} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta}$$

para  $x_\delta = x - x^e \cong 0$ ,  $u_\delta = u - u^e \cong 0$ .

### 3.3. Sistema Linearizado

Do mesmo modo, a expansão em série de Taylor de  $h$  em relação a  $x^e$  é dada por

$$h(x) = \underbrace{h(x^e)}_{=y^e} + \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} (x - x^e) + \text{TOS}$$

onde TOS denotam os **termos de ordem superior**. Logo,

$$h(x) - y^e \cong \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} \overbrace{(x - x^e)}^{=x_\delta}$$

para  $x_\delta = x - x^e \cong 0$ .

Agora, fixe uma entrada contínua  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , e seja  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , a solução correspondente do sistema para uma condição inicial  $x(0) \in D$ . Considere: (a) o **desvio**  $x_\delta(t) = x(t) - x^e$  do **estado**  $x(t)$  em relação a  $x^e$ ; (b) o **desvio**  $u_\delta(t) = u(t) - u^e$  da **entrada**  $u(t)$  em relação a  $u^e$ ; e (c) o **desvio**  $y_\delta(t) = y(t) - y^e$  da **saída**  $y(t) = h(x(t))$  em relação a  $y^e$ .

### 3.3. Sistema Linearizado

Assim, quando  $x_\delta(t) = x(t) - x^e \cong 0$ ,  $u_\delta(t) = u(t) - u^e \cong 0$  (pequenos desvios no estado e na entrada), temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) &\cong \underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \bigg|_{x=x^e, u=u^e}}_{=A} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)} + \underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \bigg|_{x=x^e, u=u^e}}_{=B} \overbrace{(u - u^e)}^{=u_\delta} \\ &= Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t)\end{aligned}$$

$$y_\delta(t) = h(x(t)) - y^e \cong \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} \bigg|_{x=x^e}}_{=C} \overbrace{(x(t) - x^e)}^{=x_\delta(t)}$$

Denominamos o sistema linear (estado  $x_\delta \in \mathbb{R}^n$ , entrada  $u_\delta \in \mathbb{R}^m$  e saída  $y_\delta \in \mathbb{R}^p$ )

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e)$$

$$y_\delta = Cx_\delta, \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e)$$

de **sistema linearizado** associado ao ponto de equilíbrio  $(x^e, u^e)$ .

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e suponha que  $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$  é um ponto de equilíbrio, ou seja,  $f(x^e, u^e) = 0$ . Vamos tratar nesta seção do **problema de estabilização por realimentação de estado**: encontrar uma realimentação de estado  $u = \alpha(x)$ , onde  $\alpha: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^1$  com  $\alpha(x^e) = u^e$ , tal que  $x^e \in D$  é um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** do **sistema em malha-fechada**

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, \alpha(x))$$

Note que  $x^e$  é de fato um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada, pois  $\tilde{f}(x^e) = f(x^e, \alpha(x^e)) = f(x^e, u^e) = 0$ .

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

O próximo resultado mostra como solucionar este problema de controle através da estabilização da origem  $x_\delta = 0$  do sistema linearizado por uma realimentação linear de estado da forma  $u_\delta = -Kx_\delta$ . **A ideia principal é:  $u = \alpha(x) = -K(x - x^e) + u^e$  assegura que a linearização do sistema não-linear em fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada.** Em particular, concluímos pelo Teorema de Hartman-Grobman do Lab 4 que, nas proximidades do ponto de equilíbrio  $x^e$ , o retrato de fase do sistema não-linear em malha-fechada terá um comportamento qualitativo semelhante ao do retrato de fase do sistema linearizado em malha-fechada.



### 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Teorema:** Seja  $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$  um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ , e considere a equação de estado do sistema linearizado associado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e)$$

Suponha que o par  $(A, B)$  é controlável, e escolha uma matriz de ganho  $K$  de forma que todos os polos de  $A - BK$  estejam no SPE. Então, a realimentação **linear** de estado

$$u = -K(x - x^e) + u^e \quad (\text{ou seja, } u_\delta = u - u^e = -K(x - x^e) = -Kx_\delta)$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja,  $x^e \in D$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x - x^e) + u^e)$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Prova:** Considere o sistema linearizado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \partial f / \partial x(x^e, u^e), \quad B = \partial f / \partial u(x^e, u^e)$$

Por hipótese, o par  $(A, B)$  é controlável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho  $K$  na realimentação  $u_\delta = -Kx_\delta$  para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de  $A - BK$  estejam no SPE. Assim,

$$u - u^e = u_\delta = -Kx_\delta = -K(x - x^e)$$

e o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta - BKx_\delta = (A - BK)x_\delta$$

Como os polos de  $A - BK$  estão no SPE, temos que  $x_\delta = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Mostraremos que a realimentação linear de estado

$$u = \alpha(x) = -K(x - x^e) + u^e = -Kx + Kx^e + u^e$$

resolve de fato o problema de estabilização. Note que  $\alpha(x^e) = u^e$ .

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

Logo,  $x^e$  é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x, u)|_{u=\alpha(x)} = f(x, -K(x - x^e) + u^e)$$

Vamos aplicar agora o Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 3.2 no sistema em malha-fechada acima. Temos que

$$\tilde{A} = \left. \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x} \right|_{x=x^e} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x^e) = A - BK$$

ou seja, **a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada**. Como todos os polos de  $\tilde{A} = A - BK$  estão no SPE (pela escolha da matriz de ganho  $K$ ), concluímos pelo Método Indireto de Lyapunov que  $x^e$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto encerra a demonstração.

### 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo:** Considere novamente o pêndulo simples controlado da seção anterior

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são  $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  com  $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$  e  $u^e = mg\ell \sin(\delta)$ , onde  $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$  pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere que  $m = k = 0.1$ ,  $g = 10$ ,  $\ell = 1$ . Assim,  $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$ . Supondo que  $x_1^e = \delta = \pi/4 (= 45^\circ)$ , nosso objetivo é encontrar uma realimentação de estado  $u = \alpha(x)$  que estabilize o ponto de equilíbrio  $x^e = (\delta, 0)$  do pêndulo em malha-fechada. Ressaltamos que: (i)  $(\delta, 0)$  não é ponto de equilíbrio para  $u = 0$ ; e (ii) ao aplicarmos a entrada constante  $u(t) = u^e = \sin(\delta)$ ,  $t \geq 0$ , temos que  $x^e = (\delta, 0)$  é um ponto de equilíbrio do tipo foco estável (os autovalores de  $\frac{\partial f}{\partial x}(\delta, 0)$  são  $-0.5 \pm j2.6$ ), mas não é globalmente assintoticamente estável (por exemplo,  $x(0) = (3.12, 0)$  não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio  $x^e = (\delta, 0)$ ).

### 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo (continuação):** Seja  $f = (f_1, f_2)$ . As matrizes  $A$  e  $B$  do sistema linearizado associado são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e} \\ &= \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -10 \cos(\delta) & -1 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -5\sqrt{2} & -1 \end{array} \right] \\ B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1, x_2, u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_1, x_2, u) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e, u=u^e} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \right] \end{aligned}$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo (continuação):** A matriz de controlabilidade é dada por

$$C = [B \ AB]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C) = 2 \ (\det(C) = 100)$$

Logo, o par  $(A, B)$  é controlável. Suponha que os pólos desejados para  $A - BK$  são:  $-4, -4$  (nó estável, em que um pólo em  $s = -4$  corresponde a uma constante de tempo de 0.25 segundo). Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 2.7):

$$K = [k_1 \ k_2] = [0.8929 \ 0.7]$$

Portanto, a realimentação linear de estado

$$\begin{aligned} u &= -K(x - x^e) + u^e = -k_1(x_1 - x_1^e) - k_2(x_2 - x_2^e) + u^e \\ &= -k_1(x_1 - \delta) - k_2 x_2 + \sin(\delta) \\ &= -0.9(x_1 - \pi/4) - 0.7x_2 + \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

soluciona o problema de estabilização.

**Simulações:** veja o arquivo

EstabilizacaoPenduloSimples.mdl no Moodle

### 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

O Teorema anterior soluciona o problema de estabilização quando todos os estados podem ser realimentados (medidos). No entanto, isto não sempre será possível em muitas situações práticas. O próximo resultado apresenta condições para que o problema de estabilização seja solucionado através da realimentação do estado estimado.

**Teorema:** Seja  $(x^e, u^e) \in D \times \mathbb{R}^m$  um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

e considere o sistema linearizado associado

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta, & A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) \\ y_\delta &= Cx_\delta, & C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^e)\end{aligned}$$

Suponha que o par  $(A, B)$  é controlável e que o par  $(A, C)$  é controlável. Escolha matrizes de ganho  $K$  e  $L$  de forma que todos os polos de  $A - BK$  e  $A - LC$  estejam no SPE, respectivamente.

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Teorema (continuação):** Então, o controlador

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + L(y - h(x^e))$$

$$u = \alpha(\hat{x}) = -K\hat{x} + u^e \quad (\text{ou seja, } u_\delta = u - u^e = -K\hat{x})$$

soluciona o problema de estabilização, ou seja,  $(x^e, 0) \in D \times \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada com vetor de estado  $\tilde{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{x} = f(x, u)|_{u=\alpha(\hat{x})} = f(x, -K\hat{x} + u^e)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + L(h(x) - h(x^e))$$

$$y = h(x)$$



### 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Prova:** Considere o sistema linearizado

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bu_\delta, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e)$$

$$y_\delta = Cx_\delta, \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e)$$

Por hipótese,  $(A, B)$  é controlável. Logo, podemos encontrar uma matriz de ganho  $K$  na realimentação  $u_\delta = -Kx_\delta$  para o **sistema linearizado** de forma que todos os polos de  $A - BK$  estejam no SPE. Como  $(A, C)$  é observável, podemos encontrar uma matriz de ganho  $L$  de modo que todos os polos de  $A - LC$  estejam no SPE. Considere o seguinte **observador de estado** para o **sistema linearizado**

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Bu_\delta + Ly_\delta$$

Ao realimentarmos o estado estimado  $\hat{x}$  por  $u_\delta = -K\hat{x}$ , temos o seguinte controlador-observador para o **sistema linearizado**:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu_\delta + Ly_\delta = (A - LC - BK)\hat{x} + LCx_\delta$$

$$u_\delta = -K\hat{x}$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

Logo, o **sistema linearizado em malha-fechada** é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}}_{=\tilde{A}_\delta} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Relembre da Seção 2.6 que os polos da matriz  $\tilde{A}_\delta$  acima são a união (com repetição) dos polos de  $A - BK$  com os polos de  $A - LC$ . Portanto,  $(x_\delta, \hat{x}) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Temos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK)\hat{x} + Ly_\delta = (A - LC - BK)\hat{x} + L(\overbrace{y - h(x^e)}^{= y_\delta = y - y^e}) \\ u - u_e &= u_\delta = -K\hat{x} \end{aligned}$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

Com base no Método Indireto de Lyapunov visto na Seção 3.2, vamos mostrar agora que o controlador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC - BK)\hat{x} + L(y - h(x^e)) = (A - LC - BK)\hat{x} + L(h(x) - h(x^e)) \\ u &= \alpha(\hat{x}) = -K\hat{x} + u^e\end{aligned}$$

resolve de fato o problema de estabilização. Note que  $\alpha(0) = u^e$ . Logo,  $(x^e, 0) \in D \times \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x, \hat{x}) = f(x, u)|_{u=\alpha(\hat{x})} = f(x, -K\hat{x} + u^e) \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{f}(x, \hat{x}) = (A - LC - BK)\hat{x} + L(h(x) - h(x^e))\end{aligned}$$

Seja  $\bar{f} = (\tilde{f}, \hat{f}) : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  e considere o vetor de estado de malha-fechada  $\bar{x} = (x, \hat{x}) \in D \times \mathbb{R}^n$ . Portanto, a equação de estado do sistema em malha-fechada é dada por

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

Assim:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(x^e, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^e, u^e) & \frac{\partial f}{\partial u}(x^e, u^e) \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{x}}(0) \\ L \frac{\partial h}{\partial x}(x^e) & A - LC - BK \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} = \tilde{A}_\delta\end{aligned}$$

ou seja, **a linearização do sistema não-linear em malha-fechada coincide com o sistema linearizado em malha-fechada**. Desse modo, mostramos que todos os polos de  $\bar{A} = \tilde{A}_\delta$  estão no SPE. Pelo Método Indireto de Lyapunov, concluímos que  $(x^e, 0)$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. Isto conclui a demonstração.

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo:** Retomamos o pêndulo simples controlado do exemplo anterior:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{m\ell^2} u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = x_1 = h(x_1, x_2)$$

Vimos que os pontos de equilíbrio são  $(x^e, u^e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  com  $x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\delta, 0)$  e  $u^e = mg\ell \sin(\delta)$ , onde  $x_1^e = \delta \in [0, 2\pi)$  pode ser **arbitrariamente escolhido**. Considere novamente que  $m = k = 0.1$ ,  $g = 10$ ,  $\ell = 1$ ,  $x_1^e = \delta = \pi/4$  ( $= 45^\circ$ ). Desse modo,  $u_e = \sin(x_1^e) = \sin(\delta)$ . No entanto, agora vamos assumir que o estado  $x_2$  (velocidade angular) não pode ser medido (realimentado). Vamos então aplicar o teorema acima.

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo (continuação):** Utilizaremos  $u = -K\hat{x} + u^e$ , com  $K$  como no exemplo anterior, e assim nos resta apenas determinar a matriz de ganho  $L$  do sistema:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + L(y - h(x^e))$$

Note que  $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta$ . A matriz  $C$  do sistema linearizado associado é dada por:

$$C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^e, u^e) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{array} \right] \Bigg|_{x=x^e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathcal{O}) = 2 \quad (\det(\mathcal{O}) = 1)$$

Logo, o par  $(A, C)$  é observável. Suponha que os pólos desejados para  $A - LC$  são:  $-12, -12$ . Assim (veja o Exemplo 2 da Seção 2.7):

$$L = \begin{bmatrix} 23 \\ 113.9289 \end{bmatrix}$$

## 3.4. Estabilização via Sistema Linearizado

**Exemplo (continuação):** Portanto, o controlador (relembre que  $y^e = h(x_1^e, x_2^e) = x_1^e = \delta$ )

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + L(y - \delta)$$

$$u = \alpha(\hat{x}) = -K\hat{x} + u^e = -0.9\hat{x}_1 - 0.7\hat{x}_2 + \sin(\delta)$$

assegura que  $(x^e, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha-fechada. No entanto, ressaltamos que  $(x^e, 0)$  não é globalmente assintoticamente estável. Por exemplo,  $(x(0), \hat{x}(0)) = ((3.12, 5), (0, 0))$  não pertence à região de atração do ponto de equilíbrio  $(x^e, 0)$ , pois a solução correspondente  $(x(t), \hat{x}(t))$ ,  $t \geq 0$ , converge para um outro ponto de equilíbrio (relembre o Teorema da Seção 3.2).

**Simulações:** veja o arquivo

EstabilizacaoPenduloSimples.mdl no Moodle

## 3.5. Rastreamento de Referência e Rejeição de Perturbação do Tipo Degrau via Sistema Linearizado

Veja o Lab 9.



## 4. Controle Não-Linear

Este capítulo trata de técnicas de controle não-linear.

Primeiramente, vamos abordar o problema de desacoplamento. Em seguida, trataremos do problema de rastreamento de saída. Para resolvermos este problema, a ideia central é encontrarmos uma realimentação de estado não-linear de modo que a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada seja dada por uma EDO linear homogênea. Na sequência, apresentaremos a noção de platitude (*flatness*) e sua relação com controlabilidade não-linear e com o problema de rastreamento de saída. Por fim, estudaremos brevemente o problema de linearização exata via mudança de coordenadas e realimentação de estado. Veremos que, para uma certa classe de sistemas não-lineares, existe uma realimentação de estado não-linear que permite o cancelamento exato das não-linearidades do sistema. Neste caso, o sistema em malha-fechada torna-se linear, pelo menos quando ele for descrito em um sistema de coordenadas adequado.

## 4.1. Motivação

Neste momento, vamos retomar o problema de rastreamento de saída para um motor CC visto no Lab 2, e abordaremos também uma questão filosófica. Esta questão reside no fato de que os sinais de referência do tipo degrau são adequados como sinais de teste de desempenho, mas são em geral inadequados para o controle de sistemas. De certo modo, isto contraria os paradigmas de controle clássico, que estabelece o degrau como um bom candidato a sinal de referência.

## 4.1. Motivação

Considere um motor CC (corrente contínua), cujo modelo linear simplificado em espaço de estado é dado por:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  é a tensão externa em Volts aplicada no motor (controle),  $x_1(t) = \theta(t)$  é a posição angular do eixo em rad,  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  é a velocidade angular do eixo em rad/s, e  $y(t) = x_1(t)$  é a saída do sistema. Assumimos que  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  pode ser medido (assim como  $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ ). Suponha que o motor está em repouso em  $t_0 = 0$ , ou seja,  $x_1(0) = \theta(0)$ ,  $x_2(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ . Em controle clássico, geralmente se aborda o seguinte problema de controle: encontrar uma realimentação  $u$  de forma que o eixo do motor atinja um dado ângulo desejado de referência  $\theta_r$  em regime permanente, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_r$$

## 4.1. Motivação

A maneira clássica de se resolver este problema é encontrando um controlador linear de forma que a saída  $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$  rastreie assintoticamente uma referência  $r(t) = \theta_r$  do tipo degrau de amplitude  $\theta_r$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \theta_r$$

No entanto, suponha que, além dos posicionamentos inicial  $\theta(0)$  e final desejado  $\theta_r$ , desejamos também controlar a saída  $y(t)$  entre  $\theta(0)$  e  $\theta_r$ . Em outras palavras, dada uma **saída de referência**  $\bar{y}(t)$ ,  $t \geq 0$ , gostaríamos que a saída real  $y(t) = \theta(t)$  **rastresse assintoticamente**  $\bar{y}(t)$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

onde  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  é o erro de rastreamento.

## 4.1. Motivação

Desse modo, nosso objetivo é resolver o **problema de rastreamento de saída**: determinar uma lei de controle  $u$  que force a saída  $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$  do motor em malha-fechada a rastrear assintoticamente uma saída de referência  $\bar{y}(t)$  escolhida, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

onde  $\bar{y}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  (segunda derivada contínua) e **limitada**.

Considere a **realimentação de estado**

$$u = \alpha(x_1, x_2) + v \triangleq x_2 + v$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada. Assim, em malha-fechada temos que

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = v$$

## 4.1. Motivação

Ao escolhermos a **realimentação de estado dependente do tempo**

$$v = \gamma(x_1, x_2, t) = \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)]$$

onde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  são ganhos a serem ajustados, concluímos que em malha-fechada temos

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) = v(t) &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[x_1(t) - \bar{y}(t)] - k_2[x_2(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - k_1[y(t) - \bar{y}(t)] - k_2[\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] \\ &= \ddot{\bar{y}}(t) - \underbrace{[k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t)]}_{\text{termo PD!}}\end{aligned}$$

ou seja, a dinâmica do erro de rastreamento em malha-fechada é dada pela seguinte EDO linear homogênea:

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0$$

## 4.1. Motivação

Assim, vemos que os pólos do erro de rastreamento  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  em malha-fechada são as raízes de

$$s^2 + k_2s + k_1 = 0$$

Agora, suponha que os pólos de malha-fechada desejados para o erro de rastreamento são  $p_1, p_2$  (SPE!). Logo, devemos ter que

$$s^2 + k_2s + k_1 = (s - p_1)(s - p_2) = \underbrace{s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2}_{\text{polinômio caract. de MF}}$$

ou seja, escolhemos  $k_2 = -(p_1 + p_2), k_1 = p_1p_2$ .

## 4.1. Motivação

Concluimos então que a realimentação

$$\begin{aligned}u &= \alpha(x_1, x_2) + v = x_2 + \gamma(x_1, x_2, t) \\ &= x_2 + \ddot{y}(t) - k_1[x_1 - \bar{y}(t)] - k_2[x_2 - \dot{\bar{y}}(t)]\end{aligned}$$

com  $k_2 = -(p_1 + p_2)$  e  $k_1 = p_1 p_2$ , garante que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

**para quaisquer condições iniciais**  $x_1(0), x_2(0)$ , resolvendo assim o **problema de rastreamento de saída** através de uma **realimentação de estado** adequada.

Ressaltamos que a ideia principal utilizada foi:

- 1 Escolher uma realimentação  $u = \alpha(x_1, x_2) + v$  de modo que  $\ddot{y} = v$ , onde  $v$  é a nova entrada
- 2 Escolher  $v = \gamma(x_1, x_2, t)$  de modo que  $\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2e = 0$

Neste capítulo, veremos como generalizar essa ideia para sistemas não-lineares MIMO.



## 4.2. Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Nesta seção, veremos a conexão entre o problema de desacoplamento e o problema de rastreamento de saída. Vamos considerar sistemas da forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

onde  $x \in V$  é o vetor de estado,  $V \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada (controle),  $y \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saída,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$  (infinitamente diferenciável), e  $g(x)$  é uma matriz  $n \times m$

$$g(x) = (g_{ij}(x)) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \cdots & g_{nm}(x) \end{bmatrix}$$

onde todas as funções  $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , são de classe  $C^\infty$ . Do mesmo modo,  $h = (h_1, \dots, h_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$ .

## 4.2. Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Observe que o número de componentes da saída  $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x)) \in \mathbb{R}^m$  é igual ao número de componentes da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ , ou seja,  $m = p$ , e que o sistema está definido em  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Denotando por  $g_j(x)$  a coluna  $j$  de  $g(x)$ , podemos considerar  $g_j$  como uma aplicação  $g_j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  e rescrever (1)–(2) como

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x)$$
$$y = h(x)$$

## 4.2. Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Ao longo de todo este capítulo, consideraremos leis de controle denominadas de **realimentação de estado estática localmente regular** (em um aberto  $U \subset V$  de  $\mathbb{R}^n$ ) e dadas por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (3)$$

onde  $v \in \mathbb{R}^m$  é a nova entrada,  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$  e

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) & \cdots & \beta_{1m}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) & \cdots & \beta_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \beta_{m2}(x) & \cdots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

é uma matriz  $m \times m$  em que todas as funções  $\beta_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , são de classe  $C^\infty$ . Aqui, o termo **localmente regular** significa que a matriz  $\beta$  é invertível em  $U$ , ou seja,  $\det(\beta(x)) \neq 0$ , para todo  $x \in U$ .

## 4.2. Desacoplamento e Rastreamento de Saída

Assim, o **sistema em malha-fechada**, o qual está definido em  $U \subset V$ , é dado por

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v \quad (4)$$

$$y = h(x) \quad (5)$$

onde  $x \in U \subset V \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $v \in \mathbb{R}^m$  é vetor de controle, e

$$\tilde{f} = f + g\alpha, \quad \tilde{g} = g\beta$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Considere um sistema da forma (1)–(2), o qual está definido em um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , com entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e saída  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Dizemos que o sistema é **desacoplado** quando **cada** componente  $u_j(t)$  de **qualquer** entrada escolhida  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $t \geq 0$ , atua de fato na componente  $y_j(t) = h_j(x(t))$  da saída  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \dots, h_m(x(t)))$ , mas não influencia a componente  $y_i(t) = h_i(x(t))$  quando  $i \neq j$ . O problema de desacoplamento consiste na construção de uma realimentação regular (3) de modo que o sistema em malha-fechada (4)–(5) seja desacoplado. Relembre que a entrada do sistema em malha-fechada é  $v = (v_1, \dots, v_m)$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Problema de Desacoplamento:** Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho<sup>1</sup> do sistema (1)–(2). Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em  $x_0$ , se existir uma vizinhança aberta<sup>2</sup>  $U \subset V$  de  $x_0$  e uma realimentação (3) localmente regular em  $U$ , tal que o sistema em malha-fechada (4)–(5) seja desacoplado. Do mesmo modo, seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho, ou seja,  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que o **problema de desacoplamento é localmente solúvel** em  $U_0$ , se existir uma realimentação localmente regular em  $U_0$  tal que o sistema em malha-fechada (4)–(5) seja desacoplado.

---

<sup>1</sup>Aqui,  $x_0$  não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

<sup>2</sup>Dizemos que um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma **vizinhança aberta** de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  quando  $U$  é um aberto que contém  $x_0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Ressaltamos que a primeira versão do problema de desacoplamento formulado acima não se preocupa com o tamanho da vizinhança aberta  $U$  do ponto de trabalho  $x_0$  para o qual o sistema em malha-fechada (4)–(5) se torna desacoplado. Assim, a princípio, não temos como garantir que  $U = V$ . Como (4)–(5) estará definido somente em  $U \subset V$ , o desacoplamento do sistema em malha-fechada ocorrerá somente dentro de  $U$ . Isto significa que apenas enquanto a solução  $x(t)$  do sistema em malha-fechada não sair de  $U$  é que o sistema permanecerá desacoplado. É por este motivo que usamos o termo **localmente solúvel** na definição acima, pois garantimos apenas uma solução local em torno do ponto de trabalho  $x_0$  para o problema de desacoplamento.

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Por outro lado, a segunda versão assegura a existência de uma realimentação localmente regular (3) que está definida em toda a região de trabalho  $U_0 \subset V$  e que desacopla o sistema em malha-fechada, o qual está definido em  $U_0$ . É claro que gostaríamos de escolher  $U_0 = V$ . No entanto, dependendo das não-linearidades do sistema (1)–(2), isto nem sempre é possível, e temos que nos contentar com uma solução local em determinado  $U_0 \subset V$ .



## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho do sistema (1)–(2) e considere que  $U \subset V$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$ . Veremos que a derivação sucessiva das componentes  $y_i$  da saída  $y = (y_1, \dots, y_m)$  com relação ao tempo nos leva a uma solução para o problema de desacoplamento. Para isto, suponha que fixamos uma condição inicial  $x(0) \in V$  e uma entrada  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $t \geq 0$ , e considere que tomamos uma componente  $y_i(t) = h_i(x(t))$  da saída  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = h(x(t)) = (h_1(x(t)), \dots, h_m(x(t)))$  e a derivamos no tempo. Como  $y_i(t) = h_i(x(t)) = h_i \circ x(t)$  (função composta), pela regra da cadeia temos que

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t)$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)]$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Neste momento, é natural introduzirmos a **derivada de Lie** de duas aplicações  $w : U \rightarrow \mathbb{R}$  (real) e  $q = (q_1, \dots, q_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  (vetor coluna) de classe  $C^\infty$ :

$$\begin{aligned}L_q w(x) &\triangleq \frac{\partial w}{\partial x}(x)q(x) = [\partial w / \partial x_1(x) \ \dots \ \partial w / \partial x_m(x)]q(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)q_i(x) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

para todo  $x \in U$ . Temos que  $L_q w : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^\infty$ .

Portanto, podemos também considerar  $L_q^2 w = L_q(L_q w)$ . Note que<sup>3</sup>

$$L_q^2 w(x) \triangleq L_q L_q w(x) = \frac{\partial L_q w}{\partial x}(x)q(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para } x \in U$$

Definimos, para todo  $k \geq 1$  (inteiro),

$$L_q^k w = L_q(L_q^{k-1} w), \quad \text{onde } L_q^0 w = w$$

---

<sup>3</sup>Pode-se mostrar que  $L_q^2 w(x) = q^T(x)H(x)q(x) + \frac{\partial w}{\partial x}(x)\frac{\partial q}{\partial x}(x)q(x)$ , onde  $H(x)$  é a matriz Hessiana da função real  $w$  e  $\partial q(x)/\partial x$  é a matriz Jacobiana do vetor coluna  $q$ , no ponto  $x \in U$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Voltando então ao problema de desacoplamento, e tomando

$$h_i^1(x) = \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)f(x) = L_f h_i(x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A_i^1(x) &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g(x) = \left( \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_1(x) \dots \frac{\partial h_i}{\partial x}(x)g_m(x) \right) \\ &= (L_{g_1} h_i(x) \dots L_{g_m} h_i(x)) = (A_{i1}^1(x) \dots A_{im}^1(x)) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

para todo  $x \in U$ , encontramos que

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) + A_i^1(x(t))u(t)$$

Assuma que  $A_i^1(x)$  é identicamente nulo em  $U$ , isto é,  $A_i^1(x) = 0$ , para todo  $x \in U$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(1)}(t)$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ , pois teremos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t))$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Repetindo o mesmo procedimento para  $y_i^{(1)}(t)$ , vamos obter

$$y_i^{(2)}(t) = h_i^2(x(t)) + A_i^2(x(t))u(t)$$

onde, para todo  $x \in U$ ,

$$h_i^2(x) = \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)f(x) = L_f^2 h_i(x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A_i^2(x) &= \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g(x) = \left( \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_1(x) \dots \frac{\partial h_i^1}{\partial x}(x)g_m(x) \right) \\ &= (L_{g_1} L_f h_i(x) \dots L_{g_m} L_f h_i(x)) = (A_{i1}^2(x) \dots A_{im}^2(x)) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Assuma que  $A_i^2(x)$  é identicamente nulo em  $U$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(2)}(t)$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ .

Definimos  $\rho_i \geq 1$  como o menor inteiro tal que  $A_i^{\rho_i}(x)$  não seja identicamente nulo em  $U$ . Mais precisamente,  $\rho_i \geq 1$  é o inteiro tal que  $A_i^{\rho_i}(x_0) \neq 0$  e existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  em que  $A_i^k(x)$  é identicamente nulo em  $U \subset V$ , para todo  $1 \leq k \leq \rho_i - 1$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Observe que tal definição de  $\rho_i$  equivale a

$$A_i^{\rho_i}(x_0) = [L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0$$

$$A_i^k(x) = [L_{g_1} L_f^{k-1} h_i(x) \quad L_{g_2} L_f^{k-1} h_i(x) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{k-1} h_i(x)] = 0$$

$$\text{para } 1 \leq k \leq \rho_i - 1, x \in U$$

que por sua vez é o mesmo que

$$[L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad L_{g_2} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0)] \neq 0$$

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 2, x \in U$$

Quando, para todo  $k \geq 1$ , temos que  $A_i^k(x)$  é identicamente nulo em alguma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , definimos  $\rho_i = \infty$ . No caso em que  $\rho_i < \infty$  (finito), denominamos o inteiro

$\rho_i = \rho_i(x_0) \geq 1$  de **grau relativo** da saída  $y_i = h_i(x)$  no ponto de trabalho  $x_0$ , o qual corresponde ao **número de derivações no tempo que temos que realizar para que a saída  $y_i$  dependa explicitamente de alguma componente  $u_j$  da entrada**

$$u = (u_1, \dots, u_m).$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Assuma que todas as componentes  $y_i$  da saída  $y = (y_1, \dots, y_m)$  admitem grau relativo em  $x_0$ . Dizemos então que a saída  $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  **admite grau relativo** em  $x_0$  e, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}y_1^{(\rho_1)} &= a_1(x) + A_1(x)u \\y_2^{(\rho_2)} &= a_2(x) + A_2(x)u \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\y_m^{(\rho_m)} &= a_m(x) + A_m(x)u\end{aligned}$$

onde  $a_i(x) = h_i^{\rho_i}(x) = L_f^{\rho_i} h(x)$ ,  $A_i(x) = A_i^{\rho_i}(x)$ , para  $i = 1, \dots, m$ ,  $x \in U$ , onde  $U$  é alguma vizinhança aberta de  $x_0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Denotando-se  $y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)} \dots, y_m^{(\rho_m)})'$ , podemos escrever

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u \quad (6)$$

onde, para cada  $x \in U$ ,

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Note que  $a_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  e  $A_i$  é um vetor linha de  $m$  funções de classe  $C^\infty$ . Desta forma,  $a : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um vetor coluna de  $m$  funções de classe  $C^\infty$  e  $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz  $m \times m$  de funções de classe  $C^\infty$ , denominada de **matriz de desacoplamento**.

Relembramos que a componente  $y_i = h_i(x)$  da saída  $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  admite grau relativo  $\rho_i = \rho_i(x_0)$  em  $x_0$  quando

$$A_i(x_0) = \left[ L_{g_1} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \ \dots \ L_{g_m} L_f^{\rho_i-1} h_i(x_0) \right] \neq 0$$

e existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  tal que

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \text{ para todo } 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 2, x \in U$$

Além disso,

$$y_i^{(k)}(t) = L_f^k h_i(x(t)), \text{ para } 0 \leq k \leq \rho_i - 1$$



## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Ressaltamos que uma saída  $y$  nem sempre admite grau relativo em todos os pontos. De fato, considere o exemplo abaixo:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_2 u_1$$

$$\dot{x}_2 = u_1$$

$$y_1 = x_1$$

Derivando-se  $y_1$ , temos

$$y_1^{(1)} = x_2 + x_2 u_1$$

com  $A_1^1(x_1, x_2) = L_{g_1} h_1(x_1, x_2) = x_2$ . Logo, o grau relativo de  $y_1$  em  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  é  $\rho_1 = 1$  quando  $x_2^0 \neq 0$ , pois

$A_1^1(x_1^0, x_2^0) = x_2^0 \neq 0$ . No entanto,  $y_1$  não admite grau relativo em  $x_0$  caso  $x_2^0 = 0$ , já que  $A_1^1(x_1^0, 0) = 0$  e  $A_1^1(x_1, x_2) = x_2$  não se anula em nenhuma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0 = (x_1^0, 0)$ . De fato, dada qualquer vizinhança aberta  $U$  de  $x_0 = (x_1^0, 0)$ , sempre existe algum  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$  com  $\bar{x}_2 \neq 0$ . Portanto,  $A_1^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \neq 0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Definição:** Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho (aberto em  $\mathbb{R}^n$ ) do sistema (1)–(2). Dizemos que a saída  $y = h(x)$  do sistema (1)–(2) **admite grau relativo** em  $U_0$  quando cada componente  $y_i = h_i(x)$  da saída  $y = (y_1, \dots, y_m) = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  admite grau relativo  $\rho_i(x)$  em todo  $x \in U_0$  e  $\rho_i(x)$  permanece constante dentro da região  $U_0$ , isto é,  $\rho_i(x) = \bar{\rho}_i$ , para qualquer  $x \in U_0$ .

**Obs 1:** Ressaltamos que se a saída  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $x_0$ , então existe uma vizinhança aberta  $U_0$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U_0$ . Isto é uma consequência do teorema apresentado na sequência.

**Obs 2:** Considere um sistema linear SISO ( $m = p = 1$ ) da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Assuma que o sistema é controlável e observável, e sejam  $n_p$  e  $n_z$  o número de polos e zeros, respectivamente, da função de transferência  $G(s)$ . Então, pode-se mostrar que o sistema admite grau relativo em  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$  com  $\rho = n_p - n_z$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Teorema:** Seja  $\gamma: W \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, onde  $W \subset \mathbb{R}^n$  é aberto. Então, o conjunto

$$Z = \{x \in W \mid \gamma(x) \neq 0\}$$

é aberto.

**Prova:** Fixe  $x \in Z \subset W$ . Assim,  $\gamma(x) \neq 0$ . Por simplicidade, considere que  $\gamma(x) > 0$ . Como a função  $\gamma$  é contínua em  $x$ , sabemos que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$  (a princípio,  $\delta > 0$  depende de  $x$  e  $\epsilon$ ) tal que, para cada  $y \in W$ ,

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow |\gamma(y) - \gamma(x)| < \epsilon$$

E, como  $W$  é aberto, sabemos que existe  $\bar{\delta} > 0$  tal que  $B(x, \bar{\delta}) \subset W$ . Escolha  $\epsilon = \gamma(x) > 0$  e seja  $\tilde{\delta} = \min(\bar{\delta}, \delta) > 0$ . Fixe  $y \in B(x, \tilde{\delta}) \subset B(x, \bar{\delta}) \subset W$ . Então,  $y \in W$  com  $\|y - x\| < \tilde{\delta} < \delta$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Prova (continuação):** Desse modo,

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| < \gamma(x)$$

ou seja,

$$-\gamma(x) < \gamma(y) - \gamma(x) < \gamma(x)$$

Portanto,  $0 < \gamma(y)$ . Logo,  $B(x, \bar{\delta}) \subset Z$ . Mostramos assim que, para todo  $x \in Z$ , existe  $\tilde{\delta} > 0$  tal que  $B(x, \tilde{\delta}) \subset Z$ , ou seja, provamos que  $Z$  é aberto.

**Obs 3:** Para  $j = 1, \dots, n$ , temos que a função projeção  $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  na  $j$ -ésima componente é contínua, onde

$$\pi_j(x_1, \dots, x_m) = x_j$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 1:[?]** Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3.\end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = [0 \ 0 \ 1], \quad L_g h(x) = 0, \quad L_f h(x) = x_2,$$

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) = [0 \ 1 \ 0], \quad L_g L_f h(x) = 1.$$

Desse modo, a saída  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 2$  na região de trabalho  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 2:[?]** Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^4$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$y = h(x) = x_4.$$

Temos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = [0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad L_g h(x) = 0, \quad L_f h(x) = x_1^2 + x_2,$$

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x}(x) = [2x_1 \ 1 \ 0 \ 0], \quad L_g L_f h(x) = 2(1 + x_3).$$

Assim, a saída  $y = h(x) = x_4$  admite grau relativo  $\rho = 2$  em todos os pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  em que  $x_3 \neq -1$ . Como tal conjunto é um aberto  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^n$ , concluímos que  $y = h(x) = x_4$  admite grau relativo  $\rho = 2$  na região de trabalho  $U_0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Podemos agora enunciar as soluções para as duas versões do problema de desacoplamento, cujas demonstrações são semelhantes.

**Teorema 1:** Suponha que a saída  $y = h(x)$  do sistema (1)–(2) admite grau relativo no ponto de trabalho  $x_0 \in V$ . Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em  $x_0$  **se e somente se** o determinante da matriz de desacoplamento não se anula em  $x_0$ , ou seja,  $\det A(x_0) \neq 0$ .

**Teorema 2:** Suponha que a saída  $y = h(x)$  do sistema (1)–(2) admite grau relativo na região de trabalho  $U_0 \subset V$ . Então, o problema de desacoplamento é localmente solúvel em  $U_0$  **se e somente se**  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Para esboçar a demonstração da suficiência ( $\Leftarrow$ ) dos dois teoremas acima, lembre que (veja (6))

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u \quad (7)$$

com  $y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})'$ ,

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x) \\ L_f^{\rho_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}$$



## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Com base nisto, veremos na sequência que a escolha de uma realimentação regular (3) que soluciona o problema de desacoplamento é natural e evidente.

Provaremos primeiro a suficiência do Teorema 2. Suponha então que  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ . Isto é equivalente a dizer que  $A(x)^{-1}$  existe para todo  $x \in U_0$ . Desse modo, escolhendo a realimentação como

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (8)$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_m)$  é a nova entrada e

$$\alpha(x) = -A(x)^{-1}a(x) \quad (9)$$

$$\beta(x) = A(x)^{-1} \quad (10)$$

obtemos que a saída  $y = h(x)$  do sistema em malha-fechada (4)–(5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v \quad (11)$$

ou seja,

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

$$\begin{aligned}y_1^{(\rho_1)} &= v_1 \\y_2^{(\rho_2)} &= v_2 \\&\vdots \\y_m^{(\rho_m)} &= v_m\end{aligned}$$

Note que cada equação  $y_i^{(\rho_i)} = v_i$  é linear e completamente desacoplada de outra equação  $y_j^{(\rho_j)} = v_j$  quando  $i \neq j$ . Além disso,  $y_i(t)$  corresponde à saída de um banco de  $\rho_i$  integradores em série tendo como entrada  $v_i(t)$ , ou seja,

$$Y_i(s) = \frac{1}{s^{\rho_i}} V_i(s)$$

Desse modo, fica claro que a resposta entrada-saída é linear e que a evolução de  $y_i(t)$  depende de fato de  $v_i(t)$ , mas não é de modo algum influenciada por  $v_j(t)$  quando  $i \neq j$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Como (8)–(10) é uma realimentação de estado estática localmente regular em  $U_0$ , concluímos que a mesma fornece uma solução para o problema de desacoplamento. Quando  $x \notin U_0$ , não temos garantia de que  $A(x)^{-1}$  existe e, conseqüentemente, a realimentação (8)–(10) poderá apresentar uma singularidade em tal ponto. Portanto, tudo que podemos assegurar é que o sistema malha-fechada (4)–(5) fica desacoplado enquanto a solução  $x(t)$  permanecer em  $U_0$  para a entrada escolhida  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $t \geq 0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

Provaremos agora a suficiência do Teorema 1. Suponha então que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Denote o conjunto das matrizes  $m \times m$  de números reais por  $\mathbb{R}^{m^2}$ . Observe que a aplicação  $A : V \rightarrow \mathbb{R}^{m^2}$  definida por  $x \mapsto A(x)$  é de classe  $C^\infty$  e, portanto, é contínua. Denote por  $\det : \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $M \mapsto \det(M)$ . Mostra-se que  $\det$  é uma função contínua (por ser a soma de produtos dos elementos da matriz  $M$ ). Considere a função  $\det A : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto \det A(x)$ . Esta função é contínua, pois ela é a composta de “det” com “A”, e a composta de aplicações contínuas é contínua. Em particular, o conjunto

$$U_0 = \{x \in V \mid \det A(x) \neq 0\}$$

é uma vizinhança aberta de  $x_0$ . Portanto, basta aplicarmos o Teorema 2 para demonstrarmos a suficiência do Teorema 1.

A demonstração da necessidade ( $\Rightarrow$ ) dos dois teoremas pode ser encontrada em [?, ?, ?].

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Obs 4:** Quando  $m = 1$ , ou seja, o sistema (1)–(2) tem uma única entrada  $u \in \mathbb{R}$  e uma única saída  $y = h(x) \in \mathbb{R}$ , a realimentação regular (8)–(10) se reduz a

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (12)$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada e

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \quad (13)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \quad (14)$$

Portanto, a saída  $y = h(x)$  do sistema em malha-fechada (4)–(5) satisfaz

$$y^{(\rho)} = v$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^\rho} V(s)$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 3:** [?] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= h(x) = x_3\end{aligned}$$

Temos

$$L_g h(x) = 0,$$

$$L_f h(x) = x_1 - x_2$$

$$L_g L_f h(x) = 0,$$

$$L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$$

$$L_g L_f^2 h(x) = -(1 + 2x_2) \exp(x_2), \quad L_f^3 h(x) = -2x_2(x_1 + x_2^2)$$

Vemos que a saída  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 3$  em todos os pontos  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  em que  $1 + 2x_2 \neq 0$ . Como tal conjunto é um aberto  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$ , concluímos que  $y = h(x) = x_3$  admite grau relativo  $\rho = 3$  na região de trabalho  $U_0$ .

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 3 (continuação):** A matriz de desacoplamento (nesse caso é um escalar)

$$A(x) = L_g L_f^2 h(x) = -(1 + 2x_2) \exp(x_2)$$

é tal que  $A(x) \neq 0$  para todo  $x \in U_0$ . Desse modo, concluímos que a realimentação de estado estática localmente regular em  $U_0$  dada por

$$u = \frac{-L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} v = -\frac{2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2) \exp(x_2)} v$$

para todo  $x \in U_0$ , desacopla o sistema em malha-fechada (4)–(5), o qual está definido em  $U_0 \subset V = \mathbb{R}^3$ . Além disso, a saída  $y = h(x) = x_3$  de (4)–(5) é tal que

$$y^{(3)} = v$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 4:** [?] Considere o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5$$

$$y_2 = h_2(x) = x_4$$

Temos

$$L_{g_1} h_1(x) = L_{g_2} h_1(x) = L_{g_1} L_f h_1(x) = L_{g_2} L_f h_1(x) = 0$$

$$L_{g_1} h_2(x) = L_{g_2} h_2(x) = 0$$

$$L_f^2 h_1(x) = x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5$$

$$L_f h_2(x) = x_5$$

$$[L_{g_1} L_f^2 h_1(x) \quad L_{g_2} L_f^2 h_1(x)] = [\cos(x_1 - x_5) \quad 1] \neq 0$$

$$[L_{g_1} L_f h_2(x) \quad L_{g_2} L_f h_2(x)] = [0 \quad 1] \neq 0$$



## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 4 (continuação):** Escolhemos a origem  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^5$  como ponto de trabalho. Assim,  $\rho_1 = \rho_1(x_0) = 3$ ,  $\rho_2 = \rho_2(x_0) = 2$ , a saída  $y = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$  admite grau relativo em  $x_0$ , e a matriz de desacoplamento é

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como  $\det A(x_0) \neq 0$ , sabemos que existe uma vizinhança aberta  $U \subset V = \mathbb{R}^5$  de  $x_0$  em que a realimentação de estado estática localmente regular em  $U$  dada por

$$u = -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v$$

para todo  $x \in U$ , está de fato bem definida, ou seja,  $A(x)^{-1}$  existe para todo  $x \in U$ , onde  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  é a nova entrada e

$$a(x) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

## 4.2.1. O Problema de Desacoplamento

**Exemplo 4 (continuação):** Além disso, tal realimentação desacopla o sistema em malha-fechada (4)–(5), o qual está definido em  $U \subset V = \mathbb{R}^3$ . Por fim, a saída  $y = (y_1, y_2) = h(x) = (h_1(x), h_2(x))$  de (4)–(5) é tal que

$$\begin{aligned}y_1^{(3)} &= v_1 \\y_2^{(2)} &= v_2\end{aligned}$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

Considere o sistema (1)–(2) com saída  $y = h(x)$ . Dada uma **saída de referência desejada**  $\bar{y}(t)$  para a saída  $y(t)$ , onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , queremos encontrar uma realimentação  $u$  que force  $y(t)$  a **rastrear assintoticamente** a saída desejada  $\bar{y}(t)$ , ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0$$

onde  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  é o **erro de rastreamento**. Este problema é denominado de **problema de rastreamento** da saída  $\bar{y}(t)$ . Para resolver o problema de rastreamento, vamos projetar uma realimentação  $u$  que garanta que a dinâmica do erro  $e(t)$  seja assintoticamente estável.

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

Na sequência, restringiremos nosso estudo à classe de sistemas (1)–(2) que podem ser desacoplados por realimentação estática regular da forma (3). Considere o sistema (1)–(2) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que:

- A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$ .
- A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

Derivando-se sucessivamente  $e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t)$  com relação ao tempo, obtemos que

$$e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo  $k = \rho_i$  e usando (7), teremos

$$e^{\langle \rho \rangle} = y^{\langle \rho \rangle} - \bar{y}^{\langle \rho \rangle} = a(x) + A(x)u - \bar{y}^{\langle \rho \rangle},$$

com

$$\begin{aligned} y^{\langle \rho \rangle} &= (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})', \\ \bar{y}^{\langle \rho \rangle} &= (\bar{y}_1^{(\rho_1)}, \bar{y}_2^{(\rho_2)}, \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m)})', \\ e^{\langle \rho \rangle} &= (e_1^{(\rho_1)}, e_2^{(\rho_2)}, \dots, e_m^{(\rho_m)})'. \end{aligned}$$

Note que a realimentação de estado dependente do tempo

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{\langle \rho \rangle} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0 \quad (15)$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_m)' \in \mathbb{R}^m$  é a nova entrada, produz em malha-fechada a seguinte dinâmica linear para o erro de rastreamento:

$$e^{\langle \rho \rangle} = v$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

A lei de controle (15) é portanto uma realimentação linearizante para a dinâmica do erro. Podemos então construir uma realimentação estabilizante  $v$  para a dinâmica do erro. Fixe  $i = 1, \dots, m$ , e lembre que

$$e_i^{(\rho_i)} = v_i$$

Sejam  $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$  o conjunto de pólos desejados (no SPE!) para a dinâmica do erro

$$e_i(t) = y_i(t) - \bar{y}_i(t)$$

Assim, o polinômio característico desejado em malha-fechada é dado por

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i s^k$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

Logo,

$$\begin{aligned}v_i = \gamma_i(x, t) &= \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i e_i^{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i [y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i [L_f^k h_i(x) - \bar{y}_i^{(k)}(t)]\end{aligned}$$

é a realimentação de estado dependente do tempo desejada, pois

$$e_i^{(\rho_i)} = v_i = \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i e_i^{(k)}$$

ou seja, a dinâmica de  $e_i(t)$  em malha-fechada é dada por

$$e_i^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i e_i^{(k)} = 0 \quad (\text{EDO linear homogênea!}) \quad (16)$$

a qual tem  $\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$  como polinômio característico.

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo a ser aplicada para o rastreamento da saída de referência desejada  $\bar{y}(t)$  é

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1} \left[ -a(x) + \bar{y}^{(\rho)}(t) + \underbrace{F\epsilon(x, t)}_{=v} \right], \quad x \in U_0, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

onde

$$\epsilon(x, t) = (h_1(x), \dots, L_f^{(\rho_1-1)} h_1(x), \dots, h_m(x), \dots, L_f^{(\rho_m-1)} h_m(x))' - \bar{y}^{(\rho-1)}(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}$$

$$F_i = [a_0^i \quad a_1^i \quad \dots \quad a_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, m$$



## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 5:** No Exemplo 4 da Seção 4.2.1, estudamos o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2,$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5$$

$$y_2 = h_2(x) = x_4$$

Escolhemos  $x_0 = 0$ . Note que  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , e que posto  $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x)] = 2$ , para todo  $x \in V = \mathbb{R}^5$ . Vimos anteriormente que  $\det A(x_0) \neq 0$ ,  $\rho_1 = 3$ ,  $\rho_2 = 2$ . Com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 4.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta  $U_0 \subset V$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U_0$  e  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 5 (continuação):** Seja  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma saída de referência desejada de classe  $C^\infty$ . A realimentação de estado dependente do tempo em (15)

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v], \quad x \in U_0, t \geq 0$$

assegura a seguinte dinâmica linear para os erros de rastreamento

$$e_1^{(3)} = v_1$$

$$e_1^{(2)} = v_2$$

com  $e_1(t) = y_1(t) - \bar{y}_1(t)$ ,  $e_2(t) = y_2(t) - \bar{y}_2(t)$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 5 (continuação):** Logo, os ganhos de realimentação  $a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_0^2, a_1^2 \in \mathbb{R}$  nas realimentações estabilizantes

$$\begin{aligned}v_1 = \gamma_1(x, t) &= \sum_{k=0}^2 a_k^1 e_1^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^2 a_k^1 [y_1^{(k)}(t) - \bar{y}_1^{(k)}(t)] \\&= \sum_{k=0}^2 a_k^1 [L_f^k h_1(x) - \bar{y}_1^{(k)}(t)] \\&= a_0^1 [x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] + a_1^1 [x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] + \\&\quad + a_2^1 [x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)] \\v_2 = \gamma_2(x, t) &= \sum_{k=0}^1 a_k^2 e_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^2 a_k^2 [y_2^{(k)}(t) - \bar{y}_2^{(k)}(t)] \\&= \sum_{k=0}^1 a_k^2 [L_f^k h_2(x) - \bar{y}_2^{(k)}(t)] \\&= a_0^2 [x_4 - \bar{y}_2(t)] + a_1^2 [x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)]\end{aligned}$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

### Exemplo 5 (continuação):

são escolhidos de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\pi_1(s) = s^3 - \sum_{k=0}^2 a_k^1 s^k,$$

$$\pi_2(s) = s^2 - \sum_{k=0}^1 a_k^2 s^k$$

estejam no SPE, pois as dinâmicas malha-fechada dos erros são dadas por

$$e_1^{(3)} - a_2^1 e_1^{(2)} - a_1^1 e_1^{(1)} - a_0^1 e_1 = 0$$

$$e_2^{(2)} - a_1^2 e_2^{(1)} - a_0^2 e_2 = 0$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 5 (continuação):** A realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned}u &= \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v] \\ &= A(x)^{-1} \left( -a(x) + \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(3)}(t) \\ \bar{y}_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(x, t) \\ \gamma_2(x, t) \end{bmatrix} \right), \quad x \in U_0, t \geq 0\end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência desejada  $\bar{y}(t)$ , onde

$$\begin{aligned}\gamma_1(x, t) &= a_0^1[x_1 - x_5 - \bar{y}_1(t)] + a_1^1[x_2 - \bar{y}_1^{(1)}(t)] + \\ &\quad + a_2^1[x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 - \bar{y}_1^{(2)}(t)] \\ \gamma_2(x, t) &= a_0^2[x_4 - \bar{y}_2(t)] + a_1^2[x_5 - \bar{y}_2^{(1)}(t)]\end{aligned}$$

com  $v = (v_1, v_2)' = (\gamma_1(x, t), \gamma_2(x, t))' \in \mathbb{R}^2$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

A partir de (16), concluímos que se

$$e_i^{(\rho_i-1)}(0) = e_i^{(\rho_i-2)}(0) = \dots = e_i^{(1)}(0) = e_i(0) = 0$$

então  $e_i(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja,

$$y_i(t) = \bar{y}_i(t), \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ (**rastreamento perfeito!**)}$$

mas desde que  $x(t) \in U_0$  para  $t \geq 0$ .

Ressaltamos que as realimentações definidas acima forçam  $y(t)$  a rastrear assintoticamente  $\bar{y}(t)$  desde que a solução  $x(t)$  do sistema em malha-fechada permaneça em  $U_0$  para todo  $t \geq 0$  (perceba que a realimentação (15) poderá apresentar singularidades e que  $y_i = h_i(x)$  poderá deixar de ter grau relativo  $\rho_i$  constante se  $x(t)$  sair de  $U_0$ ). No entanto, as hipóteses que fizemos até agora sobre o sistema (1)–(2) não garantem, a princípio, que isto realmente ocorrerá. Observe que não há problema caso  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ . O próximo resultado, o qual está baseado nos argumentos acima, apresenta condições para a solubilidade do problema de rastreamento de modo que  $x(t) \in U_0$ , para  $t \geq 0$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Teorema 3:** Considere o sistema (1)–(2) com saída  $y = h(x)$  e assumamos que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que a saída  $y = h(x)$  satisfaz:

- A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$
- A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det A(x) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .
- A aplicação  $z : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)) \end{aligned} \quad (18)$$

é **injetiva**

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Teorema 3 (continuação):** Aplique a realimentação (17).

Considere o conjunto aberto  $Z = z(U_0) \subset \mathbb{R}^n$  e defina

$$z_0 = (y_1^{(0)}(t), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, y_m^{(0)}(t), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(t)) \Big|_{t=0}$$

Assuma que  $\bar{y}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a saída de referência desejada de classe  $C^\infty$  e tal que

$$\bar{z}(t) = (\bar{y}_1^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m-1)}(t)) \in Z, \quad t \geq 0 \quad (19)$$

Seja

$$\epsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$$

o erro inicial de rastreamento, onde  $\bar{z}_0 = \bar{z}(0)$ , e considere que existe  $H > 0$  tal que

$$\text{dist}(\bar{z}(t), \partial Z) \triangleq \inf_{p \in \partial Z} \|\bar{z}(t) - p\| > H, \quad t \geq 0$$

onde  $\partial Z$  denota a fronteira de  $Z$ .



## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

### Teorema 3 (continuação):

Então, existe  $\delta > 0$  tal que, se

$$\|\epsilon_0\| < \delta$$

então a solução  $x(t)$  do sistema em malha-fechada satisfaz  $x(t) \in U_0$  para todo  $t \geq 0$  e, ainda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 1$$

Em particular, para  $\bar{x}(t) \triangleq z^{-1}(\bar{z}(t))$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \bar{x}(t)] = 0$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Obs 5:** Em muitos casos práticos, não conheceremos  $Z$ ,  $\partial Z$ ,  $\delta$ . Em tais situações, devemos verificar por simulação computacional o quão grande poderá ser o erro de rastreamento inicial  $\epsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$  para que seja assegurada convergência assintótica do erro de rastreamento para zero. Ressaltamos que, se  $\epsilon_0 = 0$ , ou seja,  $z_0 = \bar{z}_0$ , então  $y(t) = \bar{y}(t)$ , para todo  $t \geq 0$  (**rastreamento perfeito!**). Na prática, no entanto, sempre teremos  $\epsilon_0 \neq 0$  devido a erros/ruídos de medição.

**Obs 6:** Quando  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ , temos **convergência assintótica global**, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t)] = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \rho_i - 1$$

independentemente do erro de rastreamento inicial  $\epsilon_0 = z_0 - \bar{z}_0$ . E, quando  $Z = U_0 = V = \mathbb{R}^n$  e **cada**  $\bar{y}_i^{(k)}(t)$ ,  $t \geq 0$ , é **limitada**, então a solução  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , do sistema em malha-fechada é **limitada** e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \bar{x}(t)] = 0$$

para qualquer condição inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6:** A equação de movimento de um robô de  $n$  graus de liberdade e com atuação em todas as juntas é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = u \quad (20)$$

onde  $M(q)$  é a matriz de massa  $n \times n$ , que é sempre simétrica e invertível,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos,  $K(q) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade,  $q \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de posições generalizadas,  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de velocidades generalizadas,  $u \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas, e  $M, C, K$  são de classe  $C^\infty$ .

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** A equação (20) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (21)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$
$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \end{bmatrix}$$
$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}$$

Assuma que a cinemática direta do robô é dada por

$$y(t) = h(q(t))$$

onde  $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetiva e com Jacobiano  $\Gamma(q) = \partial h(q)/\partial q$  invertível para todo  $q$  pertencente a um conjunto aberto  $W \subset \mathbb{R}^n$  (onde não existem singularidades da cinemática direta).

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** Neste caso, pela regra da cadeia,

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = \Gamma(q) \dot{q}$$

Vemos assim que a primeira derivada de todas as saídas  $y_i = h_i(x)$  é função apenas do estado  $x$  e não é influenciada pela entrada  $u$ . Derivando outra vez, obtemos

$$y^{(2)} = \Gamma^{(1)}(q) \dot{q} + \Gamma(q) \ddot{q}$$

Note que a componente  $ij$  da matriz  $\Gamma(q)$  é dada por

$$\Gamma_{ij}(q) = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q)$$

e, portanto, a componente  $ij$  de  $\Gamma^{(1)}(q)$  será

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** Logo, a  $i$ -ésima componente do vetor coluna  $\Gamma^{(1)}(q)\dot{q}$  é

$$\left\{ \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} \right\}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

A matriz Hessiana  $H_i$  da aplicação  $h_i$  é definida elemento a elemento por

$$\{H_i(q)\}_{kj} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j}(q)$$

Temos então que

$$\left\{ \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} \right\}_i = \sum_{i=1}^n \dot{q}^T H_i(q) \dot{q}$$

Como  $H_i$  depende apenas de  $q$ , segue-se que

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u$$

onde

$$a(x) = \Gamma^{(1)}(q)\dot{q} - \Gamma(q)M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)], \quad A(x) = \Gamma(q)M^{-1}(q).$$

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** Mas,

$$\det A(x) = (\det \Gamma(q))(\det M^{-1}(q)) \neq 0, \quad \text{para } x = (q, \dot{q}) \in W \times \mathbb{R}^n$$

Assim, concluímos que:

- Cada saída  $y_i = h_i(x)$  admite grau relativo  $W \times \mathbb{R}^n$  com  $\rho_i = 2$
- A matriz de desacoplamento é invertível em  $W \times \mathbb{R}^n$  (o espaço de estado é  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ )
- $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$
- A aplicação  $z : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em (18) é injetiva, já que é dada por  $z(q, \dot{q}) = (y^{(0)}, y^{(1)}) = (h(q), \Gamma(q)\dot{q})$

Portanto, a realimentação de estado dependente do tempo

$$u = \delta(x, t) = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(2)}(t) + v], \quad x \in W \times \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (22)$$

lineariza a dinâmica do erro da seguinte maneira

$$e^{(2)} = v,$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a saída de referência desejada.

## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** Agora, seja  $\epsilon_i \in \mathbb{R}^2$  definido por

$$\epsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)})', \quad 1 \leq i \leq n$$

A dinâmica de  $\epsilon_i$  é governada pela equação linear

$$\dot{\epsilon}_i = A_i \epsilon_i + B_i v_i \quad (23)$$

onde

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Devemos então determinar uma lei de controle estabilizante

$$v_i = F_i \epsilon_i$$

Para isto, tomamos dois pólos de malha-fechada  $\lambda_i^1, \lambda_i^2$  (SPE), calculamos  $\pi_i(s) = (s - \lambda_i^1)(s - \lambda_i^2) = s^2 - (a_1^i s + a_0^i)$ , e escolhemos

$$F_i = [a_0^i, a_1^i]$$



## 4.2.2. O Problema de Rastreamento da Saída

**Exemplo 6 (continuação):** Logo, a lei de controle estabilizante  $v$  possui a forma

$$v = F\epsilon$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}, \quad \epsilon = (\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)'$$

Note que

$$\epsilon = (e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(0)}, e_n^{(1)})' = y^{(1)} - \bar{y}^{(1)}$$

onde

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(0)}, y_n^{(1)})' \\ \bar{y}^{(1)} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}, \bar{y}_n^{(1)})' \end{aligned}$$

Nesta seção, faremos a conexão entre o problema de rastreamento de saída e o conceito de **flatness** (ou **platitude**, que segundo o dicionário Houaiss é a propriedade de ser plano). O conceito de flatness foi cunhado por Fliess e seus coautores em [?] a partir dos resultados que apresentamos neste capítulo sobre linearização exata. Existem várias maneiras equivalentes de enunciar a propriedade de flatness. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [?]. Os livros [?] e [?] apresentam a noção de flatness e suas diversas aplicações em problemas de controle.

**Definição:** Dizemos que um sistema da forma (1) é **plano** (ou **flat**) quando existe um conjunto  $y = (y_1, \dots, y_m)$  de funções de classe  $C^\infty$ , denominada de saída<sup>4</sup> **plana** (ou saída **flat**), com as seguintes propriedades:

- Cada  $y_i = h_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , é função apenas<sup>5</sup> do estado  $x$ , e **o número de componentes  $m$  de  $y$  é igual ao número de componentes da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  do sistema.**

---

<sup>4</sup>Essa não é necessariamente a saída real do sistema (1).

<sup>5</sup>Para simplificar a exposição, consideraremos que  $y_i$  depende somente do estado  $x$ . Na verdade, o conceito de flatness é muito mais geral, de modo que  $y_i$  pode depender também da entrada  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e de suas derivadas até uma certa ordem finita.

## 4.3. Flatness

- O estado  $x$  pode ser determinado a partir de  $y$  e de um número finito de suas derivadas. Mais especificamente<sup>6</sup>, existe uma aplicação  $\mathcal{A}$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$x = \mathcal{A}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\gamma)}) \quad (24)$$

onde  $y^{(k)} \triangleq (y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)})$ , para  $k \geq 0$ .

- A entrada  $u$  pode ser determinada a partir de  $y$  e de um número finito de suas derivadas. Em outras palavras, existe uma aplicação  $\mathcal{B}$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$u = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)}) \quad (25)$$

---

<sup>6</sup>Aqui, não estamos sendo precisos porque a definição de flatness é local, e as aplicações  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  acima podem estar definidas apenas localmente, e não globalmente.

## 4.3. Flatness

Isto significa que

$$x(t) = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))$$

é a trajetória de (1) quando a aplicamos a entrada

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação arbitrária de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 1:** Temos que o motor CC apresentado na Seção 4.1 é um sistema flat com saída flat  $y = x_1$ , pois o estado deste sistema é determinado por

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, \dot{x}_1) = (y, \dot{y}) = \mathcal{A}(y, \dot{y})$$

e, como  $\ddot{y} = -\dot{y} + u$ , a entrada é dada por

$$u = \ddot{y} + \dot{y} = \mathcal{B}(y, \dot{y}, \ddot{y})$$

Note que, neste caso, a saída flat coincide com a saída real do sistema.

## 4.3. Flatness

**Exemplo 2:** [?] Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + u\end{aligned}$$

Temos que  $y = x_1$  é uma saída flat. De fato,

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = y^{(1)}$$

$$x_3 = \dot{x}_2 + \sin(x_1) + x_1 = y^{(2)} + \sin(y) + y$$

$$x_4 = \dot{x}_3 = y^{(3)} + y^{(1)} \cos(y) + y^{(1)}$$

$$u = \dot{x}_4 - x_1 + x_3 = y^{(4)} + y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y)$$

**Exemplo 3:** Um sistema linear da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

é flat **se e somente** é controlável (veja [?]).

**Exemplo 4:** Todo robô com  $n$  graus de liberdade e atuação em todas as juntas é flat<sup>7</sup>. De fato, vimos no Exemplo 6 da Seção 4.2.2 que a equação de movimento de um robô de  $n$  graus de liberdade é da forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = u \quad (26)$$

onde  $M(q)$  é a matriz de massa  $n \times n$ , que é sempre simétrica e invertível,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos,  $K(q) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos efeitos de mola e de gravidade,  $q \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de posições generalizadas,  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de velocidades generalizadas,  $u \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas, e  $M, C, K$  são de classe  $C^\infty$ .

---

<sup>7</sup>Para quem já fez algum curso de robótica, perceberá que a noção de flatness é análoga ao método do torque calculado.

**Exemplo 4 (continuação):** A equação (26) pode ser rescrita como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (27)$$

onde

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\ f(x) &= \begin{bmatrix} -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q}) + K(q)] \\ 0 \end{bmatrix} \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Neste caso, fica claro que  $y = q$  é uma saída flat, já que

$$x = (q, \dot{q}) = (y, \dot{y})$$

$$u = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = M(y)\ddot{y} + C(y, \dot{y}) + K(y)$$

**(método do torque calculado!)**

se escrevem em função de  $y, \dot{y}, \ddot{y}$ .



## 4.3. Flatness

Veremos agora que o conceito de flatness permite solucionar de maneira simples e direta o problema de controlabilidade de um sistema não-linear. De fato, imagine que desejamos levar o estado  $x(t)$  do sistema (1) de uma condição inicial  $x(0) = x_0$  em  $t = 0$  até uma condição final desejada  $x(T) = x_T$  em  $t = T > 0$ . Para isto, devemos encontrar uma entrada adequada  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tal problema de controle é denominado de **planejamento de trajetórias**. Quando  $y = h(x)$  é uma saída flat de (1), a solução do problema de planejamento de trajetórias recai na construção de uma aplicação  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  que obedeça as seguintes restrições determinadas por (24):

$$(A) \quad x_0 = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t)) \Big|_{t=0}$$

$$(B) \quad x_T = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t)) \Big|_{t=T}$$

## 4.3. Flatness

**Teorema:** Assuma que o sistema (1) é flat. A aplicação da entrada dada por (25)

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t)), \quad \text{para } t \in [0, T]$$

onde  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  que obedece as restrições (A) e (B) anteriores<sup>8</sup>, leva o sistema de  $x_0$  em  $t = 0$  até  $x_T$  em  $t = T$ . Em particular, se um sistema é flat, ele possui garantidamente uma propriedade de controlabilidade<sup>9</sup>.

**Obs:** Ressaltamos que apesar de a lei de controle acima resolver o problema de planejamento de trajetórias de maneira trivial, essa é uma solução em **malha-aberta**. Uma estratégia de controle em malha-fechada deve ser capaz de corrigir erros de condição inicial, de modelagem, de influência de perturbações, etc.

---

<sup>8</sup>Sempre podemos construir uma aplicação  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  que satisfaz tais restrições por interpolação polinomial. Para maiores detalhes, veja [?, pp. 182–184].

<sup>9</sup>Para definições e resultados de controlabilidade para sistemas não-lineares, veja [?] e [?].

Note que, se  $y = h(x)$  é uma saída flat do sistema (1), então (24) implica que ao forçarmos  $y(t)$  a rastrear  $\bar{y}(t)$ , o estado  $x(t)$  do sistema fica completamente determinado. Desse modo, para sistemas flat, o problema de rastreamento da saída se confunde com o problema de controlar o seu estado. Veremos agora que, quando a saída  $y = h(x)$  do sistema (1) é flat, o problema de rastreamento de saída pode muitas vezes ser solucionado de maneira relativamente simples e direta. Isto é ilustrado a seguir.

## 4.3. Flatness

**Exemplo 5: [?]** No Exemplo 2 acima, mostramos que  $y = x_1$  é uma saída flat para o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_1 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = x_1 - x_3 + u$$

pois

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y^{(1)}$$

$$x_3 = y^{(2)} + \sin(y) + y$$

$$x_4 = y^{(3)} + y^{(1)} \cos(y) + y^{(1)}$$

$$u = y^{(4)} + y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y)$$

Para resolvermos o problema de rastreamento de saída, basta encontrarmos uma realimentação de estado  $u = \delta(x, w)$ , onde  $w \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, que linearize a dinâmica de  $y$ . A ideia é impor que (pois  $y^{(4)}$  é a maior derivada de  $y$  que aparece na expressão de  $u$  acima):

$$y^{(4)} = w$$

## 4.3. Flatness

**Exemplo 5 (continuação):** É fácil ver que realimentação de estado

$$\begin{aligned}u &= y^{(2)} \cos(y) - (y^{(1)})^2 \sin(y) + 2y^{(2)} + \sin(y) + w \\ &= \underbrace{[x_3 - x_1 - \sin(x_1)]}_{=y^{(2)}=\dot{x}_2} \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + w\end{aligned}$$

atinge o desejado, ou seja, assegura que  $y^{(4)} = w$ . Escolhendo

$$w = \bar{y}^{(4)} + v$$

onde  $\bar{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é a saída de referência desejada de classe  $C^\infty$ , obtemos que a dinâmica do erro  $e = y - \bar{y}$  é linear e dada por

$$e^{(4)} = v$$

Logo, tudo o que nos resta fazer é determinar uma realimentação estabilizante  $v$  como na Seção 4.2.2 acima.

**Exemplo 5 (continuação):** Escolhendo a realimentação estabilizante  $v$  como

$$v = a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e$$

implica que

$$e^{(4)} - a_3 e^{(3)} - a_2 e^{(2)} - a_1 e^{(1)} - a_0 e = 0$$

e então especificamos os ganhos  $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  de modo que as raízes da equação característica do erro

$$\pi(s) = s^4 - a_3 s^3 - a_2 s^2 - a_1 s - a_0$$

estejam no SPE (polos da dinâmica do erro no SPE).

## 4.3. Flatness

**Exemplo 5 (continuação):** Portanto, a realimentação estabilizante  $v$  projetada, rescrita em função do estado  $x$  e do tempo  $t$ , é dada por

$$\begin{aligned}v &= \gamma(x, t) = a_3 e^{(3)} + a_2 e^{(2)} + a_1 e^{(1)} + a_0 e \\ &= a_3 [y^{(3)} - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2 [y^{(2)} - \bar{y}^{(2)}(t)] + a_1 [y^{(1)} - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0 [y - \bar{y}(t)] \\ &= a_3 [x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2 [x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\ &+ a_1 [x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0 [x_1 - \bar{y}(t)]\end{aligned}$$

pois encontramos anteriormente que

$$y = x_1$$

$$y^{(1)} = x_2$$

$$y^{(2)} = \dot{x}_2 = x_3 - x_1 - \sin(x_1)$$

$$y^{(3)} = x_4 - y^{(1)} \cos(y) - y^{(1)} = x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2$$

**Exemplo 5 (continuação):** Por fim, a realimentação de estado dependente do tempo projetada

$$\begin{aligned}
 u &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + w \\
 &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \\
 &\quad + \underbrace{\bar{y}^{(4)}(t)}_{=w} + v \\
 &= [x_3 - x_1 - \sin(x_1)] \cos(x_1) - x_2^2 \sin(x_1) + 2x_3 - 2x_1 - \sin(x_1) + \bar{y}^{(4)}(t) + \\
 &\quad + a_3[x_4 - x_2 \cos(x_1) - x_2 - \bar{y}^{(3)}(t)] + a_2[x_3 - x_1 - \sin(x_1) - \bar{y}^{(2)}(t)] + \\
 &\quad + a_1[x_2 - \bar{y}^{(1)}(t)] + a_0[x_1 - \bar{y}(t)]
 \end{aligned}$$

soluciona o problema de rastreamento da saída de referência  $\bar{y}(t)$ .



## 4.4. O Problema de Linearização Exata

Começamos apresentando dois exemplos motivacionais.

**Exemplo 1:** Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u \in \mathbb{R}$ , da forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_1^2 + x_2^2)u\end{aligned}$$

A realimentação de estado não-linear

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 + v)$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, permite cancelar perfeitamente as não-linearidades, resultando no seguinte sistema **linear** em **malha-fechada**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v\end{aligned}$$

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 1 (continuação):** Este sistema é da forma

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que tal sistema linear é controlável, pois  $\text{posto}(C) = \text{posto}([B \ AB]) = 2$ . Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma  $v = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$  de modo a estabilizarmos a origem do sistema acima e, desse modo, concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$u = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}(-x_1^2 - k_1x_1 - k_2x_2)$$

aplicada ao sistema original  $\dot{x} = f(x, u)$ , assegura que a origem do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 2:** Considere o seguinte sistema não-linear, com vetor de estado  $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u \in \mathbb{R}$ , da forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2) \left( \frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2)u \right)\end{aligned}$$

Observe que  $\dot{x}_1$  não pode ser linearizado diretamente por uma realimentação. Definimos então a mudança de coordenadas **não-linear**  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$ , onde  $z_1 = x_1$  e  $z_2 = x_2/(1+x_1^2)$ . Note que a aplicação  $\phi$  possui inversa  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$ , onde  $x_1 = z_1$  e  $x_2 = z_2(1+z_1^2)$ . Portanto,  $\phi$  é um difeomorfismo, ou seja,  $\phi$  é de fato uma mudança de coordenadas.

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 2 (continuação):** Assim, aplicando a regra da cadeia, teremos nas novas coordenadas  $z$  que

$$\dot{z}(t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x(t)} f(x(t), u(t))$$

Substituindo  $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$ , obtemos

$$\dot{z} = \left( \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x, u) \right) \right|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} & \frac{1}{(1+x_1^2)} \end{array} \right] f(x, u) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

com

$$f(x, u) = \left[ \begin{array}{c} \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \\ \frac{2x_1x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2) \left( \frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1+x_1^2) u \right) \end{array} \right]$$

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 2 (continuação):** Note que a equação de estado acima é da forma

$$\dot{z} = g(z, u)$$

e corresponde à expressão do **mesmo sistema** nas novas coordenadas  $z$ . Fazendo os cálculos, vamos encontrar

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 + (1 + z_1^2)u\end{aligned}$$

Escolhendo a realimentação de estado **não-linear**

$$u = \delta(z, v) = \frac{1}{1 + z_1^2}(-z_2^2 + v)$$

onde  $v \in \mathbb{R}$  é a nova entrada, determinamos o sistema em malha-fechada

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}$$

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 2 (continuação):** Este sistema é **linear** e da forma

$$\dot{z} = Az + Bv$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vê-se que o sistema em **malha-fechada**, nas **novas coordenadas**  $z$ , é **linear e controlável**. Além disso, nas coordenadas originais  $x$ , a realimentação de estado **não-linear** é dada por

$$u = \delta(\phi(x), v) = \gamma(x, v) = \frac{1}{1 + x_1^2} \left( -\frac{x_2^2}{(1 + x_1^2)^2} + v \right)$$

Conclui-se então que uma mudança de coordenadas não-linear  $z = \phi(x)$  e uma realimentação de estado não-linear<sup>10</sup>  $u = \gamma(x, v)$ , permitem cancelar de maneira exata as não-linearidades do sistema e obter um sistema em malha-fechada que é linear e controlável.

<sup>10</sup>Ou, equivalentemente,  $u = \gamma(\phi^{-1}(z), v) = \delta(z, v)$ .

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

**Exemplo 2 (continuação):** Em particular, podemos escolher uma realimentação de estado da forma  $v = -Kz = -k_1z_1 - k_2z_2$  de modo a estabilizarmos a origem de

$$\dot{z} = Az + Bv$$

e, desse modo, como  $(z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$  com  $(0, 0) = \phi(0, 0)$ , concluímos que a realimentação de estado **não-linear** resultante

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1+x_1^2} \left( -\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1z_1 - k_2z_2 \right) \\ &= \frac{1}{1+x_1^2} \left( -\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} - k_1x_1 - k_2\frac{x_2}{1+x_1^2} \right) \end{aligned}$$

aplicada ao sistema original  $\dot{x} = f(x, u)$ , assegura que a origem do sistema em **malha-fechada** é **globalmente assintoticamente estável**.

## 4.4. O Problema de Linearização Exata

Os resultados dos exemplos acima dão origem ao seguinte problema:

**Problema de Linearização Exata:** Encontrar uma realimentação de estado e uma mudança de coordenadas, tais que o sistema em malha-fechada, quando escrito nessas novas coordenadas, seja um sistema linear controlável.

Na próxima seção, veremos a conexão entre o problema de linearização exata, o problema de desacoplamento e o problema de estabilização de um ponto de equilíbrio.



## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Para tratarmos **mudanças de coordenadas não-lineares** de maneira precisa, precisamos primeiramente apresentar um teorema fundamental de análise matemática, denominado de **Teorema da Função Inversa**. Sejam  $W$  e  $Z$  abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Lembramos que uma aplicação  $\phi : W \rightarrow \phi(W) = Z$  de classe  $C^\infty$  que admite inversa  $\psi = \phi^{-1} : Z \rightarrow \phi^{-1}(Z) = W$  de classe  $C^\infty$  é denominada de **difeomorfismo** ou de **mudança de coordenadas local** em  $W$ .

**Teorema da Função Inversa:** Considere que  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , onde  $W$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $J(x) = \partial F(x)/\partial x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz Jacobiana da aplicação  $F$  no ponto  $x \in W$ . Seja  $x_0 \in W$  e  $y_0 = F(x_0)$ . Assuma que  $\det(J(x_0)) \neq 0$  (ou, equivalentemente,  $\text{posto}(J(x_0)) = n$ ). Então, existe uma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  e uma vizinhança aberta  $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$  de  $y_0 = F(x_0)$  tais que a aplicação  $\phi : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0} = \phi(U_{x_0}) = F(U_{x_0})$  definida por  $z = \phi(x) = F(x)$ , para todo  $x \in U_{x_0}$ , é um difeomorfismo em  $U_{x_0}$  (dizemos então que  $F$  é um **difeomorfismo local** em  $U_{x_0} \subset W$ ).

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Ressaltamos que, no enunciado do teorema, dizer que  $\phi$  é a mesma aplicação que  $F$  seria um abuso de linguagem. De fato, o domínio destas aplicações em geral não coincidem (nem o contradomínio), pois na maioria dos casos  $U_{x_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $W$  e  $V_{y_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Obs 1:** Suponha que uma aplicação  $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  é tal que  $\det(J(x)) \neq 0$ , para todo  $x \in W$ , onde  $W$  é um aberto. O Teorema da Função Inversa implica que  $F(W)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , mas não assegura que  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$ . No entanto,  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$  se e somente se  $F$  é uma aplicação injetiva, ou seja,  $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$ , para quaisquer  $x, y \in W$ .

**Exemplo 3:[?]** Considere a aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$z = (z_1, z_2) = F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_2)$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Temos que

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

Como  $\det(J(0)) = 1 \neq 0$ , concluímos que existe uma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^2$  de  $x_0 = 0$  tal que  $z = F(x)$  é um difeomorfismo local em  $U_{x_0}$ . Note que  $\det(J(x_1, x_2)) = 0$  quando  $x_2 = \pi/2 + k\pi$ .

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 4:[?]** Considere a aplicação  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{x_1 + 1} \end{bmatrix}$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq -1\}$ . Temos que  $W \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto,

$$J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(x_1 + 1)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

e  $\det(J(x)) = 1 \neq 0$ , para todo  $x = (x_1, x_2) \in W$ . Como  $F$  é injetiva, concluímos que  $F : W \rightarrow F(W)$  é um difeomorfismo em  $W$ .

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Vamos agora tratar o problema de linearização exata que foi enunciado de maneira relativamente imprecisa no início deste capítulo.

**Problema de Linearização Exata:** Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho<sup>11</sup> do sistema (1). Dizemos que o **problema de linearização exata é localmente solúvel** em  $x_0$ , se existir uma mudança de coordenadas local  $z = \phi(x)$  e uma realimentação de estado localmente regular  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , ambas definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , tais que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x)$ , o sistema em malha-fechada (4) se expresse localmente em  $\phi(U)$  por um sistema linear controlável da forma

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (28)$$

---

<sup>11</sup>Novamente, aqui,  $x_0$  não é necessariamente a condição inicial do sistema nem um ponto de equilíbrio.

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Problema de Linearização Exata (continuação):** Do mesmo modo, seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho, ou seja,  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que o **problema de linearização é localmente solúvel** em  $U_0$ , se existir uma mudança de coordenadas local  $z = \phi(x)$  e uma realimentação de estado localmente regular  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , ambas definidas em  $U_0$ , tais que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x)$ , o sistema em malha-fechada (4) se expresse localmente em  $\phi(U)$  por (28).

**Obs 2:** Note que

$$\begin{aligned}Az &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{f}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \alpha(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\B &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \tilde{g}(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) \beta(x) \right) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)}.\end{aligned}$$

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Lema:** Considere o sistema (1)–(2) e seja  $x_0 \in V$ . Assuma que a saída  $y = h(x)$  do sistema admite grau relativo em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  e que  $\det(A(x_0)) \neq 0$ . Seja  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$  a soma dos graus relativos  $\rho_i$  das saídas  $y_i = h_i(x)$ . Considere a aplicação  $z : U \rightarrow \mathbb{R}^\rho$  definida por<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} z(x) &= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \\ &= (h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x), \dots, h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x)) \\ &= (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \dots, z_{\rho_m}^m) \in \mathbb{R}^\rho \end{aligned} \tag{29}$$

para  $x \in U$ . Seja  $J(x) = \partial z(x)/\partial x$  a matriz Jacobiana de  $z$  no ponto  $x \in U$  (note que  $J(x)$  tem tamanho  $\rho \times n$ ). Então, as  $\rho$  linhas de  $J(x_0)$  são linearmente independentes ou, de maneira equivalente,  $\text{posto}(J(x_0)) = \rho$  (posto completo). Em particular,  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \leq n$ .

---

<sup>12</sup>Da definição de grau relativo, temos que  $y_i^{(k)} = L_f^k h_i(x)$  depende apenas de  $x$  para  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ .

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Uma demonstração geométrica deste resultado pode ser encontrada em [?].

**Obs 2:** Relembre que, pela Obs 1 da Seção 4.2.1, se  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $x_0$ , então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U$ . Além disso<sup>13</sup>, se  $f(x_0) = 0$  e  $h(x_0) = 0$ , temos que a definição de derivada de Lie implica que  $L_f^k h_i(x_0) = 0$ , para todo  $0 \leq k \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Logo,  $z(x_0) = 0$  em (29) e  $\alpha(x_0) = 0$  em (8).

---

<sup>13</sup>Note que assumir que  $f(x_0) = 0$  é o mesmo que dizer que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio de (1)–(2) para  $u = 0$ . Observe também que, sem perda de generalidade, sempre podemos assumir que  $h(x_0) = 0$ . De fato, se  $h(x_0) \neq 0$ , então ao escolhermos como nova saída  $\bar{y} = \bar{h}(x) = h(x) - h(x_0)$ , a qual corresponde a uma translação da origem do espaço de saída, teremos que  $\bar{h}(x_0) = 0$  e  $L_f^{k+1} h_i = L_f^{k+1} \bar{h}_i$ ,  $L_{g_j} L_f^k h_i = L_{g_j} L_f^k \bar{h}_i$ , para  $k \geq 0$ . Assim,  $\bar{y}_i = \bar{h}_i(x)$  admite grau relativo  $\bar{\rho}_i = \rho_i$  em  $x_0$ .



**Teorema 1:** Considere o sistema (1) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $x_0 \in V$  um ponto de trabalho. Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0$  **se e somente se** existir uma saída<sup>14</sup>  $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  ( $m$  componentes) tal que:

- A saída  $y = h(x)$  está definida em uma vizinhança aberta de  $x_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $x_0$ .
- A matriz de desacoplamento é não singular em  $x_0$ , ou seja,  $\det(A(x_0)) \neq 0$ .
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$ .

---

<sup>14</sup>Aqui,  $y = h(x)$  não precisa ser a saída real de (1).

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Prova:** O fato de que tais condições são suficientes ( $\Leftarrow$ ) é uma consequência do resultado acima. De fato, com base na demonstração da suficiência do Teorema 1 e da Obs 1 da Seção 4.2.1, sabemos que existe uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$  tal que  $y = h(x)$  admite grau relativo em  $U$  e  $\det(A(x)) \neq 0$ , para todo  $x \in U$ . Pelo lema anterior, temos que a matriz quadrada  $\rho \times n = n \times n$  dada por  $Z(x_0) = \partial z(x_0)/\partial x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tem determinante não-nulo. Defina a aplicação  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ , para todo  $x \in U$ . Portanto, pelo Teorema da Função Inversa,  $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo local em alguma vizinhança aberta  $U_{x_0} \subset U$  de  $x_0$ . Por construção, temos que, nas novas coordenadas  $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ , o sistema (1) com a saída  $y = h(x)$  é descrito por:

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Prova (continuação):**

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ \dot{z}_2^i &= z_3^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= a_i(\phi^{-1}(z, \eta)) + A_i(\phi^{-1}(z, \eta))u \\ y_i &= z_1^i \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (30)$$

Logo, com a realimentação desacoplante (8), que é uma realimentação de estado estática localmente regular em  $U_{x_0}$ , e nas coordenadas locais  $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$ , o sistema malha-fechada (4)–(5) se expressa localmente em  $V_{z_0} = \phi(U_{x_0})$ , onde  $z_0 = \phi(x_0) = z(x_0)$ , por:

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i = z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i = v_i \\ y_i = z_1^i \end{array} \right\} \equiv (z_1^i)^{(\rho_i)} = y_i^{(\rho_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (31)$$

Agora, note que, para cada  $1 \leq i \leq m$ , (31) é um sistema linear controlável da forma

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A_i z^i + B_i v_i \\ y_i &= C_i z^i \end{aligned} \quad (32)$$

onde  $z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)' \in \mathbb{R}^{\rho_i}$  é o estado,  $y_i = z_1^i \in \mathbb{R}$  é a saída, e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\rho_i \times \rho_i}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\rho_i \times 1}, \quad C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times \rho_i}$$

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Prova (continuação):** Tal sistema linear é essencialmente a conexão em cascata de  $\rho_i$  integradores, em que a entrada  $v_i$  e o estado  $z^i$  são obtidos derivando-se  $\rho_i$  vezes a saída  $y_i^{(0)} = y_i = z_1^i$ , obtendo-se sucessivamente  $y_i^{(1)} = (z_1^i)^{(1)} = z_2^i, \dots, y_i^{(\rho_i-1)} = (z_1^i)^{(\rho_i-1)} = z_n^i$ , até pararmos em  $y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i$ . Mostra-se que este sistema possui  $\rho_i$  pólos em  $s = 0$  (ou, equivalentemente, os autovalores de  $A_i$  são todos nulos com multiplicidade  $\rho_i$ ).

Desse modo, mostramos que, nas coordenadas locais  $z = \phi(x) = z(x) \in \mathbb{R}^n$  e com a realimentação de estado estática localmente regular (8), as quais são definidas em uma vizinhança aberta  $U_{x_0}$  de  $x_0$ , o sistema em malha-fechada é descrito pela **forma canônica de Brunovsky**:

**Prova (continuação):**

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (33)$$

onde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)' = ((z^1)', (z^2)', \dots, (z^m)')' \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Pode-se mostrar que a forma canônica de Brunovsky é controlável, o que finaliza a demonstração da suficiência ( $\Leftarrow$ ) no teorema. Para uma prova da necessidade ( $\Rightarrow$ ), consulte<sup>15</sup> [?].

---

<sup>15</sup>Em [?], há um critério de existência de  $y = h(x)$  através do cálculo dos *colchêtes de Lie* dos campos de vetores  $f, g_1, \dots, g_m$  que definem (1).

**Teorema 2:** Considere o sistema (1) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $U_0 \subset V$  uma região de trabalho. Suponha que existe uma saída<sup>16</sup>  $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$  ( $m$  componentes) tal que:

- A saída  $y = h(x)$  está definida em  $U_0$ , é de classe  $C^\infty$  e admite grau relativo em  $U_0$
- A matriz de desacoplamento é não singular em  $U_0$ , ou seja,  $\det(A(x)) \neq 0$ , para todo  $x \in U_0$
- $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i = n$
- A aplicação  $z : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^\rho = \mathbb{R}^n$  em (29) é injetiva

---

<sup>16</sup>Novamente, aqui,  $y = h(x)$  não precisa ser a saída real de (1).

### **Teorema 2 (continuação):**

Então, o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $U_0$  através da mudança de coordenadas local  $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$  e da realimentação desacoplante (8). Mais precisamente, a mudança de coordenadas local  $z : U_0 \rightarrow z(U_0)$  e a realimentação (8) estão definidas em  $U_0$ , e são tais que, nas novas coordenadas  $z$ , o sistema em malha-fechada (4) se expressa localmente em  $z(U_0)$  pela forma canônica de Brunowsky (33).

**Prova:** Este resultado é uma consequência do lema acima, da Obs 1 após o Teorema da Função Inversa, e da prova do Teorema 1 anterior.

Na sequência, vamos relacionar linearização exata com desacoplamento e com estabilização de um ponto de equilíbrio.



## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Para cada  $i = 1, \dots, m$ , a origem  $z^i = 0$  do sistema (32) pode ser estabilizada por uma realimentação de estado

$$v_i = F_i z^i \quad (34)$$

projetada como se segue. Seja  $\Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$  o conjunto de polos desejados em malha-fechada (SPE). Assim,

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1^i)(s - \lambda_2^i) \cdots (s - \lambda_{\rho_i}^i)$$

é o polinômio característico desejado em malha-fechada. Escreva

$$\pi_i(s) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i s^k$$

Prova-se que a realimentação (matriz linha)

$$F_i = [a_0^i \ a_1^i \ \dots \ a_{\rho_i-1}^i] \in \mathbb{R}^{\rho_i}$$

fornece<sup>17</sup>

$$\sigma(A_i + B_i F_i) = \Lambda_i = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i\}$$

---

<sup>17</sup>Aqui,  $\sigma(A)$  denota o conjunto de autovalores da matriz quadrada  $A$ .

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

Agrupando todas as realimentações estabilizantes (34), para  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$v = Fz \quad (35)$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)' = ((z^1)')', (z^2)')', \dots, (z^m)')' \in \mathbb{R}^n$$

Agora, suponha que

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = z(x)$$

$$= \underbrace{(h_1(x), L_f h_1(x), \dots, L_f^{\rho_1-1} h_1(x))}_{=z^1}, \dots, \underbrace{(h_m(x), L_f h_m(x), \dots, L_f^{\rho_m-1} h_m(x))}_{=z^m}$$

$$= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), y_m^{(1)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x)) \quad (36)$$

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

É claro que o procedimento descrito acima equivale a escolher

$$y_i^{(\rho_i)} = (z_1^i)^{(\rho_i)} = v_i = F_i z^i = \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i z_k^i = \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i y_i^{(k)}$$

que por sua vez implica que

$$(z_1^i)^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i (z_1^i)^{(k)} = y_i^{(\rho_i)} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k^i y_i^{(k)} = 0$$

é uma EDO linear homogênea com pólos estáveis  $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{\rho_i}^i$ .

O próximo resultado, o qual segue dos argumentos acima e da demonstração do Teorema 1, é uma condição suficiente para a solução do problema de desacoplamento com estabilidade em malha-fechada.

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Teorema 3:** [?] A forma canônica de Brunowsky (33) (sistema linear com vetor de estado  $z \in \mathbb{R}^n$  e vetor de entrada  $v \in \mathbb{R}^m$ ) é desacoplada e  $z_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio **globalmente** assintoticamente estável de (33) com a realimentação (?). Em particular, se as hipóteses do Teorema 1 forem atendidas com  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , então<sup>18</sup>  $x_0$  é um ponto de equilíbrio **localmente** assintoticamente estável do sistema (1) com a realimentação desacoplante (8) seguida da realimentação estabilizante (?)-(?).

**Obs 3:** No resultado acima, note que a realimentação desacoplante (8) seguida da realimentação estabilizante (?)-(?) a ser aplicada na estabilização de  $x_0$  nada mais é do que a realimentação (17) a ser aplicada para o rastreamento da saída  $\bar{y} \equiv 0$  ao assumirmos que  $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_m = n$ .

---

<sup>18</sup>Aqui, como  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , temos que  $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (33) para  $v = 0$ . Veja a Obs 2 acima.

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 5:** No Exemplo 4 da Seção 4.2.1, estudamos o sistema definido em  $V = \mathbb{R}^5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5$$

$$y_2 = h_2(x) = x_4$$

Escolhemos  $x_0 = 0$ . Note que  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , e que posto  $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x)] = 2$ , para todo  $x \in V = \mathbb{R}^5$ . Vimos anteriormente que  $\det A(x_0) \neq 0$ ,  $\rho_1 = 3$ ,  $\rho_2 = 2$ , e que a realimentação desacoplante (8) assegurou que

$$y_1^{(3)} = v_1$$

$$y_2^{(2)} = v_2$$

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 5 (continuação):** Temos que  $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 5$ . Isto implica que

$$\begin{aligned}z &= (z_1, z_2, \dots, z_5) = (z^1, z^2) = (z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2) \\&= (y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), y_2^{(0)}(x), y_2^{(1)}(x)) \\&= (h_1(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), h_2(x), L_f h_2(x)) \\&= \left( \underbrace{x_1 - x_5, x_2, x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5}_{z^1 = \gamma_1(x)}, \underbrace{x_4, x_5}_{z^2 = \gamma_2(x)} \right)\end{aligned}$$

define uma mudança de coordenadas local  $z = \phi(x) = z(x)$  em torno de  $x_0$  com

$$\begin{aligned}y_1^{(3)} &= (z_1^1)^{(3)} = v_1 \\y_2^{(2)} &= (z_1^2)^{(2)} = v_2\end{aligned}$$

ou seja, nas novas coordenadas  $z = \phi(x) = z(x)$ , o sistema em malha-fechada é dado pela seguinte forma de canônica de Brunowsky:

**Exemplo 5 (continuação):**

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

Além do mais, a realimentação desacoplante  $u$  determinada no Exemplo 4 da Seção 4.2.1, seguida da realimentação estabilizante  $v$  em (??)–(??)

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = v = Fz = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 z^1 \\ F_2 z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \gamma_1(x) \\ F_2 \gamma_2(x) \end{bmatrix}$$

estabiliza assintoticamente (localmente) a origem  $x_0 = 0$  do sistema original acima.

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 5 (continuação):** A realimentação de estado resultante

$$\begin{aligned}u &= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}v \\&= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1}Fz \\&= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \gamma_1(x) \\ F_2 \gamma_2(x) \end{bmatrix} \\&= -A(x)^{-1}a(x) + A(x)^{-1} \begin{bmatrix} a_0^1(x_1 - x_5) + a_1^1 x_2 + a_2^1(x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5) \\ a_0^2 x_4 + a_1^2 x_5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

está definida apenas em uma vizinhança aberta  $U \subset V = \mathbb{R}^5$  de  $x_0 = 0$ , onde as matrizes de ganho

$$F_1 = [a_0^1 \ a_1^1 \ a_2^1] \in \mathbb{R}^3, \quad F_2 = [a_0^2 \ a_1^2] \in \mathbb{R}^2$$

são escolhidas de modo que as raízes dos polinômios característicos

$$\pi_1(s) = s^3 - \sum_{k=0}^2 a_k^1 s^k, \quad \pi_2(s) = s^2 - \sum_{k=0}^1 a_k^2 s^k$$

estejam no SPE. Note que a realimentação  $u$  acima nada mais é do que a realimentação  $u$  determinada no Exemplo 5 da Seção 4.2.2 com  $\bar{y} \equiv 0$ , conforme a Obs 3 anterior.



## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 5 (continuação):** Relembramos, aqui, que a realimentação de estado  $u$  acima de fato estabiliza a origem  $x_0 = 0$  do sistema em malha-fechada, pois, por construção:

$$(z_1^1)^{(3)} = y_1^{(3)} = v_1 = F_1 z^1 = \sum_{k=0}^2 a_k^1 z_k^1 = \sum_{k=0}^2 a_k^1 (z_1^1)^{(k)}, \text{ com } F_1 = [a_0^1 \ a_1^1 \ a_2^1]$$

$$(z_1^2)^{(2)} = y_2^{(2)} = v_2 = F_2 z^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^2 z_k^2 = \sum_{k=0}^1 a_k^2 (z_1^2)^{(k)}, \text{ com } F_2 = [a_0^2 \ a_1^2]$$

ou seja,

$$(z_1^1)^{(3)} - a_2^1 (z_1^1)^{(2)} - a_1^1 (z_1^1)^{(1)} - a_0^1 z_1^1 = 0$$

$$(z_1^2)^{(2)} - a_1^2 (z_1^2)^{(1)} - a_0^2 z_1^2 = 0$$

**Teorema 4:** [?] Considere as hipóteses do Teorema 2 e que  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ . Seja<sup>19</sup>  $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Então,  $x_0$  é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (1) com a realimentação desacoplante (8) seguida da realimentação estabilizante (??)–(??), e

$$\{x(0) \in U_0 \mid x(t) \in U_0 \text{ para todo } t \geq 0\} \subset R_A(x_0)$$

onde  $R_A(x_0) \subset \mathbb{R}^n$  é região de atração de  $x_0$ . Em particular, se  $U_0 = V = \mathbb{R}^n$ , então  $x_0$  é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável** do sistema em malha-fechada.

---

<sup>19</sup>Aqui, como  $f(x_0) = 0$ ,  $h(x_0) = 0$ , temos que  $z_0 = z(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (33) para  $v = 0$ . Veja a Obs 2 acima.

## 4.4.1. Linearização Exata, Desacoplamento e Estabilização

**Exemplo 6:** Considere novamente um robô com  $n$  graus de liberdade e com atuação em todas as juntas. Pelo o que vimos anteriormente no Exemplo 6 da Seção 4.2.2, temos que cada componente  $y_i = q_i$  da saída  $y = h(q) = q$  (com  $W = \mathbb{R}^n$ ) admite grau relativo em todo o espaço de estado  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e que os mesmos são todos iguais a dois, ou seja,  $\rho_1 = \dots = \rho_n = 2$ . Além disso, a matriz de desacoplamento  $A(x)$  é dada por

$A(x) = M^{-1}(q)$ , pois  $\Gamma(q) = I$ . Em particular, concluímos pelo Teorema 2 que o problema de linearização exata para o robô é **globalmente** solúvel em todo o espaço de estado  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , já que a dimensão do estado  $x = (q, \dot{q})$  é  $2n$ ,  $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = 2n$ ,  $\text{posto}(A(x)) = \text{posto}(g(x)) = n$  em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , e a aplicação (identidade)

$z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dada por  $z(x) = x = (q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n)$  é injetiva (e sobrejetiva:  $z(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ). É importante ressaltar que as coordenadas generalizadas  $q$  nem sempre são as coordenadas  $y = h(q)$  do efetuador (veja o Exemplo 6 da Seção 4.2.3).

## 4.4.2. Linearização Exata e Flatness

O teorema abaixo estabelece que todo sistema linearizável por uma realimentação de estado estática regular é flat. No entanto, a recíproca é falsa: existem sistemas flat que não são linearizáveis por realimentação estática regular da forma (3). É possível provar que todo sistema flat é linearizável por uma realimentação dinâmica da forma

$$\dot{z} = \alpha(x, z, v) \in \mathbb{R}^k,$$

$$u = \beta(x, z, v) \in \mathbb{R}^m,$$

onde  $v \in \mathbb{R}^m$  é nova entrada [?], [?]. O problema de mostrar que todo sistema que é linearizável por realimentação dinâmica é flat ainda é um problema aberto na Teoria de Controle.

**Teorema:** Considere o sistema (1) e assuma que, para todo  $x \in V$ , o posto da matriz  $g(x) = [g_1(x) \ \dots \ g_m(x)]$  é igual ao seu número  $m$  de colunas. Seja  $x_0 \in V$ . Se o problema de linearização exata é localmente solúvel em  $x_0$ , então (1) é flat.

## 4.4.2. Linearização Exata e Flatness

**Prova:** De acordo com a demonstração do Teorema 1, temos que a expressão de (1) nas coordenadas locais (29)

$$z = \phi(x) = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \in \mathbb{R}^n \quad (37)$$

e com a realimentação desacoplante (8)

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (38)$$

as quais são definidas em uma vizinhança aberta  $U \subset V$  de  $x_0$ , está na forma canônica de Brunowsky (33) com (32). Em particular,

$$x = \phi^{-1}(z) = \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \quad (39)$$

e

$$v = (y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_m^{(\rho_m)}) \quad (40)$$

Assim,  $x$  pode ser escrito como função de  $y$  e de suas derivadas até uma ordem finita  $\gamma = \max\{\rho_1 - 1, \dots, \rho_m - 1\}$ . E, a partir de (??)–(??), concluímos que

$$u = \alpha(\mathcal{A}(z)) + \beta(\mathcal{A}(z))v = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)})$$

onde  $\delta = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ .

## 5. Método Direto de Lyapunov

Neste capítulo, estudaremos o Método Direto de Lyapunov, que estabelece condições suficientes para determinarmos o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear: estável, assintoticamente estável e globalmente assintoticamente estável. Ao contrário do Método Indireto de Lyapunov visto no Capítulo 3, que se baseia no sistema linearizado (e tem a restrição de que todos os polos do sistema linearizado estejam fora do eixo imaginário), o Método Direto de Lyapunov leva em conta o sistema não-linear por completo através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia.

Começamos este capítulo analisando como que a variação da energia total do pêndulo simples ao longo das soluções permite caracterizar o tipo de estabilidade da origem. Este exemplo motivará a apresentação do Método Direto de Lyapunov na sequência. Veremos também como esse método é aplicado no projeto de controladores.

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Motivação:** Considere novamente a equação de estado de um pêndulo simples (não-controlado):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2\end{aligned}$$

onde  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  e  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de estado. Relembre que  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio do pêndulo. A energia total  $E(x)$  do pêndulo no ponto  $x = (x_1, x_2)$ , com relação ao referencial  $E(0) = 0$ , é a soma da energia potencial com a energia cinética, ou seja:

$$E(x) = \int_0^{x_1} \frac{g}{\ell} \sin(\tau) d\tau + \frac{1}{2} x_2^2 = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2 \geq 0$$

Então, ao longo das soluções  $x(t)$  do sistema, temos que:

$$E(x(t)) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1(t))] + \frac{1}{2} x_2^2(t)$$

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Motivação (continuação):** Primeiramente, considere que  $k = 0$  (sem atrito). Então:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x(t)) &= \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))x_2(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$E(x(t)) = E(x(0)) = c, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

Isto significa que a energia total é conservada ao longo das soluções do sistema. Logo, para  $x(0) \cong 0$ , temos que  $x(t) \cong 0$  para  $t \geq 0$  e, assim, chegamos novamente à conclusão de que  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio estável na ausência de atrito.

Agora, considere que  $k > 0$  (com atrito). Suponha que  $x_2(0) \neq 0$ . Então:



## 5. Método Direto de Lyapunov

### Motivação (continuação):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x(t)) &= \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))x_2(t) - \frac{k}{m}x_2^2(t) \\ &= -\frac{k}{m}x_2^2(t) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0\end{aligned}$$

ou seja,  $E(x(t_2)) < E(x(t_1))$  sempre que  $t_2 > t_1$ . Isto significa que a energia total é dissipada ao longo das soluções do sistema. Logo, se  $E(x(t))$  tender para zero à medida que  $t \rightarrow \infty$ , então  $x(t)$  tenderá para a origem quando  $t \rightarrow \infty$  e, conseqüentemente, concluiremos que a origem é assintoticamente estável. Portanto, percebemos que a análise da derivada de  $E(x(t))$  (energia total ao longo das soluções do sistema) permite determinar o tipo de estabilidade da origem. Em 1892, Lyapunov mostrou como determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema através de funções que desempenham um papel semelhante a uma função de energia. Isto é o que veremos na sequência.

## 5. Método Direto de Lyapunov

De agora em diante, salvo menção contrária, vamos considerar sistemas autônomos da forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (41)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)' \in D$  é o vetor de estado,  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $f = (f_1, \dots, f_n): D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  (continuamente diferenciável). Seja  $x^e \in D$  um ponto de equilíbrio do sistema, i.e.  $f(x^e) = 0$ . Sem perda de generalidade, sempre podemos considerar que  $x^e = 0$  pois, fazendo a translação  $z = x - x^e$  (mudança de coordenadas), temos que

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x^e) \triangleq g(z) \quad (42)$$

com  $g(0) = f(x^e) = 0$ , ou seja,  $z^e = 0$  é um ponto de equilíbrio de (??). Temos então que  $x^e$  um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (??) se e somente se  $z^e = 0$  é um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável de (??). **Por simplicidade, de agora em diante vamos sempre supor que a origem  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio de (??).**

## 5. Método Direto de Lyapunov

Seja  $V: D_V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com  $V(0) = 0$ , onde  $D_V \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto contendo a origem  $x = 0$ . Considere  $W \subset D_V$  com  $x = 0 \in W$ . Temos então a seguinte classificação da função  $V$ :

- 1  $V$  é **definida positiva** em  $W$  se  $V(x) > 0$  para todo  $x \in W$  com  $x \neq 0$
- 2  $V$  é **semidefinida positiva** em  $W$  se  $V(x) \geq 0$  para todo  $x \in W$
- 3  $V$  é **definida negativa** em  $W$  se  $V(x) < 0$  para todo  $x \in W$  com  $x \neq 0$ , ou seja, se  $-V$  é definida positiva em  $W$
- 4  $V$  é **semidefinida negativa** em  $W$  se  $V(x) \leq 0$  para todo  $x \in W$ , ou seja, se  $-V$  é semidefinida positiva em  $W$

## 5. Método Direto de Lyapunov

Agora, seja  $x^e = 0$  um ponto de equilíbrio de (??). Considere que  $V: D_V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável, onde  $D_V \subset D$  é uma vizinhança aberta de  $x^e = 0$ . Definimos a **derivada**  $\dot{V}: D_V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $V$  (**ao longo das soluções de (??)**) por

$$\dot{V}(x) \triangleq L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x), \quad x \in D_V$$

Note que  $\dot{V}(0) = 0$  pois  $f(0) = 0$ . Pela regra da cadeia, temos que:

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t, x)) \right|_{t=0}, \quad x \in D_V$$

onde  $\phi(t, x)$  denota a solução do sistema (??) no instante  $t$  para a condição inicial  $x$  em  $t_0 = 0$ .

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov):** Seja  $x^e = 0$  um ponto de equilíbrio de (??). Considere que  $V: D_V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$ , onde  $D_V \subset D$  é uma vizinhança aberta de  $x^e = 0$ . Temos que:

- 1 Se  $V$  é **definida positiva** em  $D_V$  (i.e.  $V(x) > 0$  para todo  $x \in D_V$  com  $x \neq 0$ ) e  $\dot{V}$  é **semidefinida negativa** em  $D_V$  (i.e.  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in D_V$ ), então  $x^e = 0$  é **estável**
- 2 Se  $V$  é **definida positiva** em  $D_V$  (i.e.  $V(x) > 0$  para todo  $x \in D_V$  com  $x \neq 0$ ) e  $\dot{V}$  é **definida negativa** em  $D_V$  (i.e.  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in D_V$  com  $x \neq 0$ ), então  $x^e = 0$  é **(localmente) assintoticamente estável**

Dizemos que  $V$  é uma **função de Lyapunov** para o sistema (??) quando  $V$  satisfaz as condições de um dos 2 casos acima.

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Ideia da demonstração da estabilidade assintótica:** Seja  $x(0) \neq 0$ . Então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

pois  $x^e = 0$  é ponto de equilíbrio e, assim,  $x(t)$  nunca poderá atingir  $x^e = 0$ . Mas,  $V(x(t)) \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Logo,  $V(x(t))$  é uma função decrescente e limitada inferiormente por zero. Desse modo,  $V(x(t)) < V(x(0))$  e (veja a Proposição do Lab 6):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a \geq 0$$

Pode-se então mostrar que, para  $x(0)$  próximo o suficiente de  $x^e = 0$ , o limite acima implica que<sup>20</sup>

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$$

que por sua vez assegura que (pois  $\dot{V}(0) = 0$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

---

<sup>20</sup>Cuidado! Isto em geral não é verdade. Por exemplo, para  $f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$ , temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  mas  $\dot{f}(t)$  é **ilimitada!**

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 1:** Voltamos ao pêndulo simples **sem atrito** (e sem controle) visto no início deste capítulo:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) = f_2(x_1, x_2)$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$  e  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Note que  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$  e que  $V$  é definida positiva no conjunto aberto

$D_V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$ . Temos:

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{\ell} \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell} \sin(x_1) x_2 - \frac{g}{\ell} \sin(x_1) x_2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Logo, como  $V$  é definida positiva e  $\dot{V}$  é semidefinida negativa em  $D_V$ , concluímos pelo Teorema de Lyapunov que  $x^e = 0$  é estável.

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 1 (continuação):** No entanto, a origem não é assintoticamente estável. De fato, para qualquer condição inicial  $x(0)$ , temos que a solução  $x(t)$  satisfaz

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) = 0, \quad t \geq 0$$

ou seja,  $V(x(t)) = V(x(0))$  para  $t \geq 0$ . Assim, caso  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  para alguma condição inicial  $x(0)$  com  $x_2(0) \neq 0$ , então teríamos pela continuidade de  $V$  que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V(0) = 0$$

o que contradiz  $V(x(t)) = V(x(0))$  para todo  $t \geq 0$ .



## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 2:** Agora, considere o pêndulo simples **com atrito** (mas sem controle):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$ ,  $k > 0$  e  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio. Escolhemos (energia total):

$$V(x) = \frac{g}{\ell} [1 - \cos(x_1)] + \frac{1}{2} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Assim:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{g}{\ell} \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell} \sin(x_1) x_2 - \frac{g}{\ell} \sin(x_1) x_2 - \frac{k}{m} x_2^2 \\ &= -\frac{k}{m} x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 2 (continuação):** Temos então que  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$  e  $V$  é definida positiva no aberto  $D_V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x_1 < \pi\}$ . No entanto,  $\dot{V}$  é semidefinida negativa em  $D_V$ :  $\dot{V}(x) = 0$  para  $x_2 = 0$  e qualquer  $-\pi < x_1 < \pi$ . Portanto, o Teorema de Lyapunov nos permite apenas concluir que  $x^e = 0$  é estável. Entretanto, sabemos que  $x^e = 0$  é assintoticamente estável na presença de atrito: a função da energia total escolhida não conseguiu mostrar esse fato.

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Obs:** Não há nenhum método sistemático para se encontrar funções de Lyapunov para um sistema. No caso de sistemas elétricos e mecânicos, energia total do sistema é a primeira escolha mais natural como função de Lyapunov. Mas, no caso geral, a escolha se dá por tentativa e erro. Pelo exemplo cima, percebemos que o Teorema de Lyapunov fornece apenas condições **suficientes** de estabilidade. A origem  $x^e = 0$  pode ainda ser estável ou assintoticamente estável apesar da função  $V(x)$  escolhida não satisfazer as condições do teorema. Em tal caso, devemos procurar por outra função  $V(x)$  mais adequada ou utilizar outras técnicas de análise de estabilidade.

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 3:** Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$  e  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio. A linearização na origem é dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{array} \right] \Big|_{x=0} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \Big|_{x=0} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$$

Logo, nada podemos concluir sobre a estabilidade da origem pelo Método Indireto de Lyapunov. Vamos mostrar que a origem é assintoticamente estável pelo Teorema de Lyapunov (Método Direto de Lyapunov).

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 3 (continuação):** Escolhemos:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(note que  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$ ). Logo:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Desse modo, vemos que  $V$  é definida positiva e  $\dot{V}$  é definida negativa em  $\mathbb{R}^2$ . Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável (mostraremos mais adiante que a estabilidade assintótica é na verdade global).

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Proposição (Estimativa da Região de Atração):** Seja  $x^e = 0$  um ponto de equilíbrio de (??) com  $D = \mathbb{R}^n$ . Considere que  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$ , e que  $D_v$  é uma vizinhança aberta da origem  $x^e = 0$  tal que:

- 1  $V$  é definida positiva em  $D_v$  e  $\dot{V}$  é definida negativa em  $D_v$ , ou seja:  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in D_v$  com  $x \neq 0$
- 2 O conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < c\}$$

é limitado e está contido em  $D_v$ , onde  $c > 0$ .

Então,  $x^e = 0$  é assintoticamente estável e

$$\Omega_c \subset R_A(0)$$

onde  $R_A(0)$  é a região de atração do ponto de equilíbrio  $x^e = 0$ .

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 4:** Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)\end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$  e  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio. Escolhemos:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

(note que  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$ ). Logo:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Desse modo, vemos que  $V$  é definida positiva e  $\dot{V}$  é definida negativa em  $D_V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$ . Portanto, concluímos pelo Teorema de Lyapunov que a origem é assintoticamente estável.

**Exemplo 4 (continuação):** Além disso, para  $c = 2$ , temos que

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2\} = D_v$$

é limitado, pois  $\|x\| = \sqrt{V(x)} < \sqrt{2}$  para todo  $x \in \Omega_c = D_v$ .

Logo, a proposição anterior determina que

$D_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\} \subset R_A(0)$  é uma estimativa da região de atração da origem.



## 5. Método Direto de Lyapunov

**Teorema de Lyapunov (Estabilidade Assintótica Global):** Seja  $x^e = 0$  um ponto de equilíbrio de (??) com  $D = \mathbb{R}^n$ . Considere que  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$  tal que:

- $V$  é definida positiva em  $\mathbb{R}^n$  e  $\dot{V}$  é definida negativa em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja:  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $x \neq 0$
- $V$  é **radialmente ilimitada**, ou seja:<sup>21</sup>

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

Então, a origem  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável**.

---

<sup>21</sup>Temos que  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$  significa que: para todo  $c > 0$  existe  $r > 0$  tal que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| > r \Rightarrow V(x) > c$ .

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Prova:** Seja  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  uma condição inicial arbitrária com  $x(0) \neq 0$ . Tome  $c = V(x(0)) > 0$ . Portanto, existe  $r > 0$  tal que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(x) \leq c \Rightarrow \|x\| \leq r$ . Desse modo,  $\Omega_c \subset B_r(0)$ , ou seja,  $\Omega_c$  é um conjunto limitado. Logo, utilizando a proposição acima com  $D_V = \mathbb{R}^n$ , concluímos que  $x(0) \in \Omega_c \subset R_A(0)$ .

**Exemplo 5:** Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

No Exemplo 3, mostramos que  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$  é tal que  $V$  é definida positiva e  $\dot{V}$  é definida negativa em  $\mathbb{R}^2$ . Como  $V$  é radialmente ilimitada, ou seja,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , concluímos que a origem  $x^e = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema.

## 5. Método Direto de Lyapunov

### Exemplo 6 (Projeto de Controladores Estabilizantes):

Considere o sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \psi(x_1, x_2) + u$$

onde  $x = (x_1, x_2) \in D = \mathbb{R}^2$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é o controle, e  $\phi, \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^1$  com  $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$ . Note que  $x^e = (0, 0)$ ,  $u^e = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema. O objetivo é projetar uma realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1, x_2)$$

onde  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  com  $\alpha(0, 0) = 0$ , de modo que  $x^e = 0$  seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha-fechada:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \psi(x_1, x_2) + \alpha(x_1, x_2)$$

## 5. Método Direto de Lyapunov

**Exemplo 6 (continuação):** Escolhendo

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

temos que  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável com  $V(0) = 0$ ,  $V$  é definida positiva em  $\mathbb{R}^2$  e  $V$  é radialmente ilimitada. Logo, devemos tentar encontrar  $u = \alpha(x_1, x_2)$  de modo a impor que  $\dot{V}$  seja definida negativa em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1[-x_1^3 + x_2\phi(x_1, x_2)] + x_2[\psi(x_1, x_2) + u] \\ &= -x_1^4 + x_1x_2\phi(x_1, x_2) + x_2\psi(x_1, x_2) + x_2\alpha(x_1, x_2) < 0, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

A escolha de

$$u = \alpha(x_1, x_2) = -x_2 - x_1\phi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)$$

assegura que  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  com  $\alpha(0, 0) = 0$  e que

$$\dot{V}(x) = -x_1^4 - x_2^2 < 0, \quad x \neq 0$$

ou seja,  $\dot{V}$  é definida negativa para o **sistema em malha-fechada**.

**Exemplo 6 (continuação):** Concluimos assim que a realimentação de estado

$$u = \alpha(x_1, x_2) = -x_2 - x_1\phi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)$$

garante que a origem  $x^e = 0$  do sistema em malha-fechada é **globalmente assintoticamente estável**.